Resolução do 3o Mini-teste de Análise de Circuitos

9/Dez/2005

---

1. A figura 1 mostra o circuito equivalente para $t < 0$.

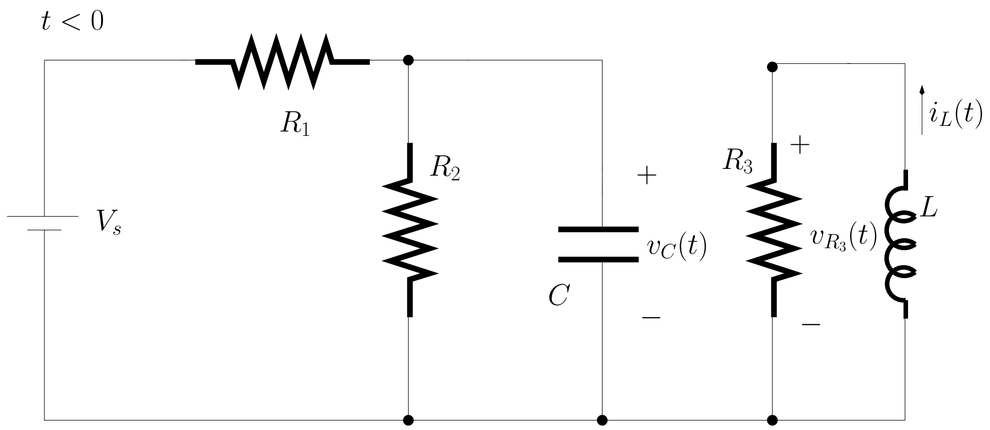

Figura 1: *Circuito equivalente para* $t < 0$.

   (a) Dado que o circuito está a funcionar há bastante tempo em regime DC o condensador representa um circuito aberto e, nesta situção, a tensão aos seus terminais é igual à tensão aos terminais de R_2:

$$\begin{aligned} v_C(t) &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_s \ , \qquad t < 0 \\ &= 5 \text{ V} \end{aligned} \tag{1}$$

   (b) Dado que o circuito está a funcionar há bastante tempo em regime DC a energia que eventualmente a bobina tivesse armazenada foi seguramente dissipada na resistência R_3. Assim, $i_L(t) = 0$.

   (c) Dados os argumentos apresentados anteriormente, $v_{R_3}(t) = 0$.

2. A figura 2 mostra o circuito equivalente para $0 \leq t < t_o$.

   (a) Para este circuito podemos escrever

$$\begin{aligned} i_{R_3}(t) &= i_C(t) + i_L(t) \\ \frac{v_C(t)}{R_3} &= -C \frac{d\, v_C(t)}{dt} - \frac{1}{L} \int_0^t v_C(t)\, dt - \underbrace{i_L(t=0)}_{=\,0} \end{aligned}$$

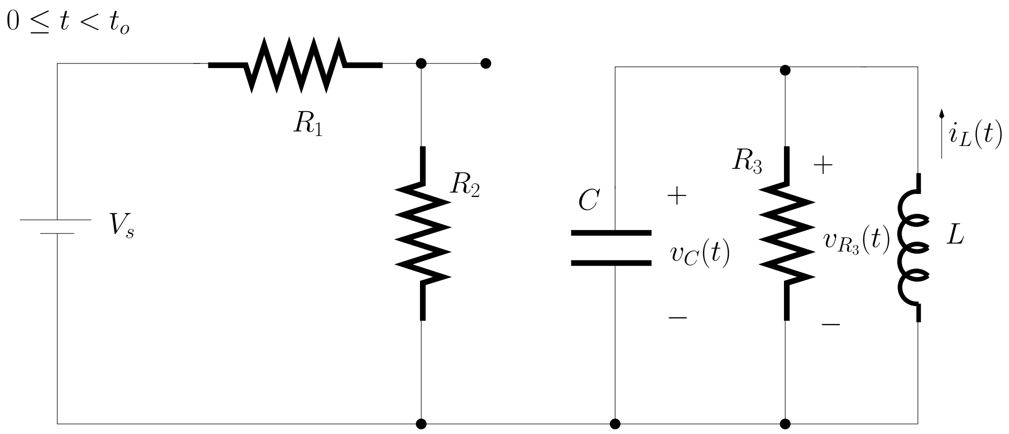

Figura 2: *Circuito do equivalente para* $0 \leq t < t_o$.

ou seja

$$\frac{v_C(t)}{R_3} + C\,\frac{d\,v_C(t)}{dt} + \frac{1}{L}\int_0^t v_C(t)\,dt = 0$$

