UNIVERSIDADE DO ALGARVE
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

Fundamentos de Telecomunicações
2004/2005 – Engª Sistemas e Informática

Trabalho nº2

Título: ***Modulação de Frequência***

2 Objectivos

O objectivo deste trabalho é o estudo da modulação em Frequência (FM).
A realização do trabalho tem por objectivo ajudar o aluno a compreender e a assimilar os conceitos leccionados nas aulas teóricas.

3 Metodologia

Antes da aula o aluno deverá ler o guia e resolver todas as questões que exigem cálculos analíticos.
Durante a aula deve de responder às perguntas do guia.
No fim da aula deve de enviar por e-mail, ao professor, o relatório em formato PDF.

4 Preliminares teóricos

4.1 Conceitos básicos

Dada a portadora sinusoidal, com angulo

$$x_p(t) = A_p \cos(\theta_i(t)) \tag{1}$$

A sua frequência instantânea é obtida por derivação de $\theta_i(t)$, isto é:

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta_i(t)}{dt} \tag{2}$$

Quando a frequência da portadora é constante f_p, a fase da portadora é:

$$\theta_i(t) = 2\pi f_p t + \theta_0 \tag{3}$$

onde θ_0 é o valor de $\theta_i(t)$ no instante *t=0.*

Na modulação de fase (PM, Phase Modulation), $\theta_i(t)$ varia linearmente com o sinal mensagem *x(t)*:

$$\theta_i(t) = 2\pi f_p t + \theta_0 + K_1 x(t) \tag{4}$$

Temos então o sinal PM, considerando $\theta_0 = 0$:

$$x_p(t) = A_p \cos(2\pi f_p t + K_1 x(t)) \tag{5}$$

Na modulação de frequência (FM, Frequêncy Modulation), a frequência instantanea varia linearmente com x(t), obtendo-se:

$$\omega_i(t) = 2\pi f_i(t) = 2\pi f_p + K_2 x(t) \tag{6}$$

Tem-se então que:

$$\theta_i(t) = \int_{t_0}^{t} \omega_i(t)dt = 2\pi f_p t + \theta_0 + \int_{t_0}^{t} K_2 x(t) \tag{7}$$

E o sinal FM:

$$x_p(t) = A_p \cos\left(2\pi f_p t + K_2 \int_{t_0}^{t} x(t)\right) \tag{8}$$

4.2 Análise espectral de sinais FM

Considere o sinal mensagem, *x(t):*

$$x(t) = A_m \cos(2\pi f_m t) \tag{9}$$

A frequência instantânea do sinal FM correspondente é:

$$\begin{aligned} f_i(t) &= f_p + K_2 A_m \cos(2\pi f_m t) \\ &= f_p + \Delta f \cos(2\pi f_m t) \end{aligned} \tag{10}$$

onde

$$\Delta f = K_2 A_m \tag{11}$$

Δf é o desvio de frequência, que representa o desvio máximo de frequência ao redor da portadora f_p. A característica fundamental de um sinal FM é que o desvio de frequência Δf é proporcional à amplitude do sinal mensagem e independente da sua frequência. O ângulo do sinal FM

$$\theta_i(t) = 2\pi f_p t + \frac{\Delta f}{f_m} \sin(2\pi f_m t) \tag{12}$$

A razão $\frac{\Delta f}{f_m} = \beta$, é o índice de modulação. β é medido em radianos.

O sinal FM pode então escrever-se do seguinte modo:

$$x_{FM}(t) = A_p \cos[2\pi f_p t + \beta \sin(2\pi f_m t)] \tag{13}$$

A modulação de frequência por se tratar de um processo não linear, não é de fácil analise no domínio da frequência, por se tratar a sua análise quantitativa só é possível em particulares, como quando o sinal mensagem é uma sinusoide, nesse caso podemos escrever:

$$x_{FM}(t) = \frac{A_p}{2}\exp\left(2\pi f_p t + \beta\sin\left(2\pi f_m t\right)\right) + \frac{A_p}{2}\exp\left(-2\pi f_p t - \beta\sin\left(2\pi f_m t\right)\right)$$
$$= \underbrace{\frac{A_p}{2}\exp\left(2\pi f_p t\right)\exp\left(\beta\sin\left(2\pi f_m t\right)\right)}_{\text{Termo associado com as componentes positivas de frequência}} + \underbrace{\frac{A_p}{2}\exp\left(-2\pi f_p t\right)\exp\left(-\beta\sin\left(2\pi f_m t\right)\right)}_{\text{Termo associado com as componentes positivas de frequência}} \quad (14)$$

