



**UNIVERSIDADE DO ALGARVE**  
**FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA**

*Fundamentos de Telecomunicações*  
*2004/2005 – Eng<sup>a</sup> Sistemas e Informática*

**Trabalho n°3**

**Título:** *Amostragem de sinais*

## **1 Objectivos**

O objectivo deste trabalho é o estudo da amostragem de sinais analógicos que é um aspecto fundamental dos sistemas de comunicação digitais.

A realização do trabalho tem por objectivo ajudar o aluno a compreender e a assimilar os conceitos leccionados nas aulas teóricas.

## **2 Metodologia**

Antes da aula o aluno deverá ler o guia e resolver todas as questões que exigem cálculos analíticos.

Durante a aula deve de responder às perguntas do guia.

No fim da aula deve de enviar por e-mail, ao professor, o relatório em formato PDF.

## **3 Amostragem de sinais (Teorema de Nyquist ou da amostragem)**

### **3.1 Preliminares teóricos**

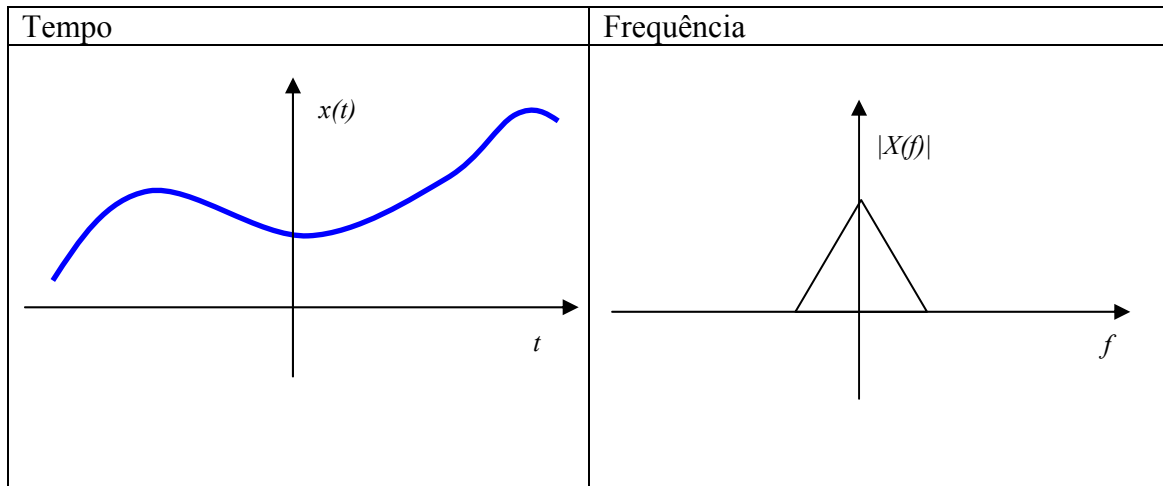
Em vez de transmitir um sinal de forma contínua no tempo, verifica-se que é possível enviar um conjunto de amostras extraídas desse sinal de forma periódica, e posteriormente recuperar o sinal contínuo inicial de forma simples e sem qualquer erro introduzido, desde que se cumpra o estabelecido no teorema da amostragem.

#### ***Teorema de Nyquist ou da amostragem***

Dado um sinal analógico com largura de banda limitada  $W$ , este sinal é descrito sem qualquer erro pelas suas amostras extraídas periodicamente com um período  $T_s \leq 1/2W$ . Se um sinal for amostrado a uma frequência  $f_s \geq 2W$ , então é possível recuperar o sinal inicial a partir das suas amostras, basta para isso filtrar o sinal adicional com um filtro ideal passa baixo com largura de banda  $B$ ,  $W \leq B \leq f_s - W$

#### ***Amostragem ideal***

Considere o sinal analógico  $x(t)$ , de largura de banda limitada  $W$ , representado na figura abaixo, quer no domínio do tempo quer no domínio da frequência



Considere que de  $T_s$  em  $T_s$  segundos são retiradas amostras do sinal  $x(t)$ , vamos considerar que se trata de uma amostragem ideal, em que a amostra é retirada instantaneamente. Assim, obtemos uma sequência de amostras  $[x(nT_s)]$ , ou seja um trem de deltas de Dirac

$$\begin{aligned}
 x_\delta(t) &= x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \delta(t - kT_s)
 \end{aligned} \tag{1}$$

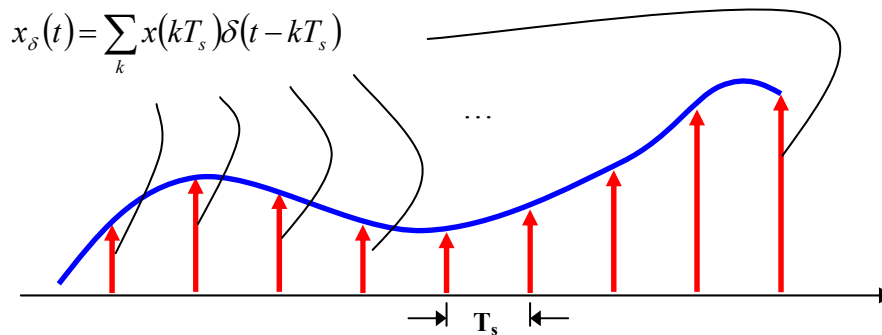


Figura 1: Sinal amostrado idealmente.

Para obter o espectro do sinal amostrado  $x_\delta(t)$ , calcula-se a sua transformada de Fourier

$$\begin{aligned}
 X_\delta(f) &= \mathfrak{F}\left\{x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s)\right\} \\
 &= X(f) * \left(f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_s)\right) \\
 &= f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s)
 \end{aligned} \tag{2}$$

Representando gráficamente o sinal  $x_\delta(t)$ , no domínio da frequência temos

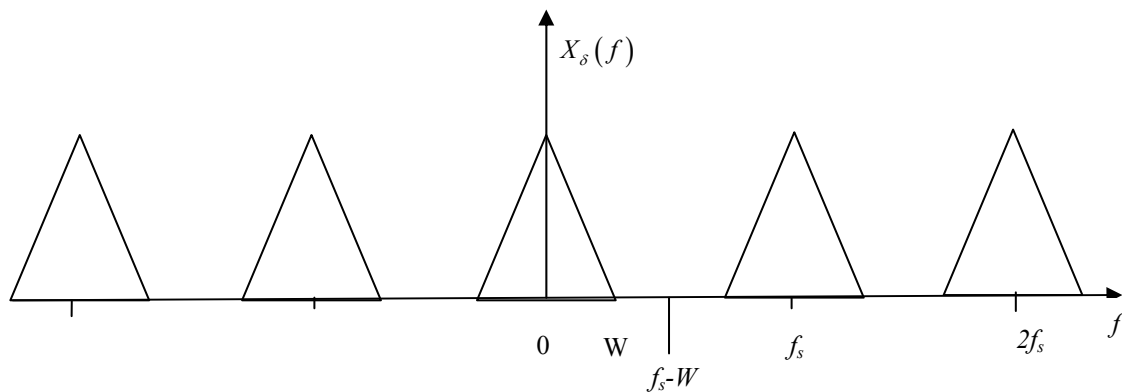


Figura 2: Espectro do sinal amostrado idealmente.

Olhando para a figura 2, concluímos que para recuperar o sinal  $x(t)$  basta filtrar o sinal amostrado por um filtro passa baixo ideal com largura de banda  $B$ ,  $W \leq B \leq f_s - W$ .

Considerando o filtro passa baixo ideal com largura com ganho  $K$ , atraso  $t_d$ , e largura de banda  $B$ , a sua função de transferência é:

$$H(f) = K \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) e^{-j2\pi f t_d} \tag{3}$$

O espectro do sinal  $x_\delta(t)$  depois de filtrado é:

$$Y(f) = H(f) X_\delta(f) = K f_s X(f) e^{-j2\pi f t_d} \tag{4}$$

No domínio temporal temos que

$$y(t) = \mathfrak{F}^{-1}[Y(f)] = K f_s x(t - t_d) \tag{5}$$

O que corresponde ao sinal amplificado pelo factor  $K f_s$  e atrasado de  $t_d$  segundos.

**Exercício 1**

Considere o sinal analógico  $x(t)$ , de largura de banda limitada  $W$

$$x(t) = \cos(2\pi 256t) + \cos(2\pi 512t) \quad (6)$$

Considere que o sinal é amostrado, mas que em vez do trem de deltas de Dirac considerados na análise teórica anterior é utilizado um trem de pulsos rectangulares,  $s(t)$  com período  $T_s$  e duração  $\tau$ .

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t - kT_s}{\tau}\right) \quad (7)$$

Cuja transformada de Fourier é:

$$S(f) = \tau f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(nf_s \tau)$$

**a)** Considere  $\tau = 0.25T_s$ ,  $\tau = 0.5T_s$ ,  $\tau = T_s/8$  e  $\tau = T_s/64$ .

Realize analiticamente e represente graficamente a operação de amostragem quer no domínio do tempo como no domínio da frequência.

**b)** Utilize os programa *PAM.mdl* e o programa *Spectral\_density.m* para validar os resultados anteriores.

**c)** Faça a análise crítica dos resultados anteriores, comentando o papel de  $\tau$ , na amostragem do sinal.

**d)** Para proceder recuperação do sinal  $x(t)$  a partir das suas amostras é necessário filtrar o sinal amostrado utilizando um filtro passa baixo ideal. Analise esta operação analiticamente para as condições da alínea a).

**e)** Utilize os programa *PAM.mdl* e o programa *Spectral\_density.m* para validar os resultados anteriores.

**f)** Acha que o sinal à saída do filtro passa baixo é uma boa aproximação do sinal original, ou será que necessita ainda de efectuar mais alguma operação?

## Exercício 2

A figura seguinte representa um método prático para efectuar a amostragem de sinais analógicos que utiliza um circuito de amostragem e retenção (sample and hold).

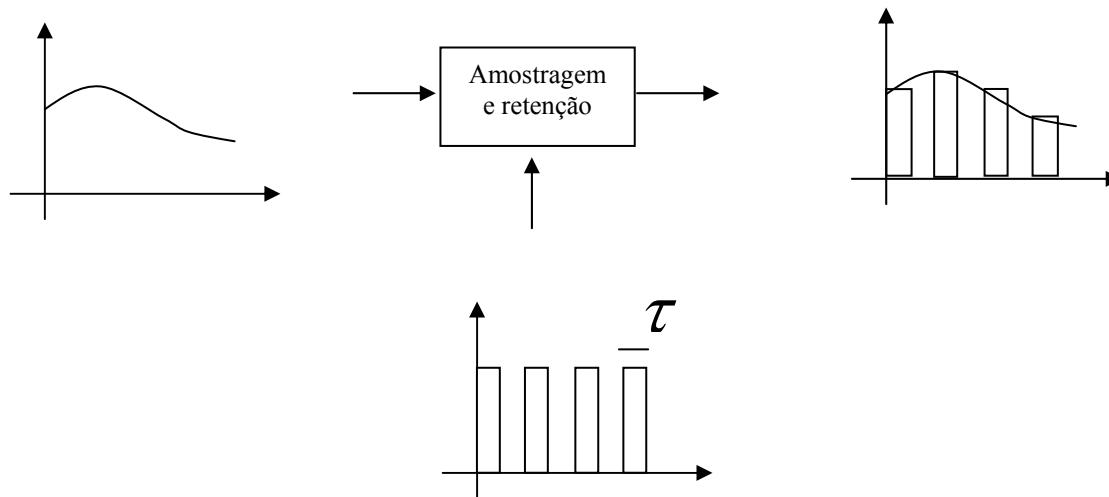


Figura 3: Amostragem e retenção.

a) Considere  $\tau = 0.25T_s$ ,  $\tau = 0.5T_s$ ,  $\tau = T_s/8$  e  $\tau = T_s/64$ .

Realize analiticamente e represente graficamente a operação de amostragem quer no domínio do tempo como no domínio da frequência.

b) Utilize os programa *PSH.mdl* e o programa *Spectral\_density.m* para validar os resultados anteriores.

c) Faça a análise crítica dos resultados anteriores, comentando o papel de  $\tau$ , na amostragem do sinal.

d) Para proceder recuperação do sinal  $x(t)$  a partir das suas amostras é necessário filtrar o sinal amostrado utilizando um filtro passa baixo ideal. Analise esta operação analiticamente para as condições da alínea a).

e) Utilize os programa *PSH.mdl* e o programa *Spectral\_density.m* para validar os resultados anteriores.

f) Acha que o sinal à saída do filtro passa baixo é uma boa aproximação do sinal original, ou será que necessita ainda de efectuar mais alguma operação?