UNIVERSIDADE DO ALGARVE
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

Fundamentos de Telecomunicações
2004/2005 – Engª Sistemas e Informática

Título: Modulação por código de pulso

1 Objectivos

Neste trabalho iremos analisar a digitalização sinal analógico necessárias para que esse sinal possa ser transmitido digitalmente. Iremos estudar:
-Modulação por código de pulso (PCM- Pulse Code Modulation)

2 Preliminares teóricos

2.1 Emissor PCM

A Figura 1, mostra a arquitectura de um sistema gerador de sinais PCM. O sinal analógico *x(t)*, passa por um filtro passa baixo (FPBaixo) e é amostrado pelo circuito de amostragem e retenção (S&H Sample & Hold) obtendo-se o sinal PAM $x(kT_s)$. De seguida o sinal é quantificado em q níveis discretos. O sinal amostrado e quantificado $x_q(kT_s)$ é então codificado.

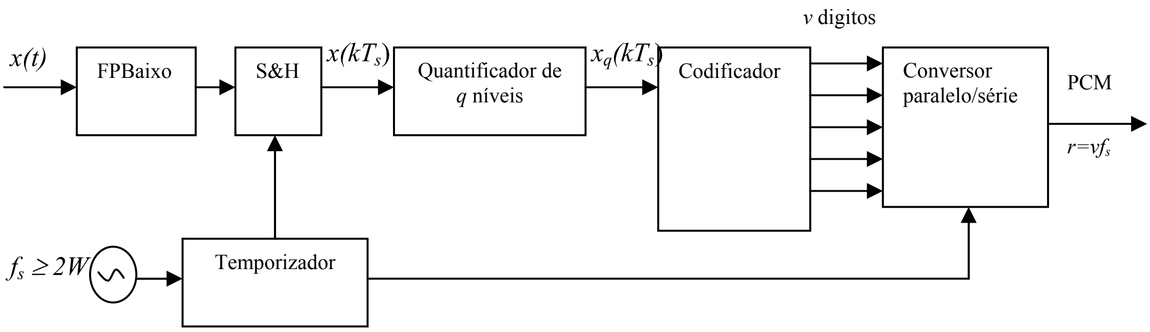


Figura 1: Sistema gerador de sinais PCM.

A operação de quantificação consiste na quantificação do sinal PAM em q níveis. Considerando o sinal analógico um sinal de tensão normalizado tal que $|x(t)| \leq 1\ V$. Se a quantificação for uniforme a gama de tensões de 2 V (o valor máximo da amplitude do sinal pico a pico) é dividida em q níveis igualmente espaçados, sendo a separação entre níveis de $\Delta = \frac{2}{q}$ V.

Os níveis discretos são $\pm\frac{1}{q},\pm\frac{3}{q},\pm\cdots,\pm\frac{q-1}{q}$, como se mostra na figura, para $q=8$. De seguida o codificador codifica cada nível discreto numa palavra de um código digital

Operações envolvidas:

1º amostragem de acordo com o teorema de Nyquist;
2º quantificação, o sinal é quantificado para o nível mais próximo, nesta operação é cometido o erro de quantificação;
3º cada nível de quantificação é codificado utilizando-se *v* bits, $q=2^v$;
3º a cada amostra quantificada faz-se corresponder o conjunto de bits equivalente.

2.2 Receptor PCM

O primeiro bloco do receptor PCM é um regenerador que tem por objectivo regenerar o sinal PCM que chega ao receptor. O sinal PCM à entrada do receptor pode estar contaminado por ruído e/ou distorcido. De seguida cada conjunto de *v* bits que compõem uma palavra são convertidos de série em paralelo e a amplitude correspondente é descodificada. O circuito de *Sample&Hold* gera o sinal $x_q(kT_s)$ em forma de degraus como se mostra na figura, o sinal $x_q(kT_s)$ é uma versão aproximada do sinal $x(t)$ amostrado, trata-se de uma versão aproximada porque as amostras foram quantificadas. O papel do filtro passa baixo à saída do receptor é suavizar $x_q(kT_s)$, no entanto o sinal à saída do filtro passa baixo $y_D(t)$ difere de x(t) na medida em que o sinal quantificado $x_q(kT_s)$ difere do sinal amostrado $x(T_s)$.