Derivando a equação anterior obtemos:

$$C\,\frac{d^2\,v_C(t)}{dt^2} + \frac{1}{R_3}\;\frac{d\,v_C(t)}{dt} + \frac{v_C(t)}{L} = 0 \tag{2}$$

A equação anterior apresenta duas soluções em que cada uma destas é do tipo:

$$\alpha_i\,e^{\beta_i\,t}\,,\;\; i\;\in\;\{1,2\} \tag{3}$$

e

$$v_C(t) = \alpha_1\,e^{\beta_1\,t} + \alpha_2\,e^{\beta_2\,t}\,,\qquad 0 \leq t < t_o \tag{4}$$

Substituindo expressão da equação 3 na equação 2 temos:

$$\alpha_i\,e^{\beta_i\,t}\left(C\,\beta_i^2 + \frac{\beta_i}{R_3} + \frac{1}{L}\right) \;=\; 0$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\beta_1 &= -\frac{1}{2\,R_3\,C} + \sqrt{\frac{1}{(2\,R_3\,C)^2} - \frac{1}{L\,C}}\\ \beta_2 &= -\frac{1}{2\,R_3\,C} - \sqrt{\frac{1}{(2\,R_3\,C)^2} - \frac{1}{L\,C}}\end{aligned}$$

Dado que $1/(2\,R_3\,C)^2 - 1/(L\,C) < 0$ podemos escrever:

$$\begin{aligned}\beta_1 &= -\frac{1}{2\,R_3\,C} + j\,\sqrt{\frac{1}{L\,C} - \frac{1}{(2\,R_3\,C)^2}}\\ \beta_2 &= -\frac{1}{2\,R_3\,C} - j\,\sqrt{\frac{1}{L\,C} - \frac{1}{(2\,R_3\,C)^2}}\end{aligned}$$

As constantes α_1 e α_2 são determinadas através das condições iniciais do circuito (ver figura 3), ou seja,

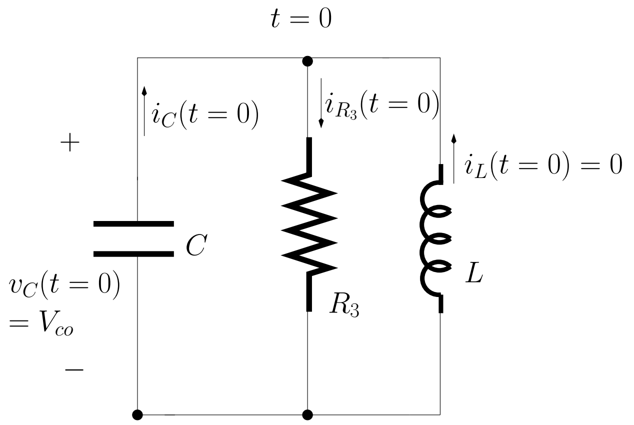

Figura 3:

$$\begin{aligned}v_C(t=0) &= V_{co} = 5 \text{ V} &(5)\\ v_{R_3}(t=0) &= v_C(t=0)\\ i_L(t=0) &= 0\\ i_{R_3}(t=0) &= i_C(t=0) + \underbrace{i_L(t=0)}_{=\,0} &(6)\end{aligned}$$

Usando as equações 4, 5 e 6 podemos escrever o seguinte sistema de equações:

$$\left\{\begin{array}{c}\alpha_1 + \alpha_2 = V_{co}\\ \\ -C\,(\alpha_1\,\beta_1 + \alpha_2\,\beta_1) = \frac{V_{co}}{R_3}\end{array}\right. \qquad (7)$$

resolvendo este sistema obtemos

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{V_{co}}{2}$$

A equção 4 pode ser escrita da seguinte forma:

$$v_C(t) = V_{co}\ e^{\frac{-t}{2\,R_3\,C}}\ \cos\left(\sqrt{\frac{1}{L\,C} - \frac{1}{(2\,R_3\,C)^2}}\ t\right), \qquad 0 \le t < t_o \quad (8)$$

Dado que $1/(2\,R_3\,C)^2 << 1/(L\,C)$ podemos escrever

$$v_C(t) \simeq V_{co}\ e^{\frac{-t}{2\,R_3\,C}}\ \cos\left(\frac{1}{\sqrt{L\,C}}\ t\right), \qquad 0 \leq t < t_o \tag{9}$$

A tensão no condensador para $t = t_o^-$ é dada por:

$$\begin{aligned} V'_{co} &= v_C(t = t_o^-) \\ &= -2.4 \text{ V} \end{aligned} \tag{10}$$

(b) A corrente que flui pela bobina, $i_L(t)$, é dada por:

$$\begin{aligned} i_L(t) &= -\frac{1}{L}\int_0^t v_C(t)\,dt + i_L(t=0) \\ &= \frac{2\,R_3\,C\,V_{co}}{L + 4\,R_3^2\,C} e^{\frac{-t}{2\,R_3\,C}}\ \cos\left(\frac{1}{\sqrt{L\,C}}\ t\right) \\ &- \frac{2\,R_3\,C\,V_{co}}{L + 4\,R_3^2\,C}\left[\frac{2\,R_3\,C}{\sqrt{L\,C}}\ e^{\frac{-t}{2\,R_3\,C}}\ \sin\left(\frac{1}{\sqrt{L\,C}}\ t\right) + 1\right], \qquad 0 \leq t < t_o \end{aligned}$$

A corrente na bobina para $t = t_o^-$ é dada por:

$$\begin{aligned} I'_{lo} &= i_L(t = t_o^-) \\ &= -69.7 \text{ mA} \end{aligned} \tag{11}$$

(c) A tensão aos terminais da resistência R_3, $v_{R_3}(t) = v_C(t)$.

3. A figura 4 mostra o circuito equivalente para $t \geq t_o$. Dado que o

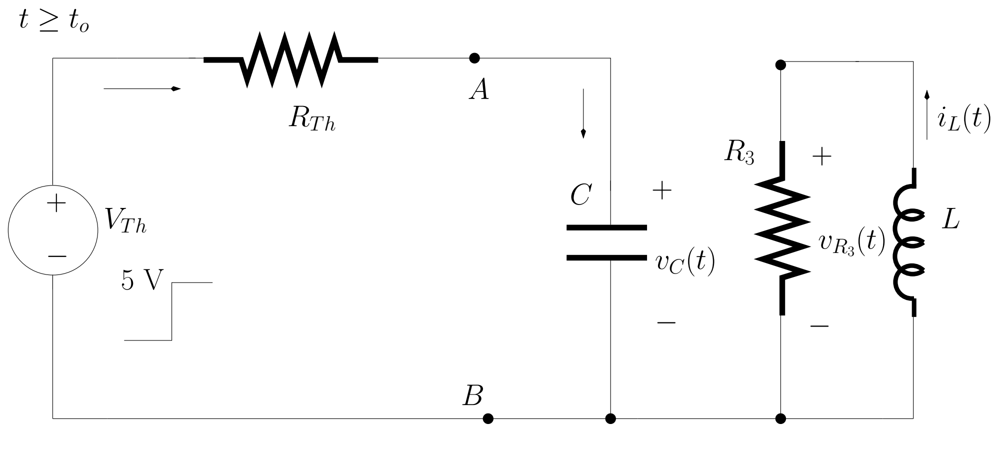

Figura 4: *Circuito equivalente para $t \geq t_o$.*

interruptor retorna à posição 1, esta situação é equivalente à aplicação de um degrau de tensão (V_{Th}) a um circuito RC equivalente (ver figura 5) formado pelo condensador e pela resistência equivalente de Thévenin R_{Th}.

$$
\begin{aligned}
V_{Th} &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_s \\
&= 5 \text{ V} \\
R_{Th} &= \frac{R_1\, R_2}{R_1 + R_2} \\
&= 250\ \Omega
\end{aligned}
$$

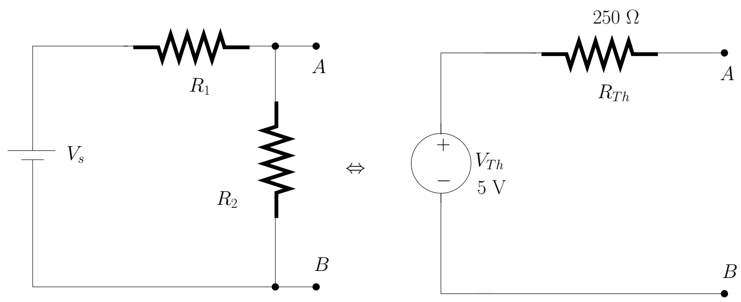

Figura 5:

(a) Para o circuito da figura 4 podemos escrever:

$$
\frac{V_{Th} - V_C(t)}{R_{Th}} = C\, \frac{d\, v_C(t)}{dt}\,, \qquad t \geq t_o
$$

ou seja

$$
R_{Th}\, C\, \frac{d\, v_C(t)}{dt} + v_C(t) = V_{Th}\,, \qquad t \geq t_o
$$

Esta equação tem como solução a soma da solução particular com a solução da equação homogénea:

$$
v_C(t) = V_{Th} + \alpha\, e^{-\frac{t-t_o}{R_{Th}\, C}}\,, \qquad t \geq t_o \tag{12}
$$

