MÉTODO DO LUGAR DAS RAÍZES

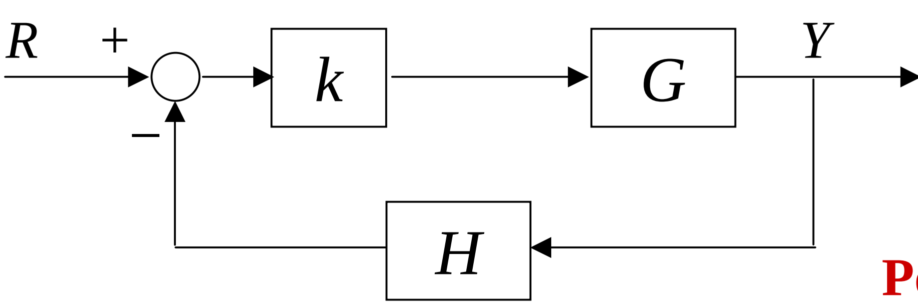
Estabilidade,
desempenho de um sistema.

Posicionamento dos pólos no plano complexo.

Parâmetros do sistema:
***k*, …**

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{kG(s)}{1+kG(s)H(s)}$$

Exemplo, sistema realimentado:



Pólos: s, $1+kG(s)H(s)=0$

$$S \equiv f(k)$$

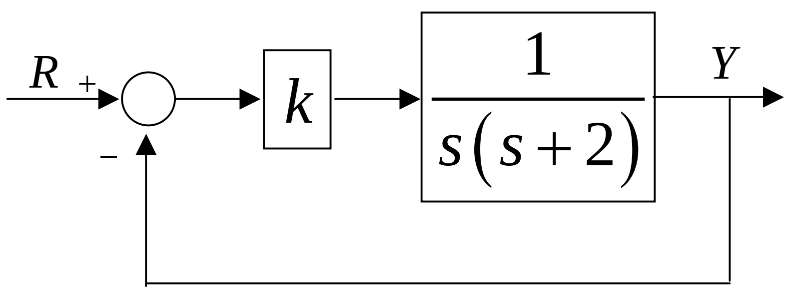
Pólos (no plano complexo) dependem de *k*.

MÉTODO DO LUGAR DAS RAÍZES

MÉTODO DO LUGAR DAS RAÍZES,
ROOT-LOCUS,
DIAGRAMA DE EVANS:

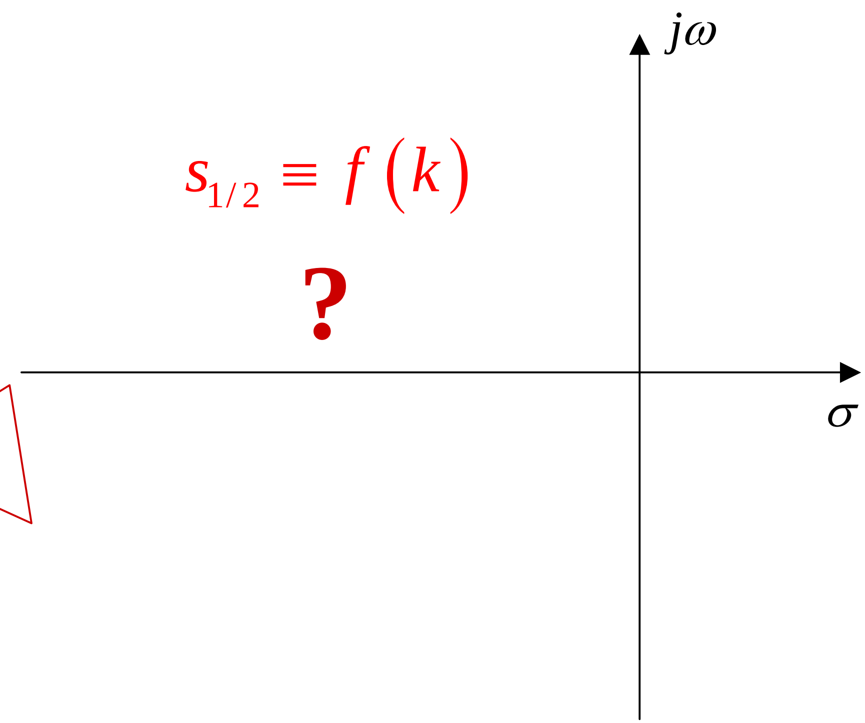
Método de representação gráfica no plano complexo da localização dos pólos em função dum parâmetro *k*.

QUESTÃO: **Quais as posições assumidas pelos pólos do sistema para diferentes valores do ganho *k* >= 0 ?**



$$s_{1/2} \equiv f(k)$$

?

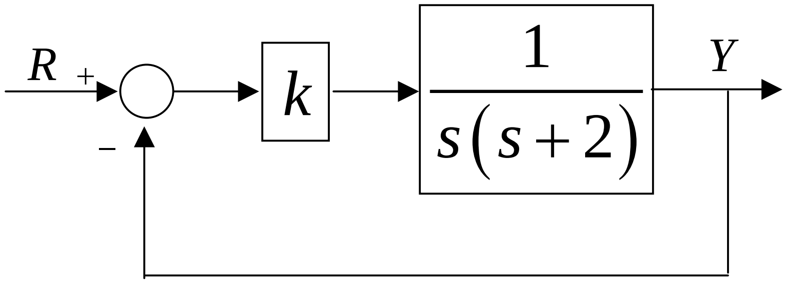


$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k}{s^2 + 2s + k}$$

Pólos: $s^2 + 2s + k = 0$

MÉTODO DO LUGAR DAS RAÍZES

QUESTÃO: **Quais as posições assumidas pelos pólos do sistema para diferentes valores do ganho k >= 0 ?**



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k}{s^2 + 2s + k}$$

... e se $k<0$?