Concentrando-se só com os termos associados à frequência positiva

$$\exp\left(j\beta\sin\left(2\pi f_m t\right)\right) \quad (15)$$

Verificamos que é um sinal periódico com período $1/f_m$ e portanto em príncipio pode ser representado por uma série de Fourier

$$\exp\left(j\beta\sin\left(2\pi f_m t\right)\right) = \sum_n c_n \exp\left(jn2\pi f_m t\right) \quad (16)$$

Os coeficientes c_n correspondem às funções de Bessel

$$c_n = J_n(\beta) \quad (17)$$

As funções de Bessel foram estudadas por Bessel (1784-1846) no âmbito dos seus estudos sobre o movimento dos planetas, são funções que se encontram calculadas para diferentes valores de n (ordem da função) e β (argumento da função).

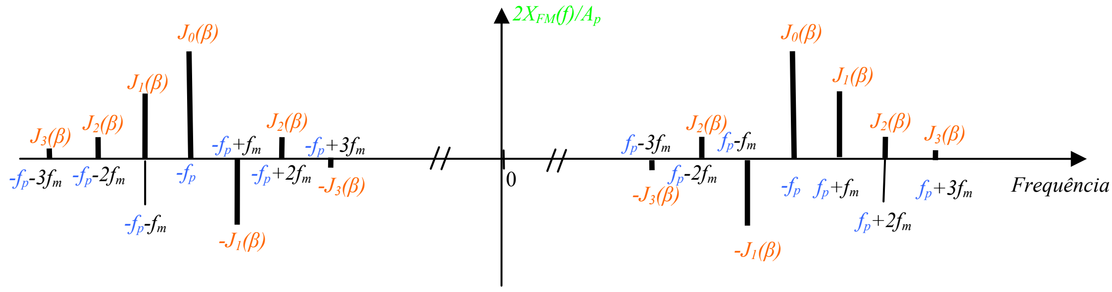
Deste modo o sinal FM pode ser escrito como:

$$x_{FM}(t) = A_p \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\cos\left[2\pi\left(f_p + nf_m\right)\right] \quad (18)$$

Cuja transformada de Fourier é:

$$X_{FM}(f) = \frac{A_p}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\left[\delta\left(f - f_p - nf_m\right) + \delta\left(f + f_p + nf_m\right)\right] \quad (19)$$

que se encontra representada abaixo.



O espectro de um sinal FM depende directamente das funções de Bessel. Para entender melhor o comportamento das funções de Bessel iremos analisar o seu comportamento e as suas propriedades mais relevantes:

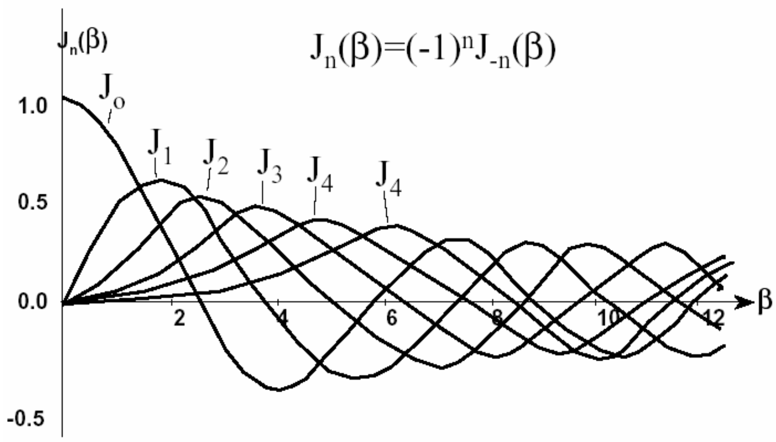


Figura 1 Funções de Bessel.

