RESPOSTA NO TEMPO

SISTEMA DE 2ª ORDEM

$$G(s) = \frac{a}{s^2 + bs + a}$$

GANHO ESTÁTICO:

Razão entre a saída e a entrada em regime estacionario para entrada constante e unitária.

- Regime estacionário, recurso ao teorema do valor final: $\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} sY(s)$

$$Y(s) = \frac{1}{s} \frac{a}{s^2 + bs + a} \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \to \infty} y(t) = 1$$

$G(s)$ tem ganho estático unitário

RESPOSTA NO TEMPO

SISTEMA DE 2ª ORDEM

$$G(s) = \frac{\omega_n^{\ 2}}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^{\ 2}}$$

ξ - coeficiente de amortecimento; ω_n - frequência natural não amortecida.

RESPOSTA AO DEGRAU:

$$Y(s) = R(s)G(s); \qquad R(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s}\frac{\omega_n^{\ 2}}{(s-p_1)(s-p_2)}; \; p_{1/2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

independentemente do posicionamento dos pólos …

- Valor inicial: $y(0^+) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = 0$
- Valor inicial da 1ª derivada: $\lim_{t\to 0^+} \dot{y}(t) = \lim_{s\to\infty} s\boldsymbol{L}\left\{\dot{y}(t)\right\} = 0$
- Valor final: $\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = 1$

RESPOSTA NO TEMPO

SISTEMA DE 2ª ORDEM

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

ξ - coeficiente de amortecimento; ω_n - frequência natural não amortecida.

RESPOSTA AO DEGRAU:

$$Y(s) = \frac{1}{s}\frac{\omega_n^2}{(s-p_1)(s-p_2)}; \; p_{1/2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

	pólos	$p_{1/2}$	tipo da resposta
$\xi^2 - 1 < 0$	complexos conjugados	$-\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}, \quad 0 \le \xi < 1$	Subamortecida
$\xi^2 - 1 = 0$	real duplo	$-\xi\omega_n, \quad \xi = 1$	criticamente amortecida
$\xi^2 - 1 > 0$	reais simples	$-\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}, \quad \xi > 1$	Sobreamortecida

RESPOSTA NO TEMPO

SISTEMA DE 2ª ORDEM

$$Y(s) = \frac{{\omega_n}^2}{s\left(s^2 + 2\xi\omega_n s + {\omega_n}^2\right)}$$

1 - PÓLOS COMPLEXOS CONJUGADOS: $p_{1/2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}, \quad 0 \leq \xi < 1$

define-se: $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \Rightarrow \quad p_{1/2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_d$

ω_d - frequência das oscilações amortecidas.

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) &= 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\underbrace{e^{-\xi\omega_n t}}_{\text{exponencial decrescente}}\underbrace{\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t + \Phi\right)}_{\text{componente oscilatória}} \\ \Phi &= arctg\,\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \end{aligned}}$$

RESPOSTA NO TEMPO

SISTEMA DE 2ª ORDEM

$$\boxed{\begin{gathered} y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}\, t + \Phi\right) \\ \Phi = arctg \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \end{gathered}}$$

caso particular: $\xi = 0$

$$y(t) = 1 - \sin(\omega_n t + \Phi), \qquad \Phi = \lim_{\xi \to 0} arctg \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{y(t) = 1 - \cos(\omega_n t)}$$

RESPOSTA NO TEMPO - SISTEMA DE 2ª ORDEM

$0<\xi<1$

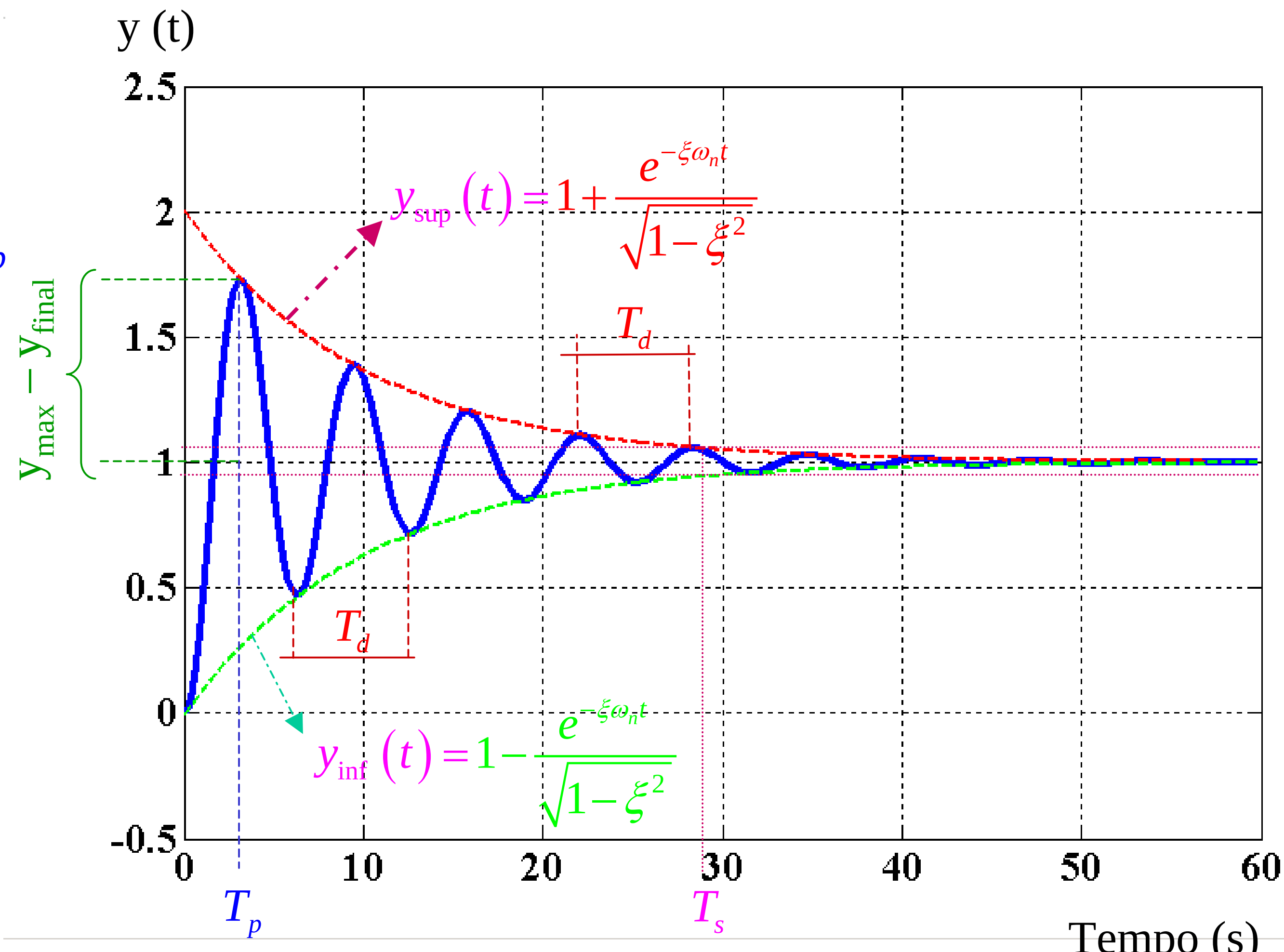
$$y(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t+\Phi\right);\qquad \Phi=arctg\,\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

$$\frac{dy(t)}{dt}=0\quad\Rightarrow\quad t=\frac{n\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}},\qquad n=0,1,\dots\qquad n=1\qquad\Rightarrow T_p=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$T_d=\frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}=2T_p$$

$$S(\%)=100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$T_s(5\%)=\frac{3}{\xi\omega_n}$$



RESPOSTA NO TEMPO - SISTEMA DE 2ª ORDEM

$0 < \xi < 1$

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \Rightarrow \qquad p_{1/2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

Relação entre os critérios e o posicionamento dos pólos no plano complexo

- **Módulo:** $\left|p_{1/2}\right| = \omega_n$

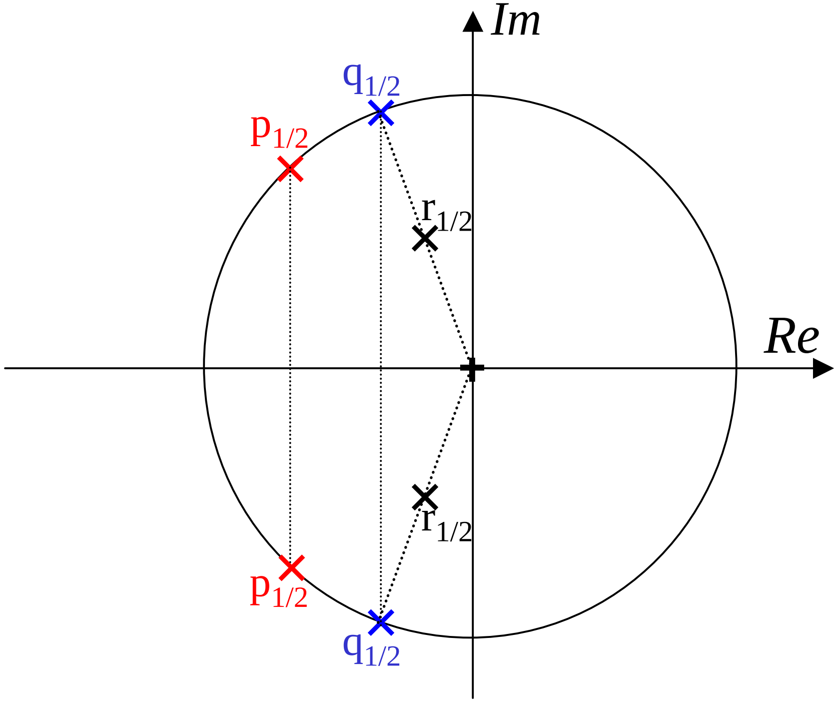
Iguais ω_n situam-se sobre arcos de circunferência centrados na origem, ($p_{1/2}$ e $q_{1/2}$).

- **Argumento:** $\sphericalangle p_{1/2} = -arctg\,\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$

Iguais ξ situam-se sobre a mesma semi-recta tirada da origem ($q_{1/2}$ e $\mathbf{r_{1/2}}$).

$$S(\%) = 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Sobreelevação constante



RESPOSTA NO TEMPO - SISTEMA DE 2ª ORDEM

$0 < \xi < 1$

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \Rightarrow \qquad p_{1/2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

Relação entre os critérios e o posicionamento dos pólos no plano complexo

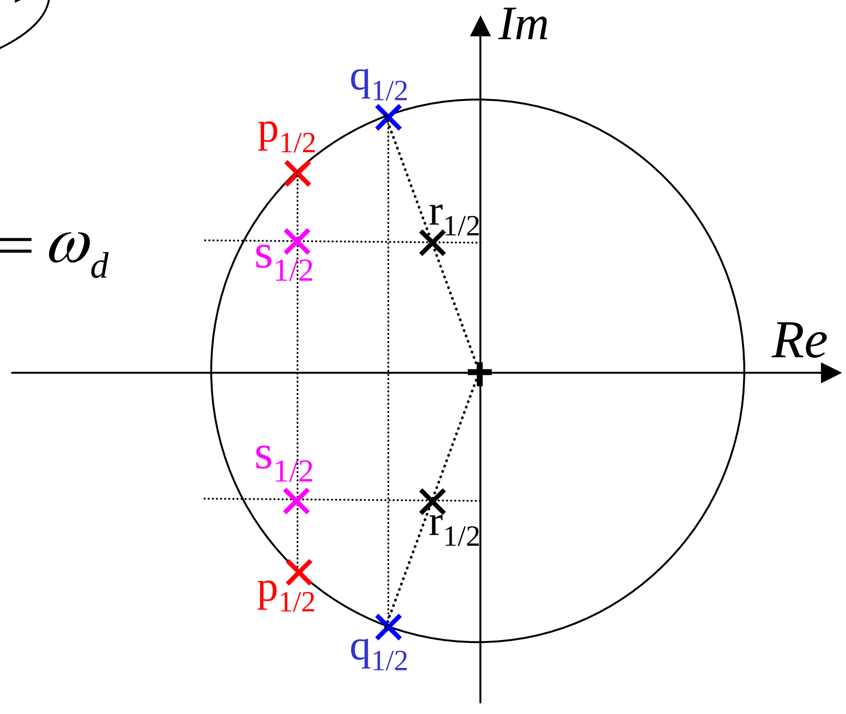
- **Parte real:** $\mathrm{Re}\{p_{1/2}\} = -\xi\omega_n \qquad T_s(5\%) = \frac{3}{\xi\omega_n} \Rightarrow T_s = \frac{3}{\left|\mathrm{Re}\{p_{1/2}\}\right|}$

Iguais *Re*, T_s constante, ($p_{1/2}$, $s_{1/2}$).

- **Parte imaginária:** $\mathrm{Im}\{p_{1/2}\} = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = \omega_d$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \Rightarrow T_p = \frac{\pi}{\mathrm{Im}\{p_{1/2}\}}$$

Iguais *Im*, T_s (e T_d) constante, ($r_{1/2}$, $s_{1/2}$).



RESPOSTA NO TEMPO - SISTEMA DE 2ª ORDEM

$$G(s) = \frac{\omega_n^{\,2}}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^{\,2}}$$

2 - PÓLOS REAIS DUPLOS: $\xi = 1 \Rightarrow \quad p_{1/2} = -\omega_n$

RESPOSTA AO DEGRAU

$$Y(s) = \frac{1}{s}\frac{\omega_n^{\,2}}{(s+\omega_n)^2} \quad \xrightarrow{\mathbf{L}^{-1}} \quad \boxed{y(t) = 1 - e^{-\omega_n t}\left(1 + \omega_n t\right), \qquad t > 0}$$

… crescente com concavidade voltada para baixo.

… ou: $y(t) = \lim\limits_{\xi \to 1} y_{sub}(t)$

$$y(t) = \lim_{\xi \to 1}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t + \Phi\right)\right]; \qquad \Phi = arctg\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

RESPOSTA NO TEMPO - SISTEMA DE 2ª ORDEM

$$G(s)=\frac{\omega_n^{\;2}}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^{\;2}}$$

3 - PÓLOS REAIS DISTINTOS: $\xi>1\Rightarrow\begin{cases}s_1=-\xi\omega_n+\omega_n\sqrt{\xi^2-1}=-p_1\\ s_2=-\xi\omega_n-\omega_n\sqrt{\xi^2-1}=-p_2\end{cases}$

RESPOSTA AO DEGRAU

$$Y(s)=\frac{\omega_n^{\;2}}{s(s+p_1)(s+p_2)}\xrightarrow{\;\mathcal{L}^{-1}\;}y(t)=\frac{\omega_n^{\;2}}{p_1p_2}\left[1+\frac{1}{p_1-p_2}\left(p_2e^{-p_1t}-p_1e^{-p_2t}\right)\right]$$

$$p_1p_2=\omega_n^{\;2}$$

$$p_1-p_2=-2\omega_n\sqrt{\xi^2-1}$$

$$y(t)=1+\frac{1}{2\sqrt{\xi^2-1}}\left(\frac{e^{\overbrace{-\omega_n\left(\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right)t}^{s_2}}}{\underbrace{\xi+\sqrt{\xi^2-1}}_{\frac{-s_2}{\omega_n}}}-\frac{e^{\overbrace{-\omega_n\left(\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)t}^{s_1}}}{\underbrace{\xi-\sqrt{\xi^2-1}}_{\frac{-s_1}{\omega_n}}}\right)$$

$$\boxed{y(t)=1+\frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}}\left(\frac{e^{s_1t}}{s_1}-\frac{e^{s_2t}}{s_2}\right),\qquad t\geq 0}$$

RESPOSTA NO TEMPO - SISTEMA DE 2ª ORDEM

3 - PÓLOS REAIS DISTINTOS: $\xi > 1 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} = -p_1 \\ s_2 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} = -p_2 \end{cases}$

RESPOSTA AO DEGRAU COM: $\xi = 2, \quad \omega_n = 1 \quad \Rightarrow \quad p_1 = 0.27, \quad p_2 = 3.73$

aproximação:

$$G^*(s) = \frac{p_1}{s + p_1} \qquad y^*(t) = 1 - e^{-\left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right)\omega_n t} \qquad y^*(t) = 1 - e^{-0.27t}, \quad t \geq 0$$

valor exacto:

$$y(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}}\left(\frac{e^{s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{s_2 t}}{s_2}\right)$$

$$y(t) = 1 + 0.077e^{-3.73t} - 1.077e^{-0.27t}, \quad t \geq 0$$