α é determinada através das condições iniciais do circuito: $v_C(t = t_o) = V'_{co}$

$$
\alpha = V'_{co} - V_{Th}
$$

(b) A bobina está agora ligada apenas à resistência R_3 e a energia armazenada ($t = t_o$) correspondente a $1/2\, L\, I_{lo}'^2$ vai ser dissipada nesta resistência. A corrente $i_L(t)$ é dada por:

$$\begin{aligned} i_L(t) &= I_{lo}'\, e^{-t/\tau}\,, \qquad t \geq t_o \\ \tau &= \frac{L}{R_3} \\ &= 2\ \mu\text{s} \end{aligned}$$

(c) A tensão aos terminais da resistência R_3, $v_{R_3}(t)$ é dada por:

$$v_{R_3}(t) = R_3\, I_{lo}'\, e^{-t/\tau}\,, \qquad t \geq t_o \tag{13}$$

4. Caso a resistência seja muito elevada (circuito aberto) então, pela eq. 13, teriamos uma tensão muito elevada a desenvolver-se aos terminais da bobina a qual, numa situção real, provocaria um 'arco eléctrico'.

As figuras 6 e 7 mostram $v_C(t)$ e $i_L(t)$ em função do tempo[1]. Note que para $t \geq t_o$ o condensador volta a carregar e volta a suportar uma tensão de 5 V aos seu terminais enquanto que a resistência R_3 rapidamente dissipa a energia que a bobina tinha disponível em $t = t_o$. Tal é esperado dado o valor reduzido da constante de tempo L/R_3.

[1]Não era pedido no enunciado!

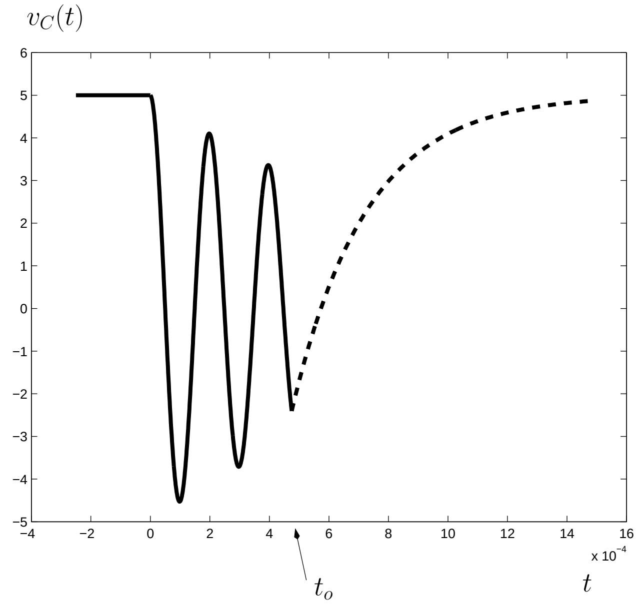

Figura 6:

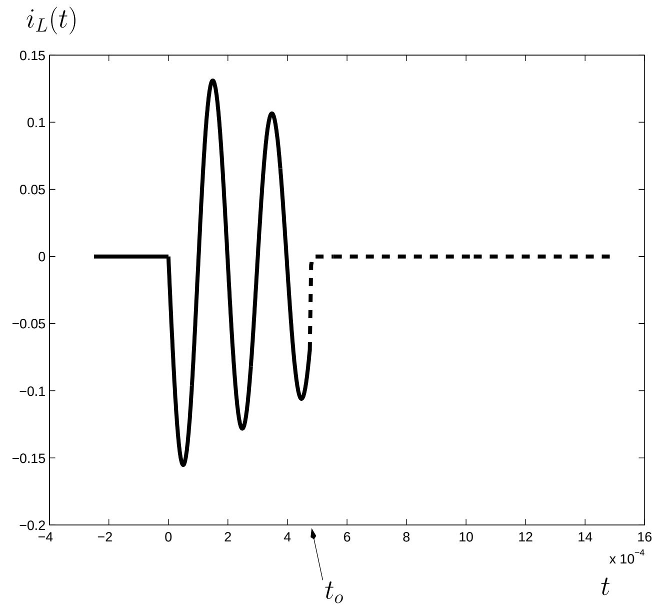

Figura 7: