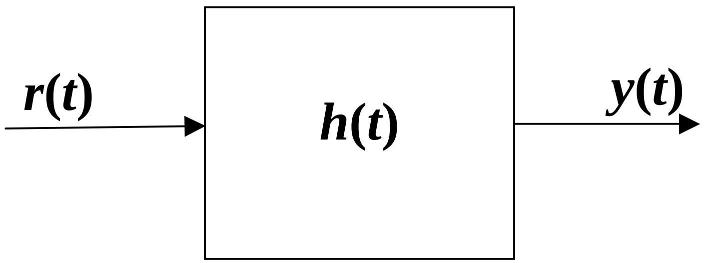
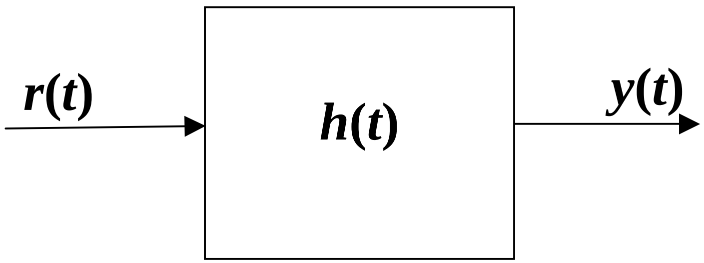
RESPOSTA NO TEMPO



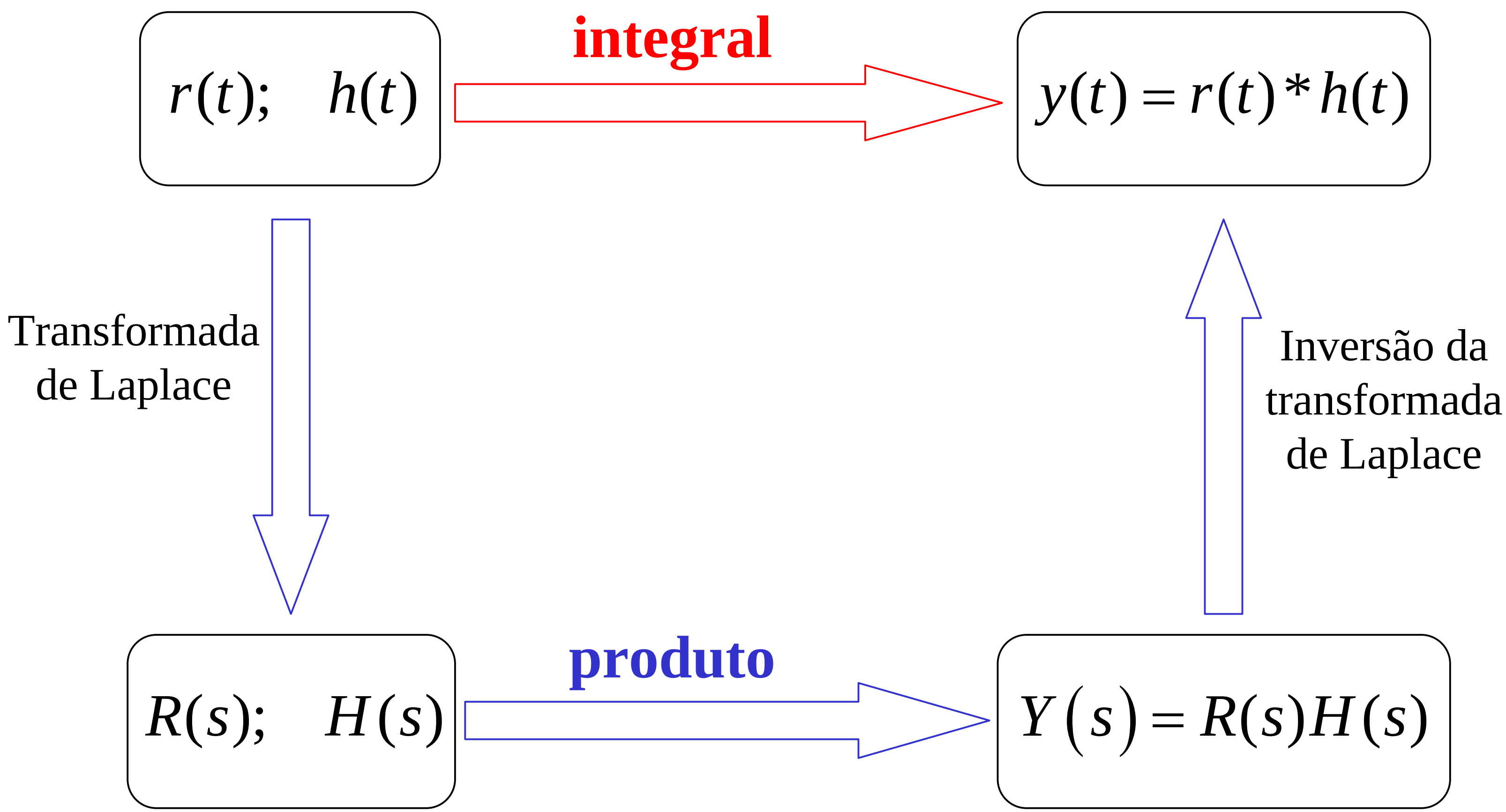
$$y(t) = r(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} r(\tau)h(t-\tau)d\tau$$ **?**

Entradas típicas	**Representação**
Impulso de Dirac	$\delta(t)$
Degrau unitário	$u(t)$
Rampa unitária	$tu(t)$
Parábola unitária	$\frac{1}{2}t^2u(t)$
Sinusóide	$sen\left(\omega t + \theta\right)u(t)$

RESPOSTA NO TEMPO



$$y(t) = r(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) h(t-\tau) d\tau$$?



RESPOSTA NO TEMPO

- SLIT: para perturbações de interesse, a transformada de Laplace da resposta vem dada por:

$$Y(s)=\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s+b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0},\quad m<n$$

<u>função racional própria</u>

- r – o nº de raizes distintas: $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r$
- σ_i – a multiplicidade da raiz ρ_i então: $\sum_{r=1}^{r}\sigma_i = n$

***Y*(*s*) pode ser decomposta em fracções parciais na forma:**

$$\begin{aligned}Y(s)=&\frac{A_{11}}{s-\rho_1}+\frac{A_{12}}{(s-\rho_1)^2}+\frac{A_{13}}{(s-\rho_1)^3}+\ldots+\frac{A_{1\sigma_1}}{(s-\rho_1)^{\sigma_1}}+ \quad \text{para raiz } \rho_1\\
&+\frac{A_{21}}{s-\rho_2}+\frac{A_{22}}{(s-\rho_2)^2}+\frac{A_{23}}{(s-\rho_2)^3}+\ldots+\frac{A_{2\sigma_2}}{(s-\rho_2)^{\sigma_2}}+ \quad \text{para raiz } \rho_2\\
&\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots \qquad\qquad \text{para raiz } \rho_r\\
&+\frac{A_{r1}}{s-\rho_r}+\frac{A_{r2}}{(s-\rho_r)^2}+\frac{A_{r3}}{(s-\rho_r)^3}+\ldots+\frac{A_{r\sigma_r}}{(s-\rho_r)^{\sigma_r}}= \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{\sigma_i}\frac{A_{ik}}{(s-\rho_i)^k}\end{aligned}$$

$$A_{ik}=\frac{1}{(\sigma_i-k)!}\lim_{s\to\rho_i}\frac{d^{(\sigma_i-k)}}{ds^{(\sigma_i-k)}}\left[(s-\rho_i)^{\sigma_i}Y(s)\right]$$

RESPOSTA NO TEMPO

- Revisão da transformada de Laplace …

$$Y(s) = \frac{A_{11}}{s-\rho_1} + \frac{A_{12}}{(s-\rho_1)^2} + \frac{A_{13}}{(s-\rho_1)^3} + \ldots + \frac{A_{1\sigma_1}}{(s-\rho_1)^{\sigma_1}} + \quad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

$$e^{-\rho t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+\rho}$$

$$-tx(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{d}{ds} X(s)$$

$$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\rho t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{(s+\rho)^n}$$

$$\vdots$$

RESPOSTA NO TEMPO

EXEMPLO:

Sistema caracterizado pela equação diferencial: $$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$$

determine a saída $y(t)$ para a entrada $x(t) = 2\,u(t)$.

Resolução (rever transformada de Laplace!):

- determinação da transformada de Laplace de ambos os membros: $\Rightarrow$ equação algébrica
- obtenção da razão: $G(s)=\dfrac{Y(s)}{X(s)}$ (função de transferência)
- $Y(s)=G(s)X(s)$ **Solução *y*(*t*):** $Y(s)\ \xrightarrow{L^{-1}}\ y(t)$