Algumas propriedades das funções de Bessel:

Se β<<1

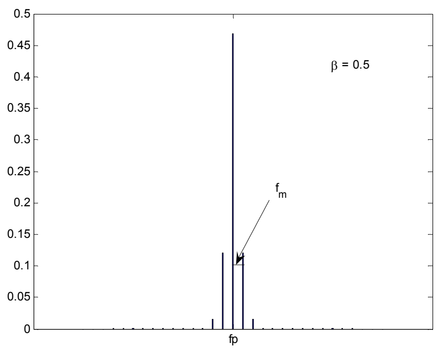
$$J_0(\beta) \cong 1$$

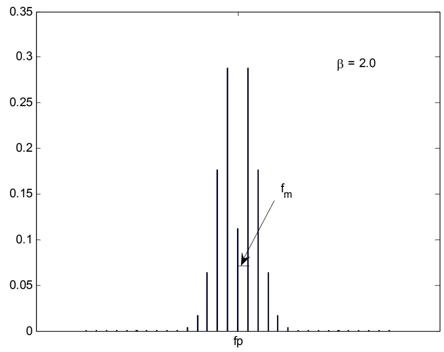
$$J_1(\beta) \cong \frac{\beta}{2}$$

$$J_n(\beta) \cong 0 \quad n \geq 2$$

4.3 Largura de banda necessária para a transmissão de sinais FM

Teoricamente, um sinal FM contém um número infinito de riscas espectrais, por isso a largura de banda necessária para a sua transmissão é infinita. No entanto, na prática a potência do sinal está concentrada num número finito de riscas, vejamos alguns exemplos:





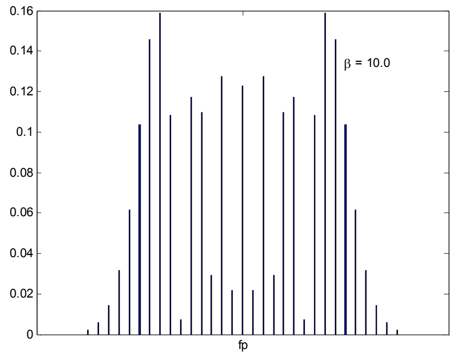


Figura 2 Espectro do sinal FM com f_m constante e β variável, as riscas não representadas tem reduzida amplitude. Só está representado na figura o eixo positivo das frequências.

Como $\beta = \dfrac{\Delta f}{f_m}$, tendo em conta que f_m é constante para todos os casos representados na figura, β elevado corresponde a um desvio máximo de frequência ,Δf, elevado e a uma largura de banda elevada.

Uma regra empirica, conhecida por regra de Carson:

$$B_T = 2\Delta f + 2 f_m = 2\Delta f\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) = 2 f_m\left(1+\beta\right) \qquad (20)$$

Significa que o número de riscas a considerar é de β+1 para cada lado da portadora.

Critério da potência:

Considera-se um número de ricas N tal que a potência contida nestas riscas seja 98% do total da potência do sinal.

Basta calcular N para que $\sum_{n=-N}^{N} J_n^2\left(\beta\right) \geq 0.98$

dado que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2\left(\beta\right) = 1$

<u>*Critério apresentado no livro de Haykin:*</u>

É baseado na amplitude das riscas. Segundo este critério o número de riscas a transmitir é calculado de forma que todas as riscas excluídas tenham amplitude inferior a 1% da amplitude da risca da portadora quando não modulada. Este critério é mais pessimista que a regra de Carson

Exercício 1 (*Modulador de frequência)*

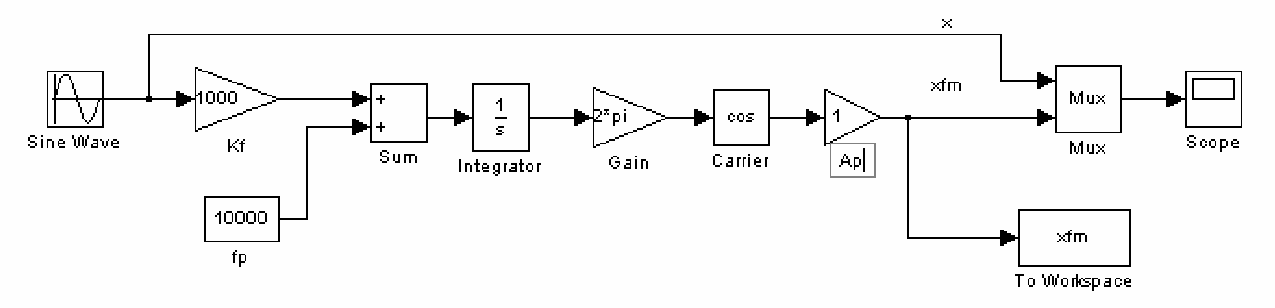
a) Execute uma sessão SIMULINK executando na janela do MATLAB o comando:

>> simulink

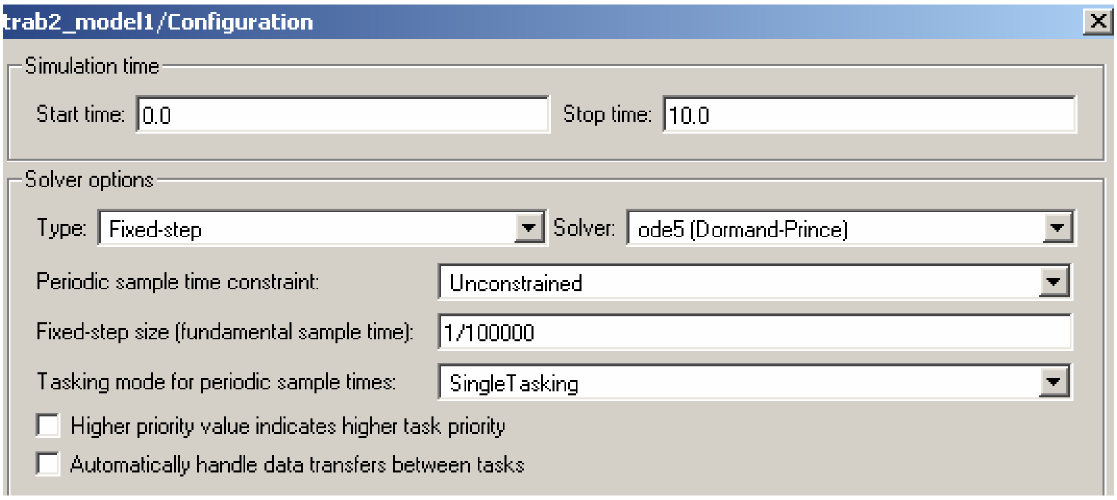
b) Crie um diagrama de blocos que implemente um modulador FM, implemente directamente a função:

$$x_p(t) = A_p \cos\left(2\pi f_p t + 2\pi K_f \int_{t_0}^{t} x(t)\right)$$

Um diagrama de blocos possível é:



Os parâmetros de simulação a usar nesta experiência devem de ser:



c) Configura os diferentes blocos de modo a que o modulador FM tenha as seguintes características:
Amplitude do sinal modulador: 1V
Frequência do sinal modulador: 200 Hz
Amplitude da portadora: 1 V
Frequência da portadora: 10 kHz
Constante do modulador K_f: 2 kHz/V

d) Calcule o desvio máximo de frequência e o índice de modulação correspondentes ao exercício anterior.

e) Observe o funcionamente do modulador FM numa gama temporal de 5 ms. Comente as suas observações.

f) Altere o valor de K_f de modo que o indíce de modulação seja 5. Comente.

Exercíco 2 *(Largura de Banda do Sinal FM)*

- **a)** De acordo com a regra de Carson qual a largura de banda do sinal FM, considerado na alínea f) do exercício anterior ?
- **b)** Transfira para o workspace do MATLAB 2^{16} amostras do sinal FM e faça a representação gráfica do espectro de amplitudes do sinal FM na gama $f_c \pm 3$ kHz :

Utilize o programa

```
fs=100000;
fc=10000;
psd(xfm,2^14,fs);
axis([fc-3000 fc+3000 -10 30])
xlabel('Frequencia (kHz)')
ylabel('Densidade espectral de potencia')
```

- **c)** Observe o espectro do sinal FM , compare com o espectro calculado analíticamente.
- **d)** A largura de banda que consegue estimar tem um valor próximo do que tinha calculado?

e) Repita o problema anterior, variando de cada vez um só dos seguintes parâmetros: amplitude do sinal modulador, frequência do sinal modulador, constante de modulação K_f. Comente os resultados obtidos.

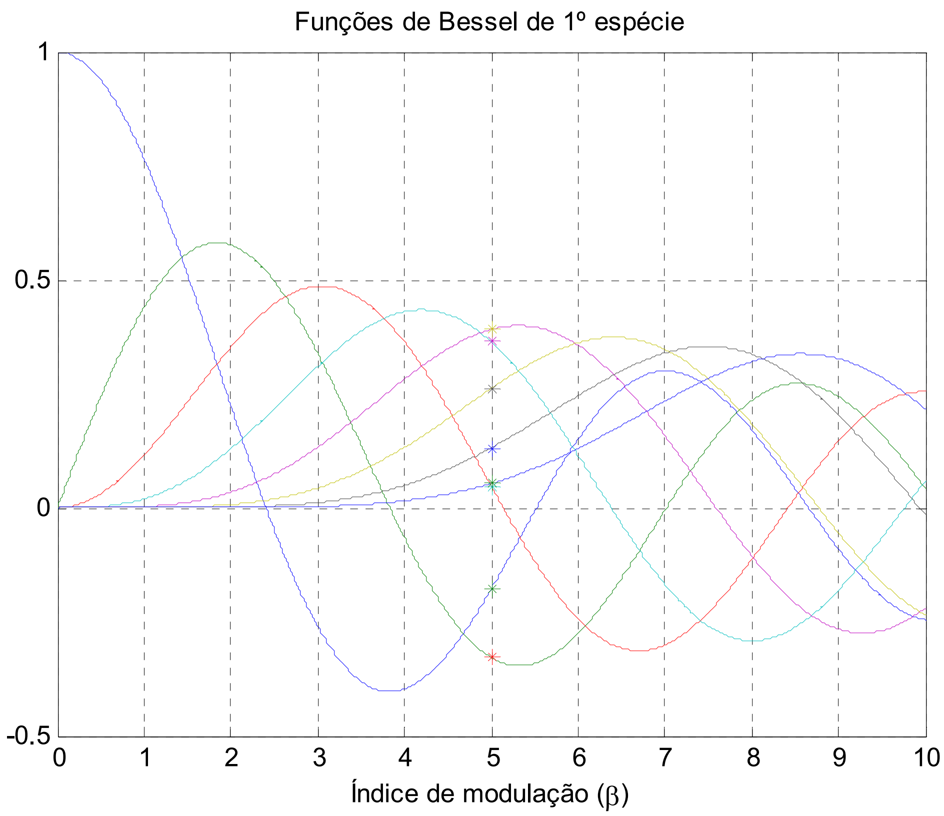
Exercíco 3 *(Funções de Bessel e largura de banda)*

As amplitudes das riscas do espectro do sinal FM estão relacionadas com as funções de Bessel de 1ª espécie.

a) Represente gráficamente as funções de Bessel de 1ª espécie, $J_n(\beta)$, para n=0,1,...,7 e β <10. Sobreponha a este gráfico os valores das funções de Bessel para o caso β=5, que tem vindo a considerar.

Utilize o seguinte programa em Matlab

```
beta=0:0.01:10;
bj=besselj(0:7,beta');
bj5=besselj(0:7,5);
plot(beta,bj,5,bj5,'*')
grid on
title('Funções de Bessel de 1° espécie')
xlabel('Índice de modulação (\beta)')
```



b) Calcule, analíticamente a potência média do sinal FM, dissipada numa resistência de 1 Ohm.

c) Estime a potência média do sinal FM calculado.

```
Pfm=mean(xfm.^2)
```

d) Determine, a partir das funções de Bessel e usando comandos MATLAB, a percentagem da potência total do sinal FM contida na banda definida pela regra de Carson.

e) Repita a alínea anterior agora para o critério de 98%.

f) Generalize a análise anterior para outros valores de β. Faça um gráfico, fazendo variar β de 0.1 a 30.

g) Faça um gráfico análogo para a regra de Carson. Sobreponha os dois gráficos e tire as suas conclusões.