MODELAÇÃO E REPRESENTAÇÃO MATEMÁTICA DE SISTEMAS

OUTROS SISTEMAS*

- Juros e amortizações (evolução de um depósito bancário)

  - SLIT discreto.
  - Equação com diferenças.

- Lei da oferta e da procura

  - Preço aumenta pela escassez da oferta.
  - Excesso da oferta faz diminuir o preço.
  - No equilíbrio a oferta é igual à procura.
  - Evolução do preço até se atingir o ponto de equilíbrio – SLIT.

---

* Maria Isabel Ribeiro, “Análise de Sistemas Lineares”, IST Press, Março 2002

MODELAÇÃO E REPRESENTAÇÃO MATEMÁTICA DE SISTEMAS

OUTROS SISTEMAS*

- Dinâmica de populações

  - Isoladas (natalidade e mortalidade dos indivíduos).
  - Interactuando (presas e predadores).
  - Estudos para controlar o número de gaivotas nas Berlengas.

- Modelo cinemático de um robot móvel

  - Sistema estocástico.
  - Modelo discretizado com um dado intervalo de amostragem.
  - Termo aleatório (função densidade de probabilidade) que condensa a parte da incerteza da modelação.
  - Estimativa da posição com uma medida da incerteza.

---

* Maria Isabel Ribeiro, “Análise de Sistemas Lineares”, IST Press, Março 2002

MODELAÇÃO E REPRESENTAÇÃO MATEMÁTICA DE SISTEMAS

FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

MODELOS:

SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE COEFICIENTES CONSTANTES

Seja:

$$a_0 y(t)^{(n)} + a_1 y(t)^{(n-1)} + \ldots + a_{n-2}\,\ddot{y}(t) + a_{n-1}\,\dot{y}(t) + a_n y(t) = \ldots$$

$$b_0 r(t)^{(m)} + b_1 r(t)^{(m-1)} + \ldots + b_{m-2}\,\ddot{r}(t) + b_{m-1}\,\dot{r}(t) + b_m r(t)$$

MODELAÇÃO E REPRESENTAÇÃO MATEMÁTICA DE SISTEMAS

FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

$$a_0 y(t)^{(n)} + a_1 y(t)^{(n-1)} + \ldots + a_{n-2} \ddot{y}(t) + a_{n-1} \dot{y}(t) + a_n y(t) = \ldots$$

$$b_0 r(t)^{(m)} + b_1 r(t)^{(m-1)} + \ldots + b_{m-2} \ddot{r}(t) + b_{m-1} \dot{r}(t) + b_m r(t)$$

TRANSFORMADA DE LAPLACE DE AMBOS OS MEMBROS:

$$a_0 s^n Y(s) + a_1 s^{n-1} Y(s) + \ldots + a_{n-2} s^2 Y(s) + a_{n-1} s Y(s) + a_n Y(s) =$$

$$= b_0 s^m R(s) + b_1 s^{m-1} R(s) + \ldots + b_{m-2} s^2 R(s) + b_{m-1} s R(s) + b_m R(s)$$

DEFINIÇÃO:

A função de transferência: de um SLIT contínuo é a razão entre a transformada de Laplace da saída $Y(s)$ e a transformada de Laplace da entrada $R(s)$, considerando-se a hipótese de condições iniciais nulas.

MODELAÇÃO E REPRESENTAÇÃO MATEMÁTICA DE SISTEMAS

FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

$$a_0 s^n Y(s) + a_1 s^{n-1} Y(s) + \ldots + a_{n-2} s^2 Y(s) + a_{n-1} s Y(s) + a_n Y(s) =$$
$$= b_0 s^m R(s) + b_1 s^{m-1} R(s) + \ldots + b_{m-2} s^2 R(s) + b_{m-1} s R(s) + b_m R(s)$$

DEFINIÇÃO:

A função de transferência: de um SLIT contínuo é a razão entre a transformada de Laplace da saída $Y(s)$ e a transformada de Laplace da entrada $R(s)$, considerando-se a hipótese de condições iniciais nulas.

Função de transferência:

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-2} s^2 + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-2} s^2 + a_{n-1} s + a_n}}$$

MODELAÇÃO E REPRESENTAÇÃO MATEMÁTICA DE SISTEMAS

FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-2} s^2 + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-2} s^2 + a_{n-1} s + a_n}}$$

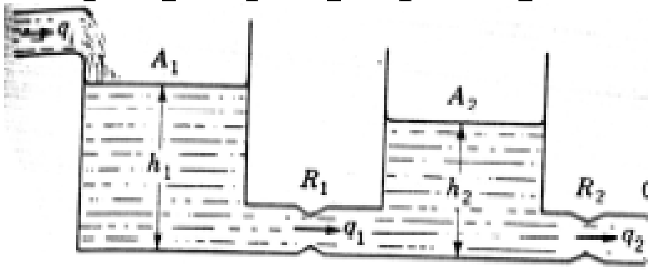
- Função racional complexa de variável complexa.
- Análise algébrica em vez de diferencial.
- Não depende da evolução da entrada nem das condições iniciais.
- Caracteriza um SLIT do ponto de vista de entrada-saída.
- Ordem n denomina-se ordem do SLIT.
- Avaliação da função de transferência perturbando o sistema.
- Pólos do sistema: raizes do polinómo $D(s)$.
- Zeros do sistema: raízes do polinómio $N(s)$.

MODELAÇÃO E REPRESENTAÇÃO MATEMÁTICA DE SISTEMAS

FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

Exemplo: 2 reservatórios que comunicam, com os seguintes parâmetros:

$q_i(t)$, $q_1(t)$, $q_2(t)$, R_1, R_2, A_1, A_2, $h_1(t)$, $h_2(t)$



… concluiu-se que:

$$q_i = \frac{h_1 - h_2}{R_1} + A_1 \dot{h}_1$$

$$\frac{h_1 - h_2}{R_1} = \frac{h_2}{R_2} + A_2 \dot{h}_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1 \dot{h}_1 + \dfrac{1}{R_1} h_1 - \dfrac{1}{R_1} h_2 = q_i \\ -\dfrac{1}{R_1} h_1 + A_2 \dot{h}_2 + \left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} \right) h_2 = 0 \end{cases}$$

Defina-se:

- ***q_i* – entrada do sistema**
- ***h_2* – saída do sistema**

Pretende-se:

$$G(s) = \frac{H_2(s)}{Q_i(s)}$$

MODELAÇÃO E REPRESENTAÇÃO MATEMÁTICA DE SISTEMAS

FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

$$\begin{cases} A_1 \dot{h}_1 + \dfrac{1}{R_1} h_1 - \dfrac{1}{R_1} h_2 = q_i \\ -\dfrac{1}{R_1} h_1 + A_2 \dot{h}_2 + \left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} \right) h_2 = 0 \end{cases}$$

Aplique-se a transformada de Laplace …

$$\begin{cases} A_1 s H_1(s) + \dfrac{1}{R_1} H_1(s) - \dfrac{1}{R_1} H_2(s) = Q_i(s) \\ -\dfrac{1}{R_1} H_1(s) + A_2 s H_2(s) + \left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} \right) H_2(s) = 0 \end{cases}$$

… ou, na forma matricial:

$$\boxed{\begin{bmatrix} A_1 s + \dfrac{1}{R_1} & -\dfrac{1}{R_1} \\ -\dfrac{1}{R_1} & A_2 s + \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1(s) \\ H_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_i(s) \\ 0 \end{bmatrix}}$$

MODELAÇÃO E REPRESENTAÇÃO MATEMÁTICA DE SISTEMAS

FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

$$\boxed{\begin{bmatrix} A_1 s + \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_1} & A_2 s + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1(s) \\ H_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_i(s) \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$G(s) = \frac{H_2(s)}{Q_i(s)}$$

<u>obtém-se resolvendo o sistema em ordem a</u> $H_2(s)$.

$$H_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} A_1 s + \frac{1}{R_1} & Q_i(s) \\ -\frac{1}{R_1} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 s + \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_1} & A_2 s + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \end{vmatrix}} \quad \cdots$$

$$\boxed{G(s) = \frac{H_2(s)}{Q_i(s)} = \frac{R_2}{A_1 A_2 R_1 R_2 s^2 + \left(A_1 R_2 + A_1 R_1 + A_2 R_2\right) s + 1}}$$