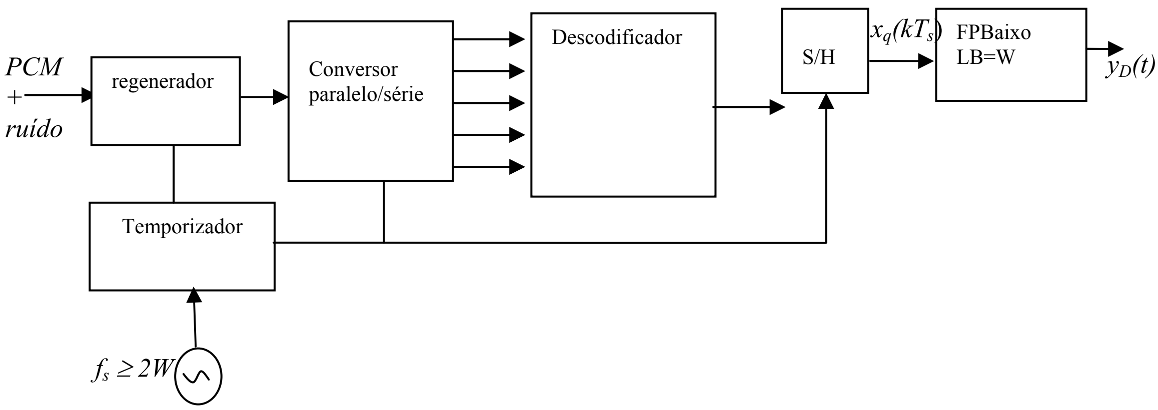


Figura 2 Receptor PCM.

2.3 Erro de quantificação

O erro de quantificação do símbolo *k,* definido pela variável aleatória ε_K, é a diferença entre o sinal amostrado, $x(kT_s)$, e o sinal quantificado $x_q(kT_s)$.

$$\varepsilon_k = x_q(kT_s) - x(kT_s) \tag{2.1}$$

Quando a quantificação é uniforme ou linear, ou seja quando for constante a diferença de amplitudes entre dois níveis consecutivos ($\Delta = const.$). Se as amplitudes a quantificar tiverem uma distribuição uniforme entre +1 e –1 V, a distribuição de ε_k é também uniforme entre $-\frac{\Delta}{2}$ e $\frac{\Delta}{2}$, isto é:

$$f(\varepsilon_K) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & para \quad -\frac{\Delta}{2} \le \varepsilon_K \le \frac{\Delta}{2} \\ 0 & outros\ valores \end{cases} \tag{2.2}$$

$f(\varepsilon_K)$ **função densidade probabilidade de** ε_k **.**

A potência do ruído de quantificação $\sigma_q^2 = \overline{\varepsilon_K^2} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\varepsilon_k)\varepsilon_k^2 \, d\varepsilon_k = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \frac{\varepsilon_k^2}{\Delta} d\varepsilon_k = \frac{\Delta^2}{12}$

Este resultado indica que a potência de ruído aumenta quando o espaçamento entre níveis aumenta, o que intuitivamente já era esperado.

Uma medida da influência do erro de quantificação no desempenho de um sistema PCM é a relação entre a potência do sinal e a potência do ruído de quantificação (RSR – Relação Sinal Ruído)

$$RSR = \frac{S_x}{\sigma_q^2} \tag{2.3}$$

Considerando a normalização $|x(t)| \le 1$, temos então que $S_x \le 1$, e

$$\begin{aligned} RSR &= 10\log_{10}\left(S_x 3q^2\right) \\ &= 10\log_{10}\left(S_x 3 \times 2^{2v2}\right) \\ &\le 4.8 + 6.0v \quad \text{dB} \end{aligned} \tag{2.4}$$

A expressão indica que a relação sinal ruído é proporcional ao nº de bits utilizado para codificar cada amostra

2.4 Quantificação não uniforme

Muitos sinais analógicos (especialmente voz, música e video) apresentam uma gama dinâmica apreciável e a distribuição de amplitudes está longe de ser uniforme, têm média nula e a suas amplitudes tomam com maior probabilidade valores próximos do valor médio como ilustrado na Figura abaixo.

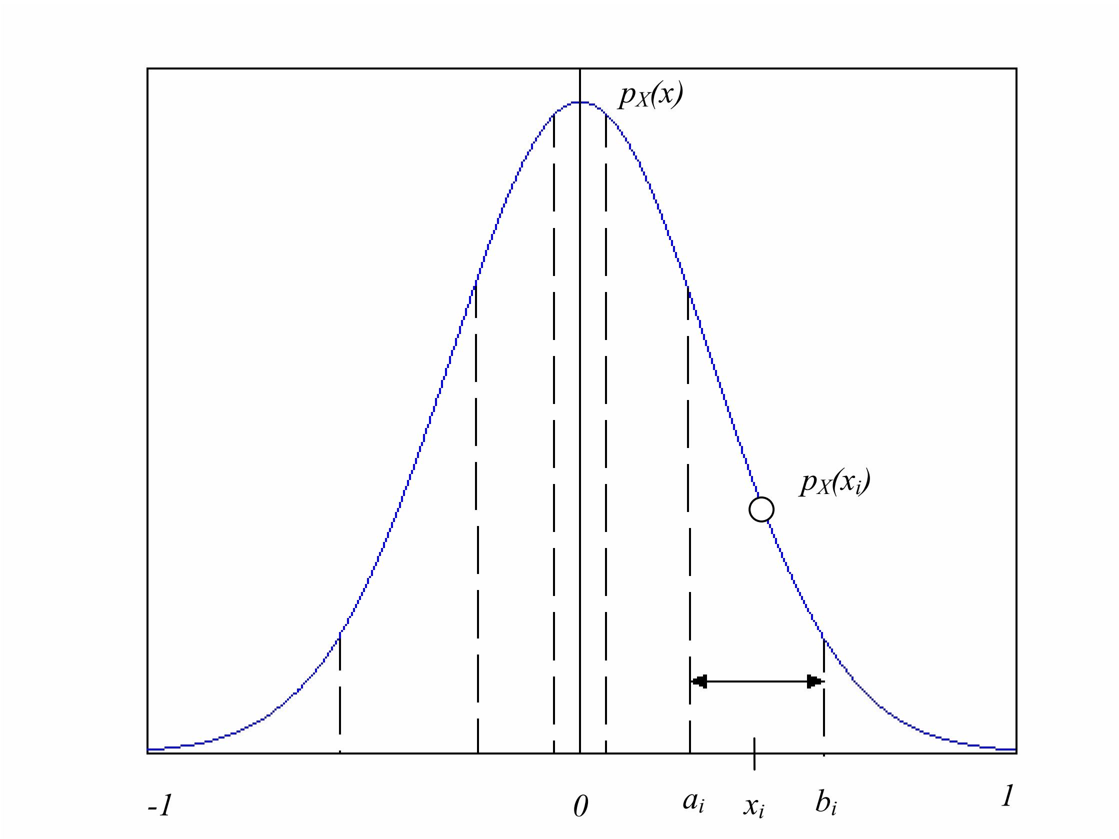


Figura 3: Função densidade probabilidade de um sinal mensagem *x(t)*, com níveis de quantificação não uniformes.

A potência do sinal mensagem S_x é calculada

$$S_x = \int_{-1}^{1} x^2 p_X(x)dx = 2\int_{0}^{1} x^2 p_X(x)dx \tag{2.5}$$

Como $p_X(x)$ apresenta um pico dominante em valores próximos de x=0 então $S_x << 1$. A forma de $p_X(x)$ também significa que $|x(t)| << 1$ a maior parte do tempo. Assim, faz todo o sentido ter intervalos de quantificação não uniformes, intervalos de quantificação mais largos para amostras que ocorrem em intervalos de menor probabilidade e intervalos de menor comprimento no caso contrário.
O ruído de quantificação calcula-se do seguinte modo.
Considera-se que o valor amostrado $x_a = x(kT_s)$ no intervalo $\Delta_i = b_i - a_i$, cujo nível de quantificação é x_i. O erro de quantificação é então:

$$\varepsilon_i = x_i - x_a \tag{2.6}$$

A potência do erro de quantificação no intervalo $a_i < x < b_i$, é então:

$$\overline{\varepsilon_i^2} = \int_{a_i}^{b_i} (x_i - x_a)^2 p_X(x)dx \tag{2.7}$$

2.5 O ruído total de quantificação é a soma dos ruídos de cada intervalo

$$\sigma_q^2 = 2\sum_{i=1}^{q/2} \overline{\varepsilon_i^2} \tag{2.8}$$

Normalmente $q>>1$ e o intervalo de quantificação $\Delta_i = b_i - a_i$ é tão pequeno que $p_X(x) \approx p_X(x_i)$, no intervalo de integração e x_i localiza-se grosseiramente a meio do intervalo. Nestas condições

$$\overline{\varepsilon_i^2} \approx p_X(x_i)\int_{x_i-h_{i/2}}^{x_i+h_{i/2}} (x_i - x)^2\,dx = p_X(x_i)\frac{\Delta_i^3}{12} \tag{2.9}$$

e

$$\sigma_q^2 \approx \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{q/2} p_X(x_i)\Delta_i^3 \tag{2.10}$$

Teoricamente poderiamos optimizar o desempenho de um sistema PCM encontrando os valores de x_i, a_i e b_i que minimizem o ruído de quantificação. Tal abordagem é possível, mas exige na prática que para determinado sinal com determinada função densidade probabilidade seja implementado em hardware um quantificador específico. Na prática é utilizada quantificação uniforme depois de o sinal ser submetido a uma operação de não-linear de compressão. As curvas características de compressão estão standarizadas e foram obtidas através de estudos experimentais realizados com sinais representativos.

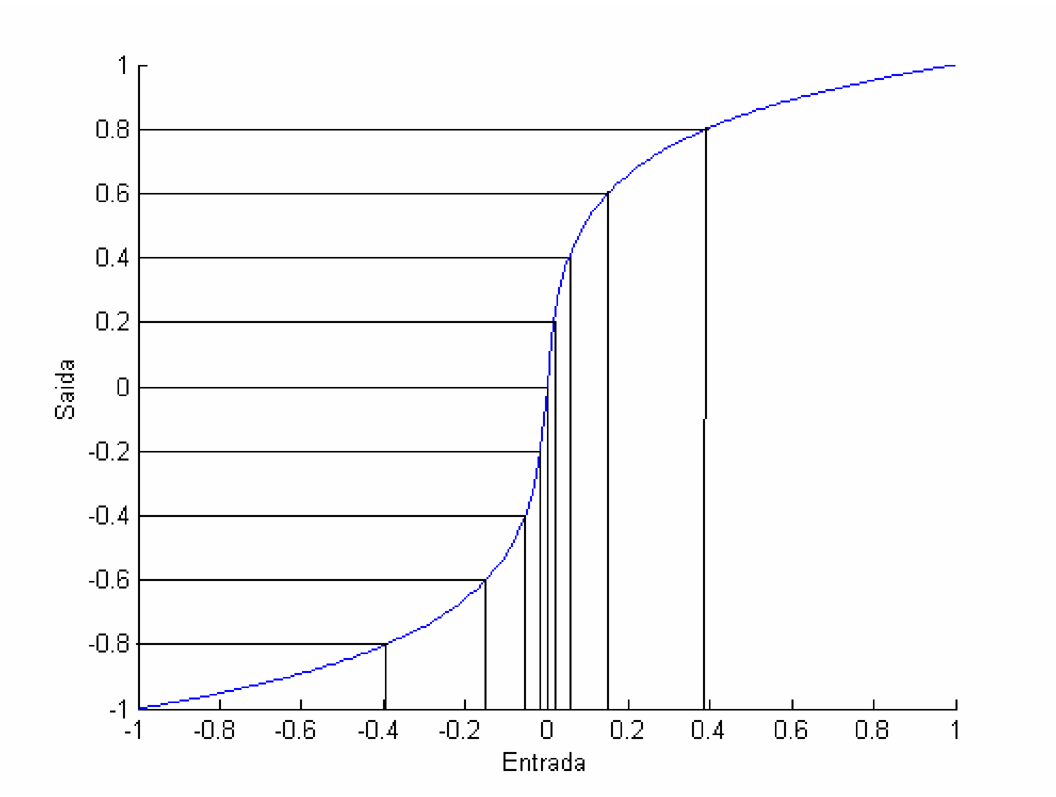


Figura 4: Compressor.

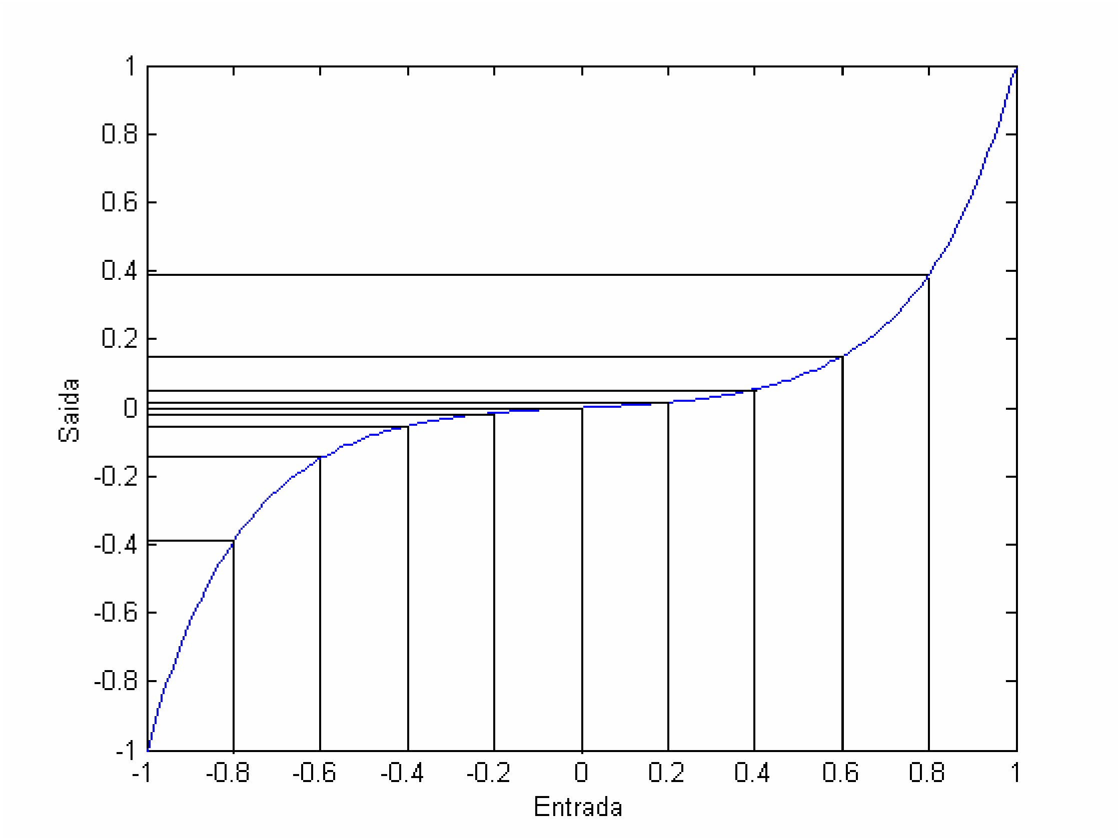


Figura 5: Expandor.

Na prática são frequentes dois tipos de curvas de compressão:

- A curva de compressão μ, adoptada nos Estados Unidos, Canadá e no Japão:

$$y = \frac{\log(1+\mu x)}{\log(1+x)} \qquad \textbf{(2.11)}$$

Com μ=255

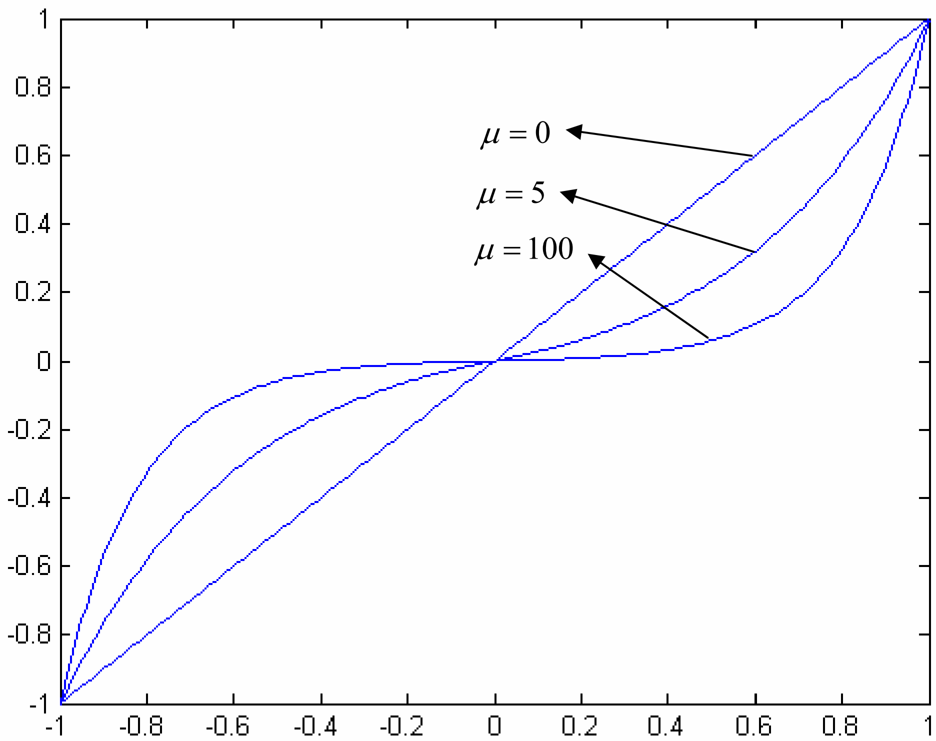


Figura 6: Lei de compressão μ .

- A curva A, utilizada na Europa:

$$y = \frac{ax}{1+\log(a)} \text{ para } 0 \le |x| \le 1/a \qquad (2.12)$$

$$y = sign(x)\frac{1+\log(a|x|)}{1+\log(a)} \text{ para } 1/a < |x| \le 1$$

Com a=87.6

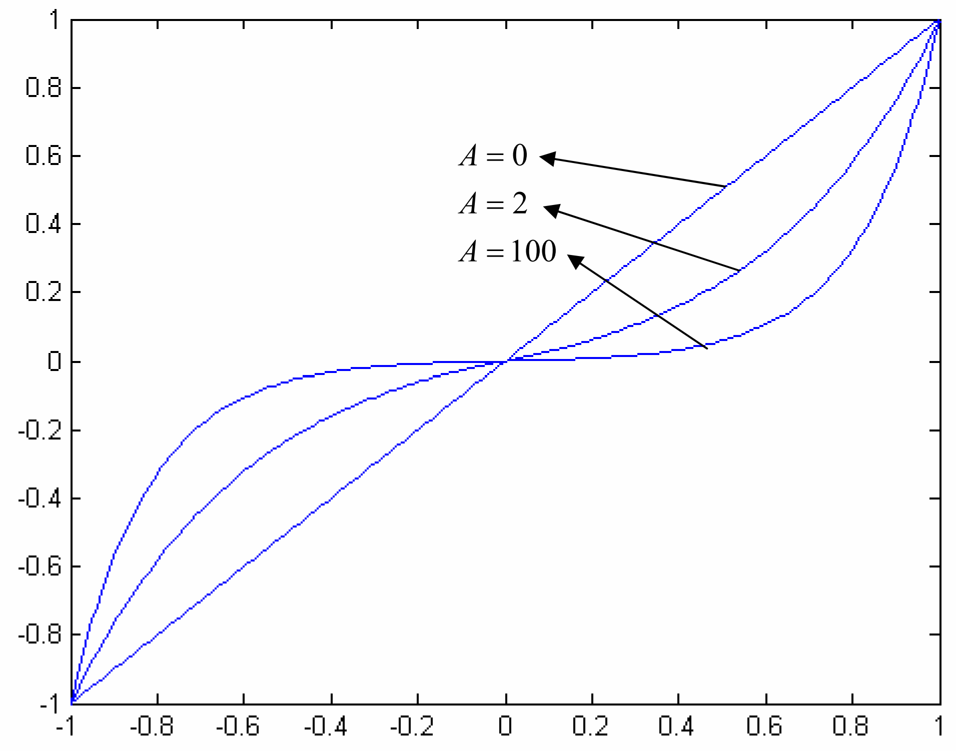


Figura 2.1 **Lei de compressão A.**

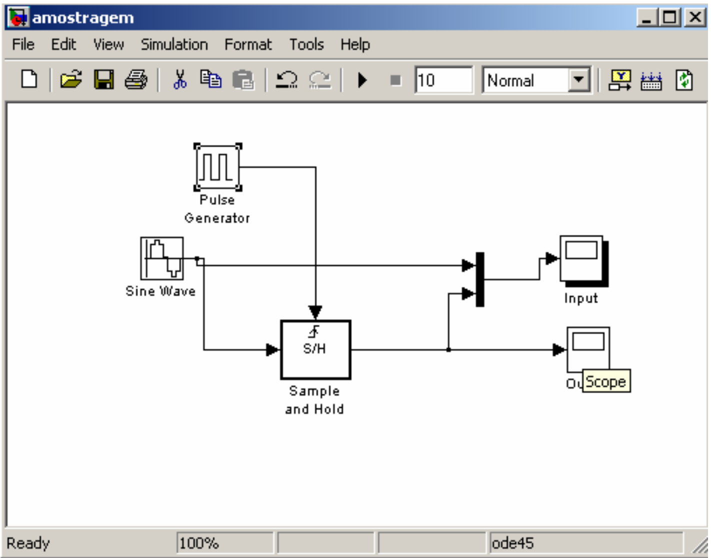
3 Experiências

Em primeiro lugar inicie o programa MATLAB e de seguida o programa SIMULINK, escrevendo o comando

>> simulink

3.1 Amostragem

Abra o programa *amostragem*



a) Explique o funcionamento do programa. Não se esqueça de mencionar as características do sinal que está a ser amostrado (largura de banda do sinal) e se a amostragem está a ser efectuada de acordo com o critério de Nyquist.

3.2 Quantificação

a) Determine a característica entrada/saída de um quantificador uniforme de 2 bits/amostra com uma gama dinâmica de entrada de [-1,1], indique os níveis de decisão e os respectivos níveis de quantificação.

b) Abra o programa *quantif* . Explique e teste o seu funcinamento.

c) Consider agora um quantificador de 5 bits/amostra. Qual é o valor do intervalo que quantificação. Quais são os níveis de quantificação.

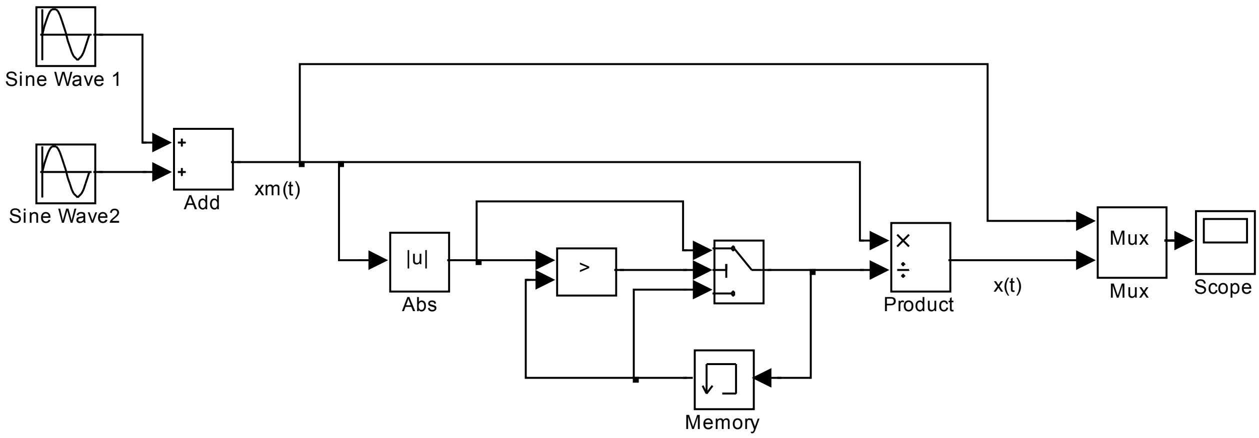
d) Deduza expressões que para um sinal normalizado [1,1], que permitam formar os vectores cujos elementos correspondam aos níveis de decisão (partition) e de quanticação (codebook):

3.3 Distorção introduzida pela quantificação

Nesta secção irá utilizar um quantificador uniforme de 32 níveis.

a) Numa nova janela Simulink, gere o sinal analógico $x_{in} = 3\cos(40\pi t) + 2\sin(240\pi t)$ considerando uma escala temporal de 0 a 100 ms com uma frequência de amostragem de 10 kHz.
b) Altere os parâmetros do bloco quantificador de modo a que este tenha 32 níveis de quanticação.

Nota: como o quantificador espera receber sinais de amplitudes não superiores a 1 V o sinal de entrada deste deverá ser normalizado em conformidade. Pode utilizar o seguinte normalizador:



Verifique que o sinal de saída, x(t), se encontra normalizado.
Explique sucintamente o funcionamento do normalizador.

b) De modo a simplificar a janela de simulação, é conveniente agrupar os blocos associados à mesma função num *subsistema*. Crie um subsistema designado por normalizer recorrendo seleccionando os blocos do normalizador e recorrendo ao menu: *Edit >Create Subsystem.*

c) Visualise, no mesmo bloco de osciloscópio os sinais x e xq (sinal quantificado) através da multiplexagem destes.

d) Nota, com certeza, a existência do ruído de quantificação eq=x-xq. Mesmo sem o representar sabe qual é o seu valor máximo? Compare o valor teórico com o valor simulado.

e) E qual é a potência média teórica do ruído? Compare este valor com o que se obtém a partir do vector eq.

f) Calcule a relação sinal-ruído de quantificação, compare com os valores simulados.

g) O fenómeno de *clipping* que o sinal analógico sofre ocorre se a sua amplitude for excessiva. Para isso multiplique o sinal x por 2, por exemplo, e observe x e xq. Visualize o efeito da saturação.

3.4 Influência do número de níveis de quantificação

Vai agora vamos analisar a inflência do número de níveis na quantificação. Para isso, considere quantificadores com $R = 2, 3, 4,$ 5, 6 e 8 bits/amostra e use como sinal de entrada o sinal analógico normalizado x.
a) Sobreponha os gráficos de entrada-saída para cada valor de R e visualize o ruído de quanticação. Observe que, como esperava, este ruído diminui quando o número de níveis aumenta.

b) Observe o espectro de potências do sinal x e compare-o com os espectros dos sinais quantificados (use a função psd () para esse esfeito). Repare que estes são tanto mais parecidos com o espectro original quanto mais níveis de quantificação forem usados. Efectue o esboce dos espectros de x e xq para $R = 2$ e $R = 8$.

c) Recorrendo ao Matlab preencha a tabela seguinte, onde S representa a potência média do sinal normalizado, e Nq a potência média do ruído. Comente os resultados.

Nº bits/amostra	S	Nq	$\left(\frac{S}{N_p}\right)_{Teorico}$ dB	$\left(\frac{S}{N_p}\right)_{Simulado}$ dB
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				

3.5 Influência do número de níveis de quantificação

Adicione um quantificaodr não-uniforme com $L = 32$ níıveis.

a) Adicione os blocos mu-law compressor e mu-law expander ao diagrama de simulaçãoanterior. O valor mu=0 corresponde à quantificação uniforme. Utilize mu=255.
b) Compare os resultados obtidos na tabela do exercício anterior e comente.

3.6 *Teste do quantificador*

O objectivo deste exercício é o teste do trabalho que realizou, para isso necessita de um PC com som, caso não tenha um computador com essa facilidade deve de fazer o exercício e depois testar no PC do professor.

a) Utilize um ficheiro de audio do tipo "speech.wav" e transfira-o para o workspace do Matlab através do comando [x,fs,bits] = wavread('speech.wav').

b) Quantifique uniformente o sinal com 16 e 256 níveis.

c) Quantifique o sinal com 16 e 256 níveis mas desta vez usando um compressor com a lei-A. Use $A = 20$ e $A = 87{,}6$.

d) Representar graficamente o sinal original, o sinal quantificado e o erro de quantificação, em todas as situações anteriores.

e) Obtenha um gráfico da relação sinal-ruído de quantificação, em dB, com e sem compressão, em função da razão entre a amplitude máxima do sinal a amostrar.

f) Ouça o conteúdo dos ficheiros use a função Matlab sound(x,fs,bits) (veja o respectivo help).

3.7 Escrita do relatório

Elabore um relatório sucinto do trabalho realizado.