$$Y(s)=\frac{2}{s\left(s^2+3s+2\right)}$$

Raízes denominador: 0; -2; -1

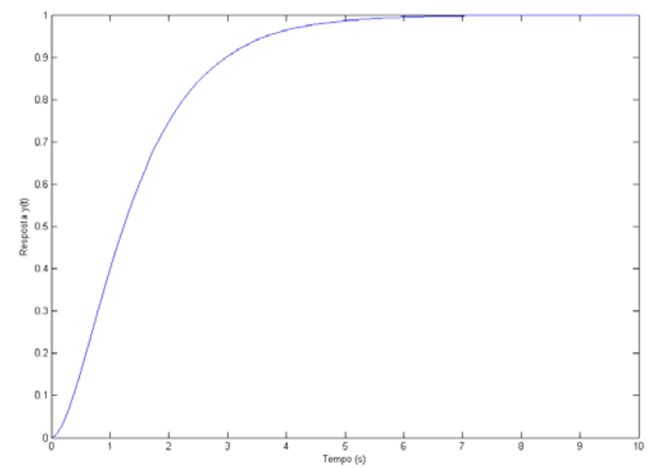
$$Y(s)=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s+1}$$

$$A=\lim_{s\to 0} sY(s) \quad \Leftrightarrow \quad A=1$$

$$\boxed{y(t)=\left(1+e^{-2t}-2e^{-t}\right)u(t)}$$

$$B=\lim_{s\to -2}(s+2)Y(s) \quad \Leftrightarrow \quad B=1$$

$$C=\lim_{s\to -1}(s+1)Y(s) \quad \Leftrightarrow \quad C=-2$$



RESPOSTA NO TEMPO

EXEMPLO:

Sistema caracterizado pela equação diferencial: $$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$$

determine a saída $y(t)$ para a entrada $x(t) = 2\,u(t)$.

Resolução (rever transformada de Laplace!):

- determinação da transformada de Laplace de ambos os membros: $\Rightarrow$ equação algébrica
- obtenção da razão: $G(s)=\dfrac{Y(s)}{X(s)}$ (função de transferência)
- $Y(s)=G(s)X(s)$ **Solução $y(t)$:** $Y(s) \xrightarrow{L^{-1}} y(t)$

VARIANTE:

Considere as seguintes condições iniciais: $y(0)=3;\qquad y'(0)=-5$

o método de resolução apresentado **ESTÁ INCOMPLETO!** porquê?

A T.L. é calculada com condições iniciais nulas.

A SOLUÇÃO PASSA PELA DETERMINAÇÃO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE UNILATERAL:

RESPOSTA NO TEMPO

EXEMPLO:

Sistema caracterizado pela equação diferencial: $$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$$

determine a saída $y(t)$ para a entrada $x(t) = 2\,u(t)$, com as seguintes condições iniciais:

$$y(0)=3; \qquad y'(0)=-5$$

TRANSFORMADA DE LAPLACE UNILATERAL:

1ª derivada: $L_u\left\{\frac{d}{dt}y(t)\right\}=sY(s)-y(0)$ 2ª derivada: $L_u\left\{\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right\}=s^2Y(s)-sy(0)-\dot{y}(0)$

3ª derivada: $L_u\left\{\frac{d^3}{dt^3}y(t)\right\}=s^3Y(s)-s^2y(0)-s\dot{y}(0)-\ddot{y}(0)$

$\vdots$

generalizando: $L_u\left\{\frac{d^n}{dt^n}y(t)\right\}=s^nY(s)-\sum_{i=0}^{n-1}s^iy^{(n-i-1)}(0)$

$$s^2Y(s)-sy(0)-\dot{y}(0)+3\big(sY(s)-y(0)\big)+2Y(s)=X(s)$$

$$\boxed{Y(s)=\underbrace{\frac{s+3}{s^2+3s+2}y(0)+\frac{1}{s^2+3s+2}\dot{y}(0)}_{\text{COMPONENTE LIVRE}}+\underbrace{\frac{1}{s^2+3s+2}X(s)}_{\text{COMPONENTE FORÇADA}}}$$

RESPOSTA NO TEMPO

EXEMPLO:

Sistema caracterizado pela equação diferencial: $$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

determine a saída $y(t)$ para a entrada $x(t) = 2\,u(t)$, com as seguintes condições iniciais:

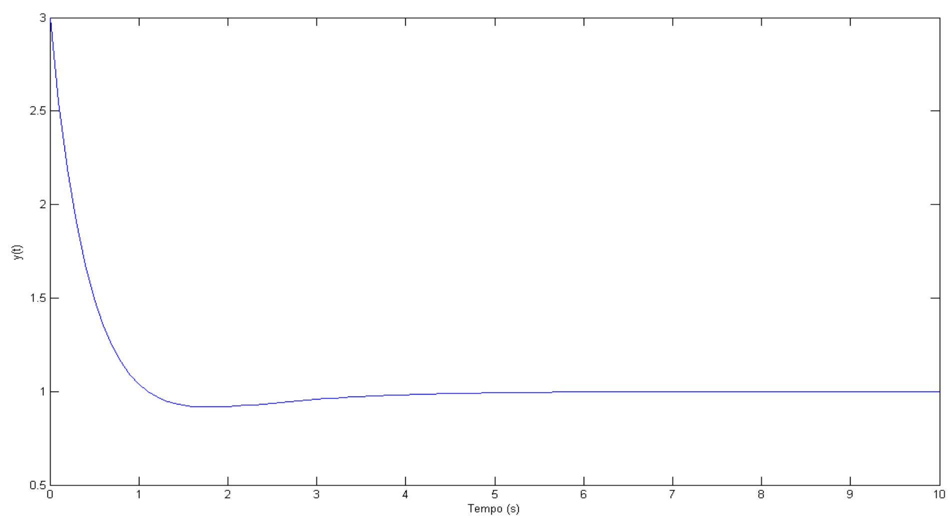
$$y(0) = 3; \qquad y'(0) = -5$$

$$\boxed{Y(s) = \underbrace{\frac{s+3}{s^2+3s+2}y(0) + \frac{1}{s^2+3s+2}\dot{y}(0)}_{\textbf{COMPONENTE LIVRE}} + \underbrace{\frac{1}{s^2+3s+2}X(s)}_{\textbf{COMPONENTE FORÇADA}}}$$

$\bullet\bullet\bullet$ $$Y(s) = \frac{3s^2+4s+2}{s(s^2+3s+2)}$$

expansão em fracções parciais …

$$\boxed{y(t) = \left(1 - e^{-t} + 3e^{-2t}\right)u(t)}$$



RESPOSTA NO TEMPO

EXEMPLO (RESUMO):

Sistema caracterizado pela equação diferencial: $$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$$

determine a saída $y(t)$ para a entrada $x(t) = 2\,u(t)$.

- **CONDIÇÕES INICIAIS NULAS**

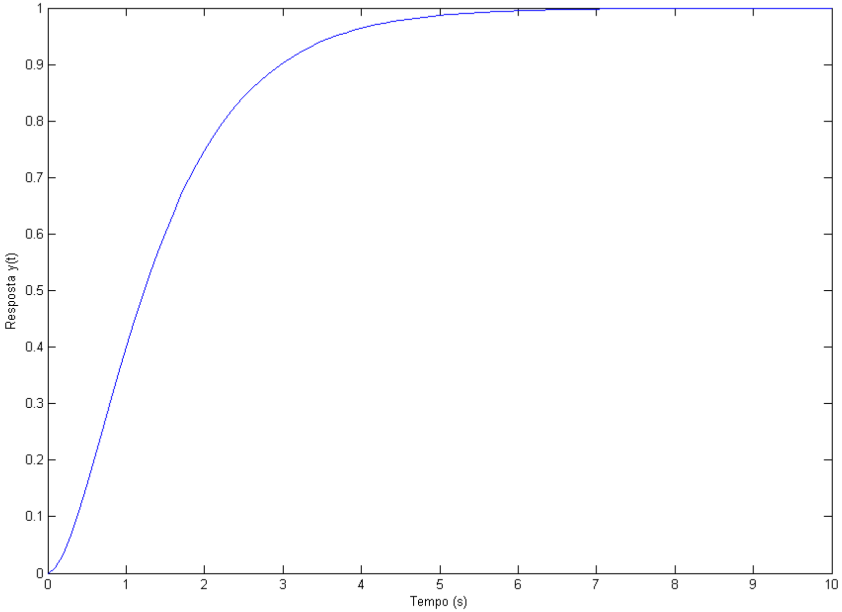
$$Y(s)=\frac{2}{s\left(s^2+3s+2\right)}$$

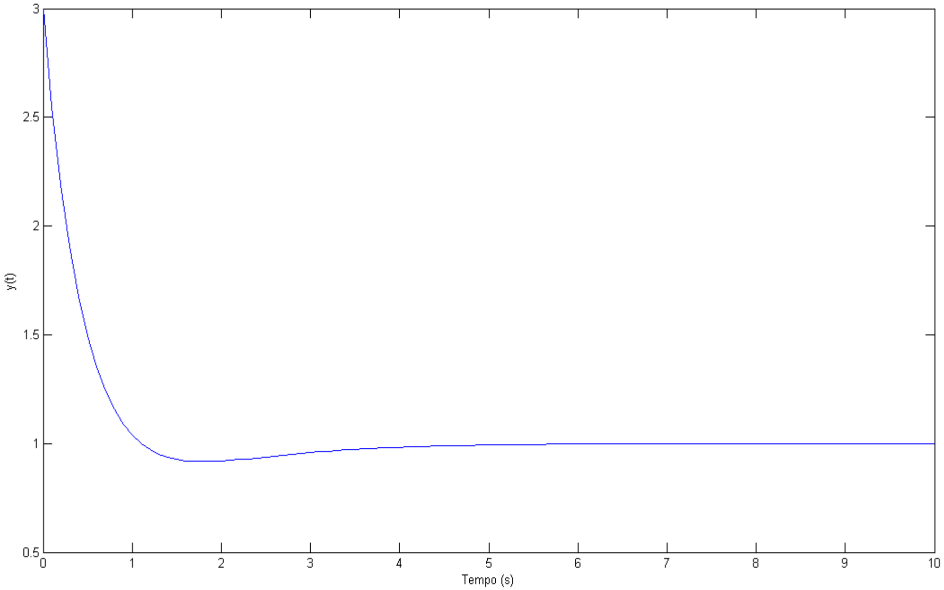
$$y(t)=\left(1+e^{-2t}-2e^{-t}\right)u(t)$$

- **CONDIÇÕES INICIAIS:** $y(0)=3;\quad y'(0)=-5$

$$Y(s)=\frac{3s^2+4s+2}{s\left(s^2+3s+2\right)}$$

$$y(t)=\left(1-e^{-t}+3e^{-2t}\right)u(t)$$





RESPOSTA NO TEMPO

QUESTÃO:

Estudo da evolução de um sinal sem o explicitar completamente …

Teorema do valor inicial:

Admitindo que *y*(*t*) e $\frac{d}{dt}y(t)$ **têm transformada de Laplace e que** $\lim_{s\to\infty} sY(s)$ **existe, então:**

$$\boxed{\lim_{t\to 0^+} y(t) = \lim_{s\to\infty} sY(s)}$$

Teorema do valor final:

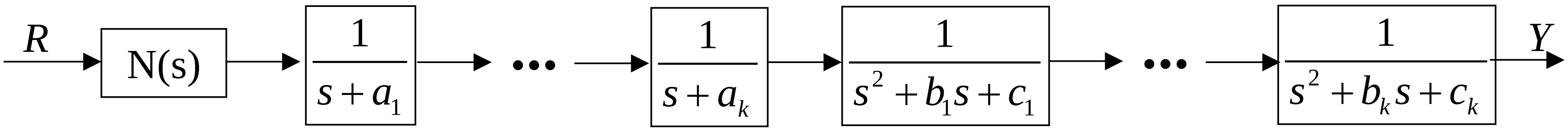
Admitindo que *y*(*t*) e $\frac{d}{dt}y(t)$ **têm transformada de Laplace e que *sY*(*s*) não tem pólos no eixo imiginário nem no semiplano complexo direito, então:**

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s)}$$

EXEMPLO:

$$Y(s) = \frac{3s^2+4s+2}{s\left(s^2+3s+2\right)} \qquad y(t) = \left(1-e^{-t}+3e^{-2t}\right)u(t) \qquad \lim_{t\to 0^+} y(t) = 3; \ \lim_{t\to\infty} y(t) = 1$$

RESPOSTA NO TEMPO



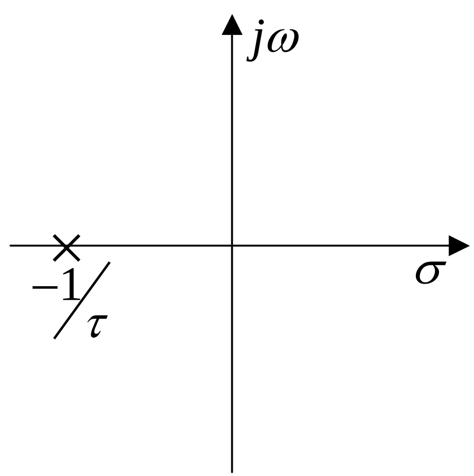
com $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k, c_1, \ldots, c_k \in \Re$

SISTEMA DE 1ª ORDEM

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{a}{s+a} = \frac{1}{1+\tau s} \qquad \tau = \frac{1}{a}; \quad a > 0$$

- Pólo: -a ou $\frac{-1}{\tau}$.

- Mapa de pólos-zeros:



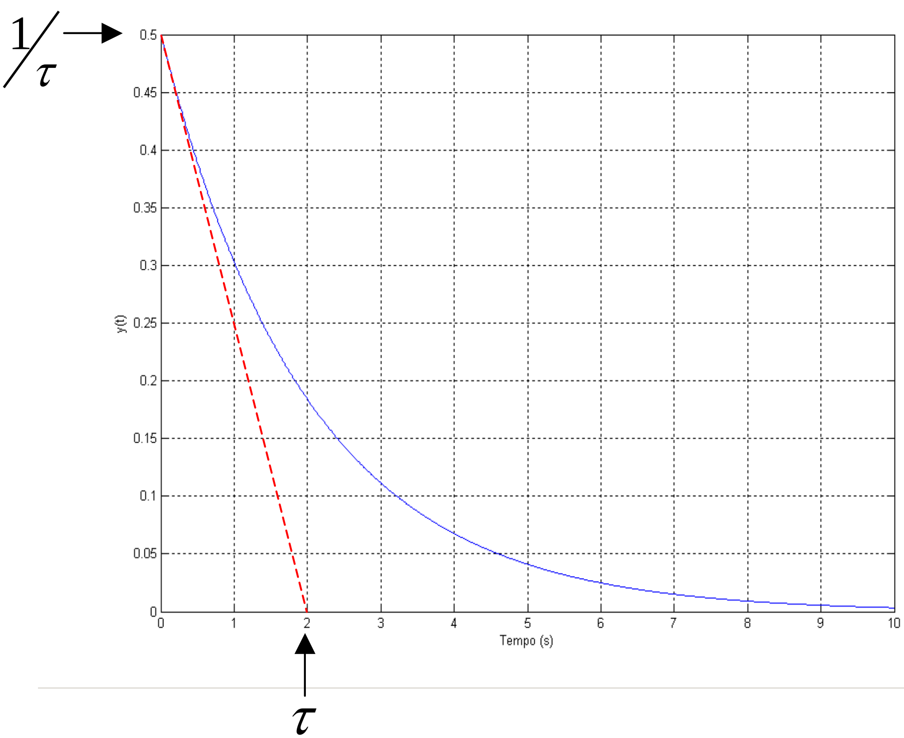
RESPOSTA NO TEMPO

SISTEMA DE 1ª ORDEM

RESPOSTA IMPULSIONAL:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{a}{s+a} = \frac{1}{1+\tau s} \qquad \tau = \frac{1}{a}$$

$$y(t) = a e^{-at} u(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{1}{\tau}t} u(t)$$



- Valor inicial: $\lim\limits_{t\to 0^+} y(t) = \lim\limits_{s\to\infty} sY(s)$

$$\lim_{t\to 0^+} y(t) = \lim_{s\to\infty} \frac{s}{1+\tau s} = \frac{1}{\tau}$$

- Valor final: $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \lim\limits_{s\to 0} sY(s)$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+\tau s} = 0$$

- Valor inicial da 1ª derivada:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{d}{dt} y(t) = \frac{-1}{\tau^2}$$

RESPOSTA NO TEMPO

SISTEMA DE 1ª ORDEM

RESPOSTA AO DEGRAU: $\dfrac{Y(s)}{R(s)} = \dfrac{1}{1+\tau s}; \quad R(s) = \dfrac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \dfrac{1}{s\tau\left(s+\dfrac{1}{\tau}\right)}$

... $$\boxed{y(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)u(t)}$$

- Valor inicial: $\lim\limits_{t\to 0^+} y(t) = \lim\limits_{s\to\infty} sY(s)$

$$\lim_{t\to 0^+} y(t) = \lim_{s\to\infty} \frac{1}{\tau\left(s+\dfrac{1}{\tau}\right)} = 0$$

- Valor final: $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \lim\limits_{s\to 0} sY(s)$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{\tau\left(s+\dfrac{1}{\tau}\right)} = 1$$

- 1ª derivada:

$$\frac{d}{dt}y(t) = \frac{1}{\tau}e^{\frac{-t}{\tau}}$$ sempre > 0

Na origem: $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{d}{dt}y(t) = \dfrac{1}{\tau}$

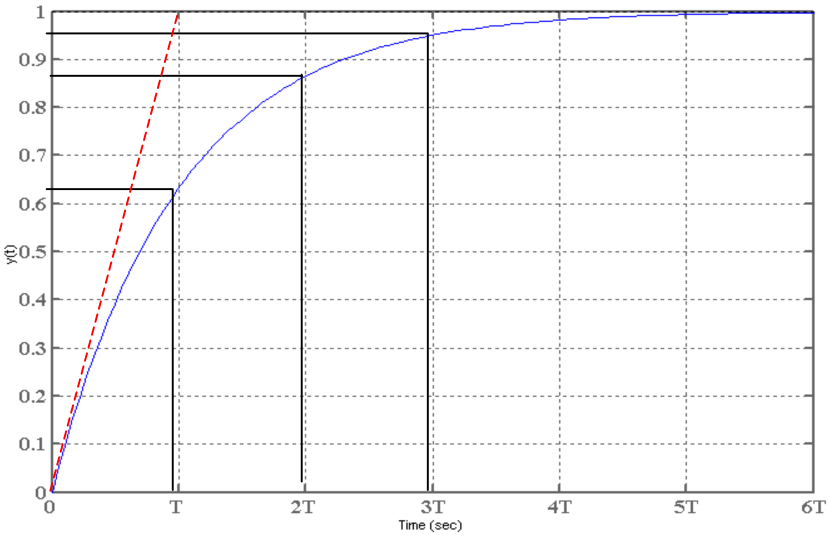
RESPOSTA NO TEMPO

SISTEMA DE 1ª ORDEM

RESPOSTA AO DEGRAU: $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+\tau s}; \quad R(s) = \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{s\tau\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}$

$$\boxed{y(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)u(t)}$$

- Valor inicial: 0.
- Valor final: 1.
- 1ª derivada: $> 0;$ na origem: $1/\tau.$



t	$y(t)$
τ	$1-e^{-1} = 63.2\%$
2τ	$1-e^{-2} = 86.5\%$
3τ	$1-e^{-3} = 95\%$
4τ	$1-e^{-4} = 98.2\%$

- **Tempo de estabelecimento (a 5%) t_s:**

Tempo ao fim do qual a resposta ao degrau se confina a uma faixa de +/–5% do valor final.

RESPOSTA NO TEMPO

SISTEMA DE 1ª ORDEM

RESPOSTA À RAMPA:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+\tau s}; \quad R(s) = \frac{1}{s^2} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{\tau}\frac{1}{s^2\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}$$

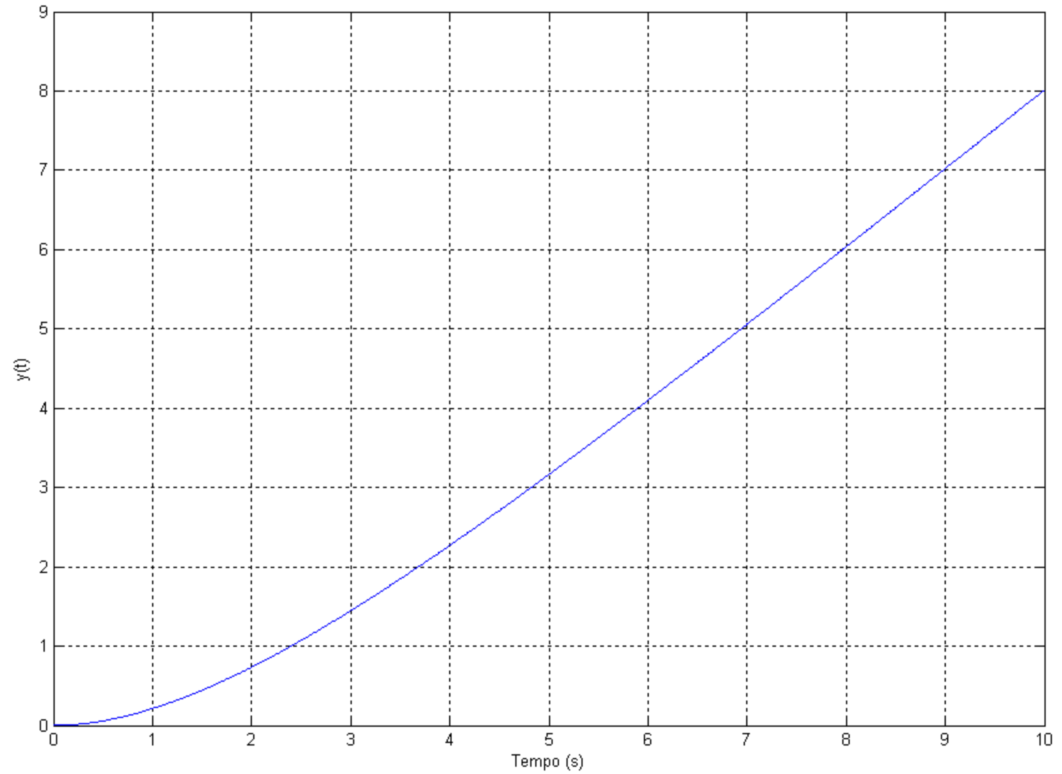
$$\ldots \quad \boxed{y(t) = \left(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right)u(t)}$$

- 1ª derivada: sempre > 0.

$$\frac{d}{dt}y(t) = 1 - e^{\frac{-t}{\tau}}$$

- 2ª derivada: sempre > 0.

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) = \frac{1}{\tau}e^{\frac{-t}{\tau}}$$



RESPOSTA NO TEMPO

SISTEMA DE 1ª ORDEM

RESPOSTA À PARÁBOLA: $\dfrac{Y(s)}{R(s)} = \dfrac{a}{s+a} \quad R(s) = \dfrac{1}{s^3} \quad \Rightarrow Y(s) = \dfrac{1}{s^3(s+a)}; \quad a = \dfrac{1}{\tau}$

...

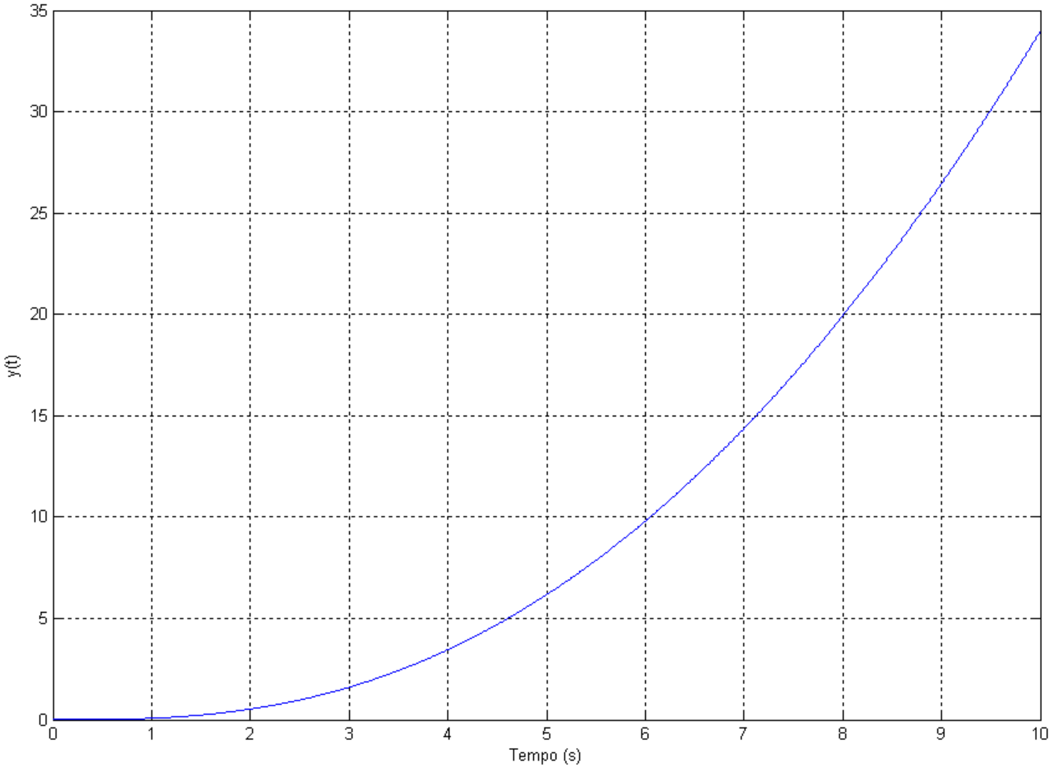
$$\boxed{y(t) = \left(\tau^2 - \tau t + \frac{t^2}{2} - \tau^2 e^{-\frac{t}{\tau}} \right) u(t)}$$

- 1ª derivada: sempre > 0.

$$y(t) = \left(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right) u(t)$$

- 2ª derivada: sempre > 0.

$$y(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) u(t)$$



RESPOSTA NO TEMPO

SISTEMA DE 1ª ORDEM

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{a}{s+a}; \qquad a=\frac{1}{\tau}$$

Aumento da ordem da derivação

	$r(t)$	$y(t)$	$\dot{y}(t)$
DIRAC	$r_I(t)=\delta(t)$	$y_I(t)=\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}u(t)$	$\dot{y}_I(t)=\frac{-1}{\tau^2}e^{-\frac{t}{\tau}}u(t)$
DEGRAU	$r_D(t)=u(t)$	$y_D(t)=\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)u(t)$	$\dot{y}_D(t)=\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}u(t)$
RAMPA	$r_R(t)=tu(t)$	$y_R(t)=\left(t-\tau+\tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right)u(t)$	$\dot{y}_R(t)=\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)u(t)$
PARÁBOLA	$r_p(t)=\frac{t^2}{2}u(t)$	$y_P(t)=\left(\tau^2-\tau t+\frac{t^2}{2}-\tau^2 e^{-\frac{t}{\tau}}\right)u(t)$	$\dot{y}_P(t)=\left(t-\tau+\tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right)u(t)$