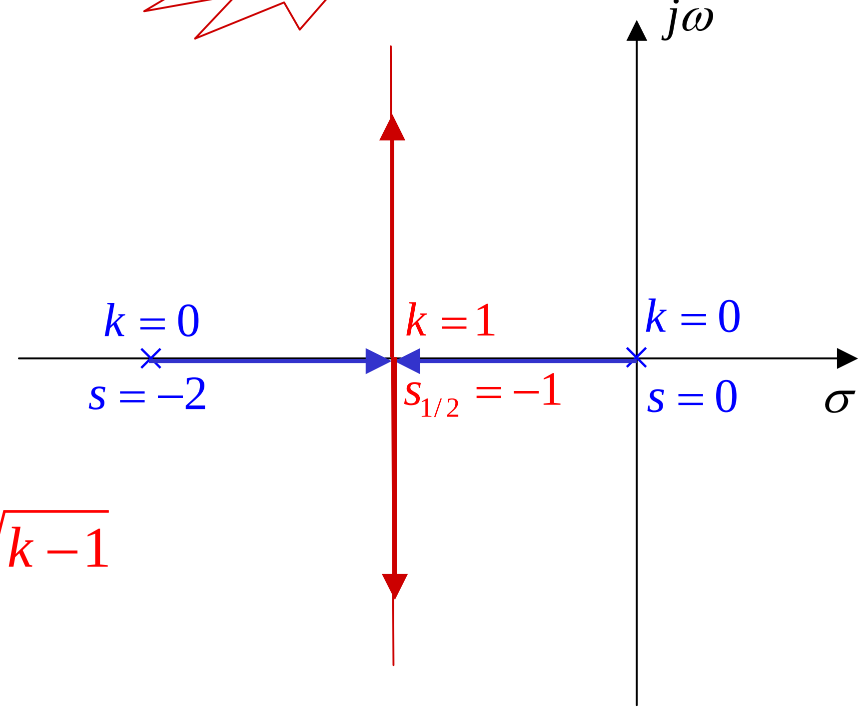
Pólos: $s^2 + 2s + k = 0$

$$s_{1/2} \equiv f(k) = -1 \pm \sqrt{1-k}$$

$$k = 0 \quad \rightarrow \quad s_1 = 0, \quad s_2 = -2$$

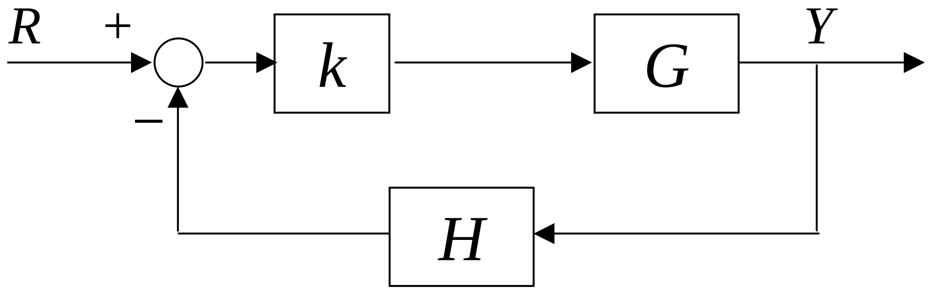
$$k = 1 \quad \rightarrow \quad s_1 = s_2 = -1$$

$$k > 1 \quad \rightarrow \quad s_1 = -1 + j\sqrt{k-1}; \quad s_2 = -1 - j\sqrt{k-1}$$



MÉTODO DO LUGAR DAS RAÍZES

Caso geral:



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{kG(s)}{1+kG(s)H(s)}$$ localização dos pólos (em função de k) tais que: $$1+kG(s)H(s)=0$$

(eq. de variável complexa)

$$\boxed{kG(s)H(s)=-1}$$

CONDIÇÃO DE MÓDULO:

$$\left|kG(s)H(s)\right| = 1$$

CONDIÇÃO DE ANGULO:

$$\sphericalangle kG(s)H(s) = \pi(2h+1), \qquad h \in \mathbb{Z}$$

seja:

$$kG(s)H(s) = k\frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

Função de transferência em malha aberta (*f.t.m.a.*)

então:

$$k = \frac{\prod_{j=1}^{n}\left|s+p_j\right|}{\prod_{i=1}^{m}\left|s+z_i\right|}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sphericalangle(s+z_i) - \sum_{j=1}^{n}\sphericalangle(s+p_j) = \pi(2h+1), \qquad h \in \mathbb{Z}$$

MÉTODO DO LUGAR DAS RAÍZES

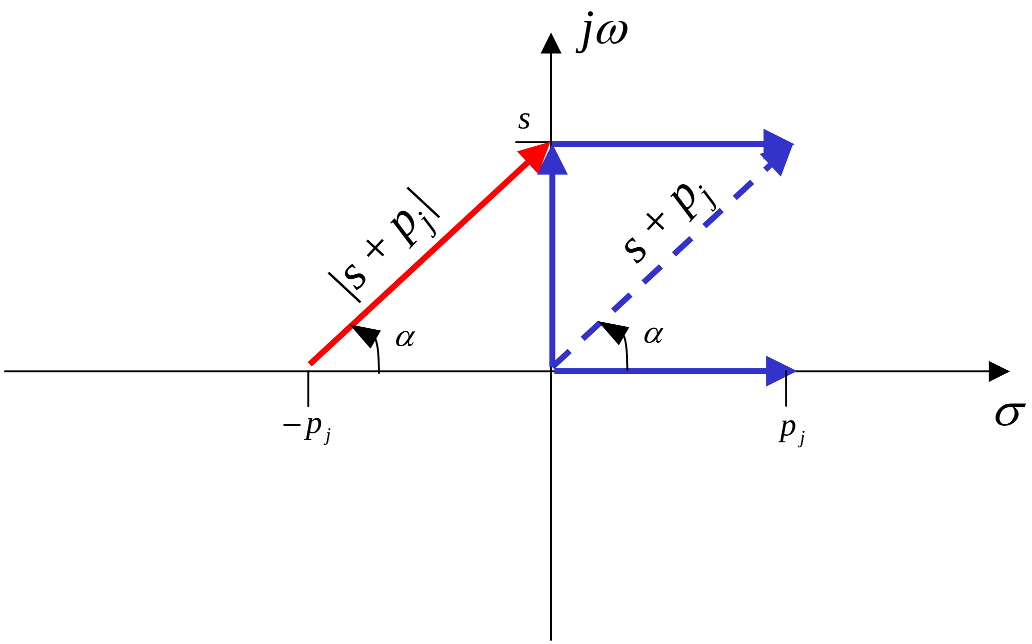
$$kG(s)H(s) = k\frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

Todos os pontos ***s*** pertencentes ao lugar das raízes verificam:

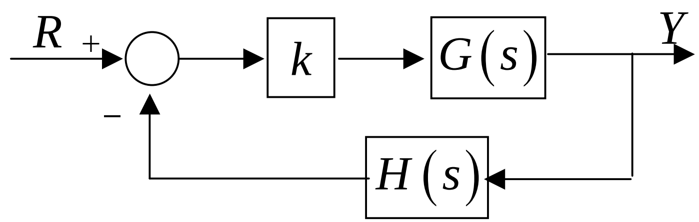
$$\begin{cases} \bullet\ k = \dfrac{\prod_{j=1}^{n}\left|s+p_j\right|}{\prod_{i=1}^{m}\left|s+z_i\right|} \\[2em] \bullet\ \sum_{i=1}^{m}\measuredangle(s+z_i) - \sum_{j=1}^{n}\measuredangle(s+p_j) = \pi(2h+1), \qquad h\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

termo elementar: $(s+p_j)$

Seja ***s***, : $s = j\omega$



MÉTODO DO LUGAR DAS RAÍZES



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{kG(s)}{1+kG(s)H(s)}$$ definindo-se: $G(s) = \dfrac{N_1(s)}{D_1(s)}$, $H(s) = \dfrac{N_2(s)}{D_2(s)}$ então: $$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k\dfrac{N_1}{D_1}}{1+k\dfrac{N_1N_2}{D_1D_2}}$$

Designando-se por: $B(s) = 1 + k\dfrac{N_1N_2}{D_1D_2}$,

então, os pólos do sistema em malha fechada são os zeros de: $B(s) = \dfrac{D_1D_2 + kN_1N_2}{D_1D_2}$

Definiu-se: $grau(N_1N_2) = m$, $\quad grau(D_1D_2) = n > m \quad \Rightarrow$ $B(s)$ **tem *n* zeros!**

***n* PÓLOS DA F.T.M.F. (= nº de pólos da f.t.m.a.)**

REGRA 1:

O diagrama do lugar das raízes é formado por *n* ramos.

MÉTODO DO LUGAR DAS RAÍZES

CONDIÇÃO DE MÓDULO:

$$k = \frac{\prod_{j=1}^{n} |s + p_j|}{\prod_{i=1}^{m} |s + z_i|}$$

Onde começam e onde terminam os ramos?

- Início dos ramos (k=0): $s_j = -p_j$

$$n > m$$

- Fim dos ramos $(k = \infty)$: $\begin{cases} s_i = -z_i \\ s = \infty \end{cases}$

REGRA 2:

Os pontos de partida dos ramos são os n pólos da *f.t.m.a.*, dos quais m terminam nos zeros da *f.t.m.a.* e n-m no infinito.

MÉTODO DO LUGAR DAS RAÍZES

Que partes do eixo *Re* pertencem ao lugar das raízes ?

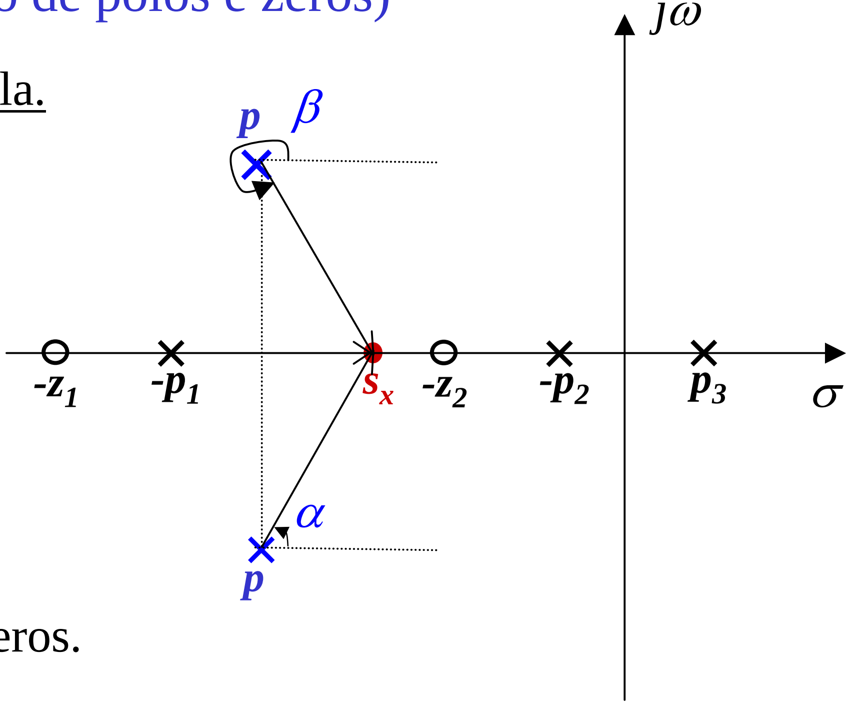
CONDIÇÃO DE ÂNGULO:

$$\sum_{i=1}^{m} \measuredangle(s+z_i) - \sum_{j=1}^{n} \measuredangle(s+p_j) = \pi(2h+1), \qquad h \in \mathbb{Z}$$

Seja s_x um ponto no eixo real: s_x pertence ao lugar das raízes?

(verificação da contribuição de pólos e zeros)

- À esquerda de s_x: $-z_1; \quad -p_1$ contribuição nula.
- Complexos conjugados: p contribuição 2π
- À direita de s_x: $-z_2;\ -p_2;\ p_3$



REGRA 3:

Pertencem ao lugar das raízes todos os segmentos do eixo real que tenham à sua direita um número impar de pólos mais zeros.

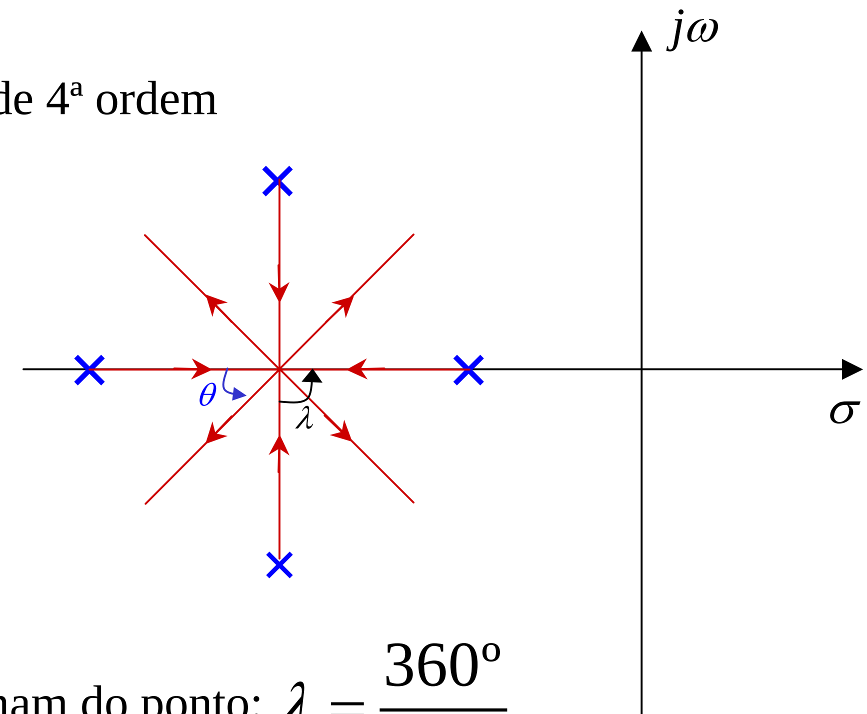
MÉTODO DO LUGAR DAS RAÍZES

REGRA 4:

O lugar das raízes é simétrico em relação ao eixo real.

Quais os ângulos de partida e de chegada ao eixo real?

Exemplo: Sistema de 4ª ordem



α : nº de ramos que se cruzam, $\alpha = 4$

REGRA 5:

- Ângulo entre 2 ramos adjacentes que se aproximam do ponto: $\lambda = \dfrac{360^\circ}{\alpha}$
- Ângulo entre 2 ramos adjacentes um chegando e outro partindo: $\theta = \dfrac{180^\circ}{\alpha}$

MÉTODO DO LUGAR DAS RAÍZES

REGRA 6:

Comportamento assintótico:

Existem *n*-*m* assintotas que interceptam o eixo real em σ_A (centro assintótico) com declives de Φ_A.

$$\sigma_A = \frac{\sum_{j=1}^{n} p_j - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m}$$

$$\Phi_A = \frac{180^{\circ}(1+2h)}{n-m}, \quad h = 0,1,\ldots,n-m-1$$

MÉTODO DO LUGAR DAS RAÍZES

Quais os pontos de entrada e saída do eixo real ?

polinómio característico: $1 + kG(s)H(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad k \equiv f(s) = \dfrac{-1}{G(s)H(s)}$

REGRA 7:

Pontos de entrada e de saída do eixo real.

- Pontos de entrada são mínimos de $f(s)$.
- Pontos de saída são máximos de $f(s)$.

Seja s_i um ponto pertencente ao lugar das raízes. Qual o ganho k correspondente ?

… da condição de módulo: $k = \dfrac{\prod_{j=1}^{n} |s + p_j|}{\prod_{i=1}^{m} |s + z_i|}$

REGRA 8:

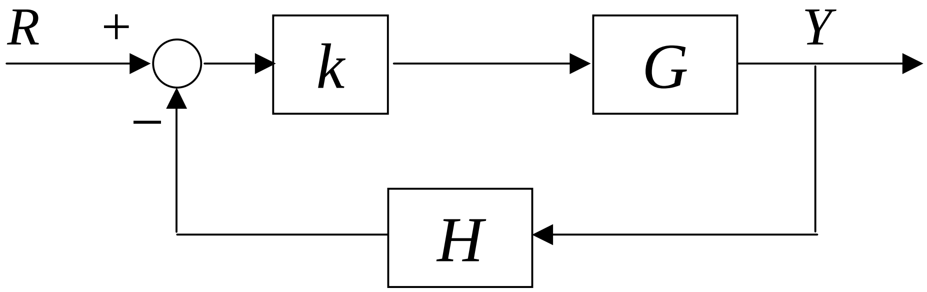
Avaliação geométrica dos ganhos.

$$k(s_i) = \frac{\prod \text{distancia dos polos da f.t.m.a. ao ponto } s_i}{\prod \text{distancia dos zeros da f.t.m.a. ao ponto } s_i}$$

•••

MÉTODO DO LUGAR DAS RAÍZES

Exemplo:



$$G(s) = \frac{4}{s(s+2)}$$

$$H(s) = \frac{s+3}{3}$$

- representação do lugar das raízes.
- tipo de pólos e estudo da estabilidade.