Resolução do exame de Análise de Circuitos

(época normal)

17/Jan/2006

1. A figura 1 b) mostra o circuito equivalente para o cálculo da impedância equivalente de Thévenin entre os pontos A e B. Note que a fonte de

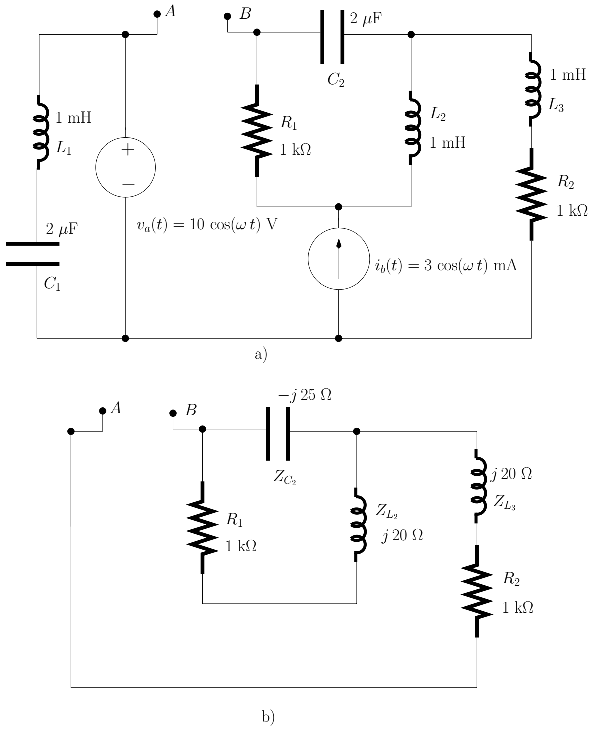

Figura 1:

tensão foi substituida por um curto-circuito e que a fonte de corrente foi susbtituida por um circuito aberto.

$$\begin{aligned} Z_{Th} &= Z_{L_3} + R_2 + \Big[(Z_{L_2} + R_1) || Z_{C_2} \Big] \\ &\simeq 10^3 - j\,5 \ \ \Omega \end{aligned}$$

Para que haja máxima transferência de potência, $Z_L = Z_{Th}^* = 10^3 + j\,5\ \ \Omega$, ou seja, Z_L é constituída pela série de uma resistência de 1 kΩ com uma bobina com um valor:

$$\begin{aligned} L &= \frac{2}{20 \times 10^3} \\ &= 0.25 \ \ \mathrm{mH} \end{aligned}$$

2. A figura 2 a) mostra o circuito equivalente para o cálculo de Z_{11} e Z_{21}

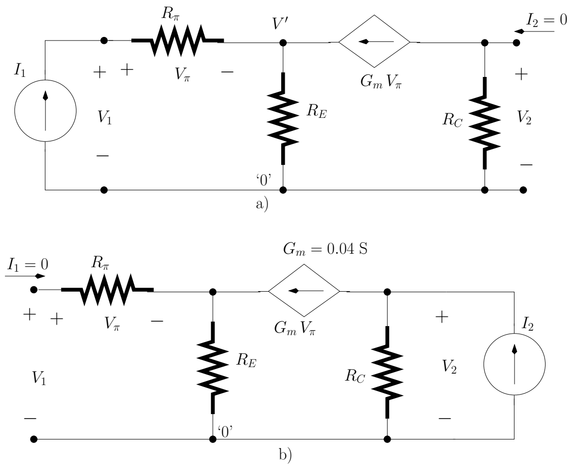

Figura 2:

$$
\begin{aligned}
Z_{11} &= \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0} \\
Z_{21} &= \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0}
\end{aligned}
$$

Para este circuito podemos escrever:

$$
\begin{aligned}
V_1 &= V_\pi + V' \\
&= V_\pi + R_E \left(G_m V_\pi + \frac{V_\pi}{R_\pi} \right) \qquad (1) \\
V_2 &= -G_m V_\pi R_C \qquad (2)
\end{aligned}
$$

e ainda

$$V_\pi = R_\pi I_1 \qquad (3)$$

Substituindo (3) em (1) e em (2) temos

$$
\begin{aligned}
V_1 &= I_1 R_\pi + R_E I_1 (G_m R_\pi + 1) \qquad (4) \\
V_2 &= -G_m I_1 R_\pi R_C \qquad (5)
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
Z_{11} &= \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0} = R_\pi + R_E (G_m R_\pi + 1) = 10.1 \ \text{k}\Omega \\
Z_{21} &= \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0} = G_m R_\pi R_C = 80 \ \text{k}\Omega
\end{aligned}
$$

A figura 2 b) mostra o circuito equivalente para o cálculo de Z_{12} e Z_{22}:

$$\begin{aligned} Z_{12} &= \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0} \\ Z_{22} &= \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0} \end{aligned}$$

Dado que não flui corrente em R_π então $V_\pi = 0$ e a fonte de corrente controlada por V_π é um circuito aberto. Assim temos que:

$$\begin{aligned} Z_{12} &= \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0} = 0 \\ Z_{22} &= \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0} = R_C = 1\ \text{k}\Omega \end{aligned}$$

3. Dado que a piscina comporta 42 metros cúbicos de água e dado que o caudal é de 6 metros cúbicos, o tempo que esta demora a encher é de 7 horas (42/6), ou seja, $7 \times 3600 = 25200$ segundos. O condensador deverá demorar $T = 25200$ segundos para carregar até aos 10 Volts quando o interruptor for fechado.

