Resolução do exame de Análise de Circuitos

(época de recurso)

7/Fev/2006

---

1. Em relação ao Nó A podemos escrever que:

$$I_S + I_{R_1} = I_{R_1} \quad \Leftrightarrow \quad I_S = 0 \tag{1}$$

Dado que não flui nenhuma corrente em R_4 então não há queda de

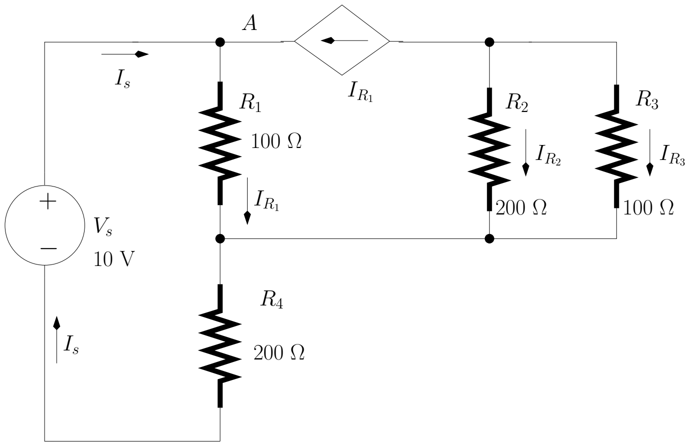

Figura 1:

tensão aos terminais desta resistência, o que implica que V_s está aplicada aos terminais de R_1:

$$\begin{aligned} I_{R_1} &= \frac{V_s}{R_1} \\ &= 100 \text{ mA} \end{aligned}$$

As correntes em R_2 e em R_3 podem ser calculadas da seguinte forma (divisor de corrente):

$$\begin{aligned} I_{R_2} &= -I_{R_1} \frac{R_3}{R_2 + R_3} \\ &= -33.3 \text{ mA} \\ I_{R_3} &= -I_{R_1} \frac{R_2}{R_2 + R_3} \\ &= -66.7 \text{ mA} \end{aligned}$$

As potências dissipadas são:

$$\begin{aligned}
P_{R_1} &= I_{R_1}^2\, R_1 \\
&= 1\ \text{W} \\
P_{R_2} &= I_{R_2}^2\, R_2 \\
&= 221.8\ \text{mW} \\
P_{R_3} &= I_{R_3}^2\, R_3 \\
&= 444.9\ \text{mW} \\
P_{R_4} &= I_{R_4}^2\, R_4 \\
&= 0\ \text{W}
\end{aligned}$$

2. A figura 2 a) mostra o circuito equivalente para o cálculo de Y_{11} e Y_{21}

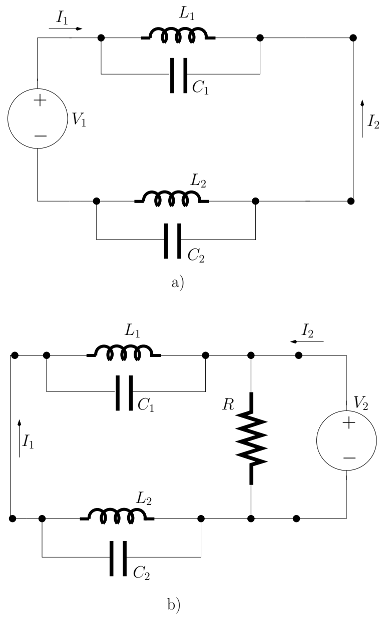

Figura 2:

$$\begin{aligned}
Y_{11} &= \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0} \\
Y_{21} &= \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0}
\end{aligned}$$

Para este circuito podemos escrever que que

$$\begin{aligned}
I_2 &= -I_1 \\
I_1 &= \frac{V_1}{Z_{L1||C_1} + Z_{L2||C_2}}
\end{aligned}$$

em que

$$
\begin{aligned}
Z_{L1||C_1} &= (j\,2\,\pi\,f\,L_1)||\frac{1}{j\,2\,\pi\,f\,C_1}\ , \qquad \text{para } f = 10 \text{ kHz} \\
&= -j\,182.2\ \Omega \\
Z_{L2||C_2} &= (j\,2\,\pi\,f\,L_2)||\frac{1}{j\,2\,\pi\,f\,C_2}\ , \qquad \text{para } f = 10 \text{ kHz} \\
&= -j\,182.2\ \Omega
\end{aligned}
$$

Ou seja,

$$
\begin{aligned}
Y_{11} &= \frac{1}{Z_{L1||C_1} + Z_{L2||C_2}} \\
&= j\,2.74 \text{ mS} \\
Y_{21} &= \frac{-1}{Z_{L1||C_1} + Z_{L2||C_2}} \\
&= -j\,2.74 \text{ mS}
\end{aligned}
$$

A figura 2 a) mostra o circuito equivalente para o cálculo de Y_{12} e Y_{22}

$$
\begin{aligned}
Y_{12} &= \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{V_1=0} \\
Y_{22} &= \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1=0}
\end{aligned}
$$

Para este circuito podemos escrever:

$$
I_1 = \frac{-V_2}{Z_{L1||C_1} + Z_{L2||C_2}}
$$

e que

$$
\frac{I_2}{V_2} = \frac{1}{R} + \frac{1}{Z_{L1||C_1} + Z_{L2||C_2}}
$$

ou seja

$$
\begin{aligned}
Y_{12} &= \frac{-1}{Z_{L1||C_1} + Z_{L2||C_2}} \\
&= -j\,2.74 \text{ mS} \\
Y_{22} &= \frac{1}{R} + \frac{1}{Z_{L1||C_1} + Z_{L2||C_2}} \\
&= 1 + j\,2.74 \text{ mS}
\end{aligned}
$$

3. A figura 3 a) mostra o circuito equivalente para o cálculo de $v_C(t)$ para $0 \leq t < t_1$.

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t I_s\, dt = \frac{I_s\ t}{C}\ , \qquad 0 \leq t < t_1$$

Para $t = t_1$, $v_C(t = t_1) = 1$ V. Para $t_1 \leq t < t_2$ $v_C(t) = 1$ V.

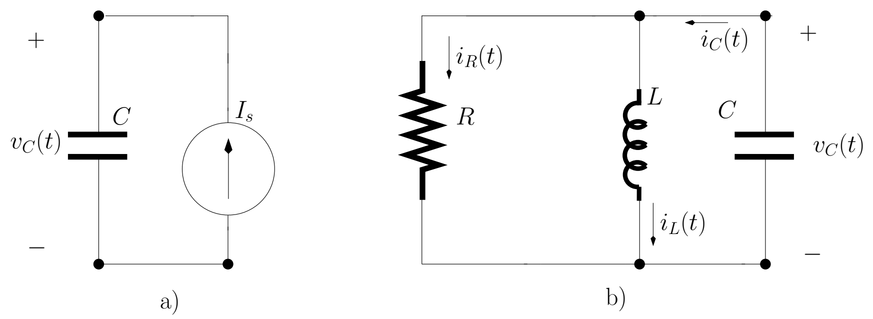

Figura 3:

A figura 3 b) mostra o circuito equivalente para o cálculo de $v_C(t)$ para $t \geq t_2$

$$i_C(t) = i_R(t) + i_L(t)\ , \qquad t \geq t_2 \tag{2}$$

Fazendo a transformação de variável

$$t' = t - t_2 \tag{3}$$

podemos escrever a equação 2 da seguinte forma:

$$i_C(t') = i_R(t') + i_L(t')\ , \qquad t' \geq 0 \tag{4}$$

Usando transformadas de Laplace a equação anterior é escrita da seguinte maneira:

$$-s\, C\, V_C(s) + C\, V_{co} = \frac{V_C(s)}{s\, L} + \frac{V_C(s)}{R} \tag{5}$$

em que $V_{co} = v_C(t = t_1) = v_C(t = t_2) = 1$ V. Resolvendo a eq. anterior em ordem a $V_C(s)$ temos:

$$V_C(s) \ = \ V_{co}\, \frac{s\, L\, C}{s^2\, R\ L\, C + s\, L + R} \tag{6}$$

Dado que $1/(2\,R\,C)^2 - 1/(L\,C) < 0$ a resposta do circuito é sub-amortecida. Usando a transformada inversa da eq. 6 temos:

$$v_C(t') \;=\; V_{co}\; e^{-\frac{t'}{2\,R\,C}}\;\cos\left(\sqrt{\frac{1}{L\,C}-\frac{1}{(2\,R\,C)^2}}\;t'\right)\;, \qquad t' \geq 0 \quad (7)$$

Usando a equação 3 podemos agora escrever:

$$\begin{aligned} v_C(t) \;&=\; V_{co}\; e^{-\frac{t-t_2}{2\,R\,C}}\;\cos\left(\sqrt{\frac{1}{L\,C}-\frac{1}{(2\,R\,C)^2}}\;(t-t_2)\right)\;, \qquad t \geq t_2 \\ v_C(t) \;&=\; e^{-125\,(t-t_2)}\;\cos\left(7070\,(t-t_2)\right)\;, \qquad t \geq t_2 \qquad (8) \end{aligned}$$

A figura 4 mostra[1] $v_C(t)$

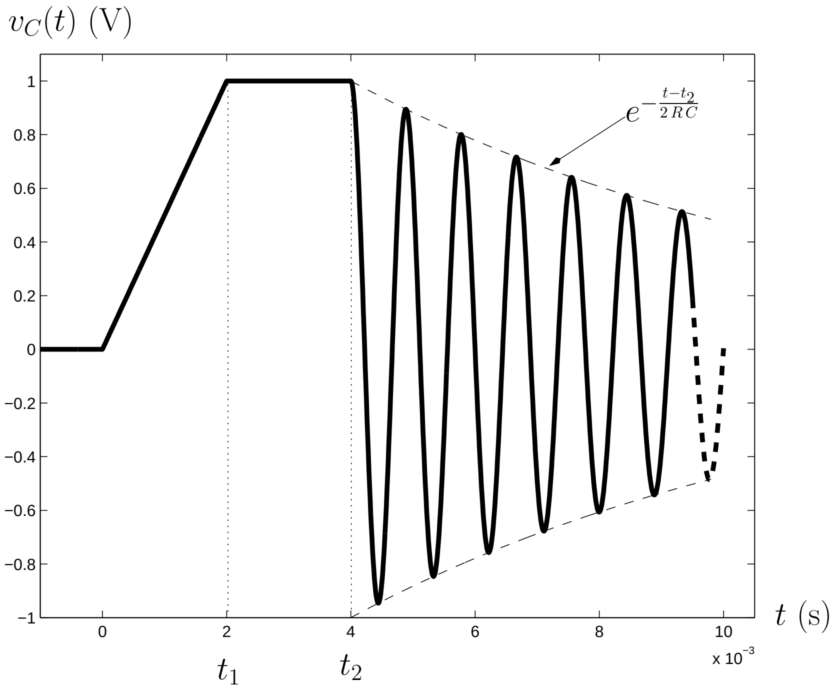

Figura 4:

A potência instantânea fornecida pela fonte de corrente constante pode ser calculada da seguinte forma:

$$p_s(t) = I_s\, v_s(t)$$

[1] Não é pedido no exame!

em que $v_s(t)$ representa a tensão aos terminais da fonte de corrente. A fonte de corrente apenas fornece potência quando está a carregar o condensador entre $t = 0$ e $t = t_1$ ou seja

$$p_s(t) = \frac{I_s^2\ t}{C}\ , \qquad 0 \leq t < t_1$$

A figura 5 mostra $p_s(t)$. A potência fornecida pela fonte no intervalo

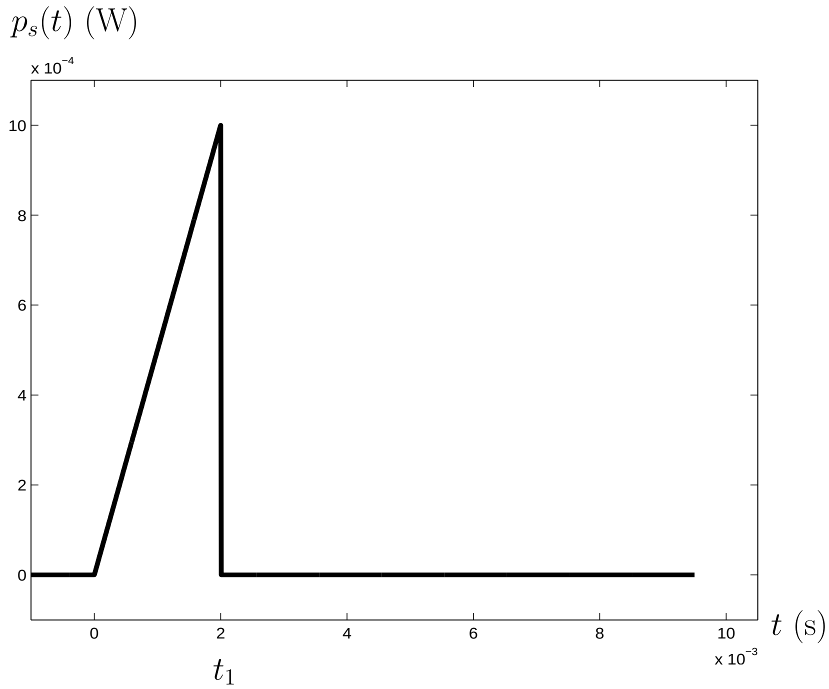

Figura 5:

de tempo $[0, t_1]$ é:

$$\begin{aligned} P_s &= \frac{1}{t_1}\int_0^{t_1} \frac{I_s^2\ t}{C}\, dt \\ &= \frac{I_s^2\ t_1}{2\,C} \\ &= 0.5\ \text{mW} \end{aligned}$$

Esta potência é a mesma que é dissipada pela resistência durante a resposta natural do circuito RLC.

4. Esta pergunta faz parte da preparação do trabalho prático **Circuitos RLC em regime sinusoidal permanente**. Ver Caderno de Laboratório 2005/06.