   A tensão aos terminais do condensador para $t < 0$ é dada por:

$$\begin{aligned} V_{co} &= \sqrt{\frac{2\,E}{C}} \\ &= 2\ \text{V} \end{aligned}$$

   A figura 3 mostra o circuito equivalente para $t \geq 0$. Para este circuito,

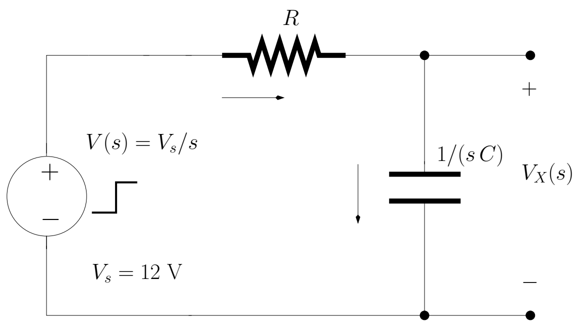

Figura 3:

   e usando transformadas de Laplace, podemos escrever:

$$\frac{V(s) - V_X(s)}{R} = s\,C\,V_X(s) - C\,V_{co}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} V_X(s) &= \frac{V(s)}{1+R\,C\,s} + \frac{R\,C\,V_{co}}{1+R\,C\,s} \\ &= \frac{V_s}{s\,(1+R\,C\,s)} + \frac{R\,C\,V_{co}}{1+R\,C\,s} \end{aligned}$$

Calculando a transformada inversa de Laplace da expressão anterior obtemos:

$$\begin{aligned} v_X(t) &= V_s\left(1-e^{-t/\tau}\right) + V_{co}\,e^{-t/\tau} \quad t \geq 0 \\ &= V_s - (V_s - V_{co})\,e^{-t/\tau} \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

em que $\tau = R\,C$.

Para $t = T = 25200$ segundos temos que $v_X(t=T) = 10$ V, ou seja,

$$v_X(T) = V_s - (V_s - V_{co})\,e^{-T/\tau}$$

Resolvendo esta equação em ordem a τ temos

$$\tau = \frac{T}{\ln\left(\frac{V_s - V_{co}}{V_s - v_X(T)}\right)}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} R &= \frac{T}{C\,\ln\left(\frac{V_s - V_{co}}{V_s - v_X(T)}\right)} \\ &= 10.4\ \text{k}\Omega \end{aligned}$$

A figura 4 mostra[1] a tensão $v_X(t)$ em função do tempo.

[1] Não é pedido no exame.

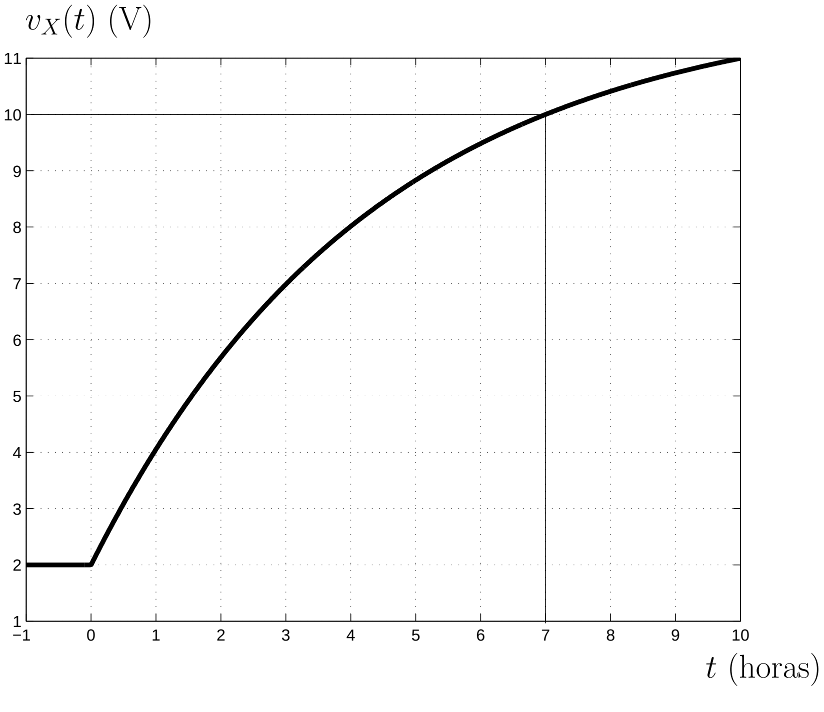

Figura 4: