UNIVERSIDADE DO ALGARVE

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
Departamento de Engenharia Electrónica e Informática

SISTEMAS DE CONTROLO

Problemas

Ano lectivo de 2006-2007

Licenciatura em Engenharia de Sistemas e Informática

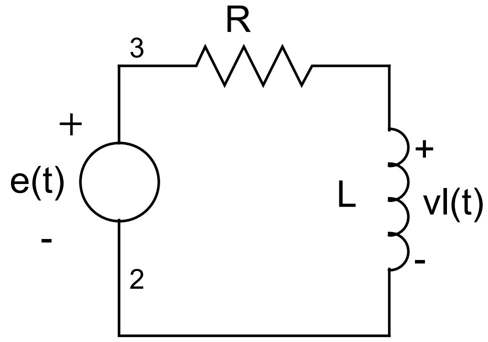
Prof. Doutor João Lima

Prof. Doutor António Ruano

ÍNDICE

1. MODELOS MATEMÁTICOS DE SISTEMAS

1.1 Considere o seguinte modelo eléctrico RL série:



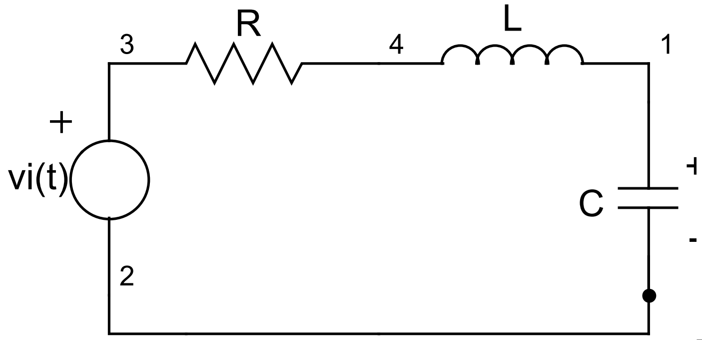
Determine a função de transferência $H(s)=\dfrac{V_L(s)}{E(s)}$ utilizando os seguintes métodos:

a) Lei das malhas.

b) Lei dos nós.

c) Divisão da tensão de entrada sobre as impedâncias.

1.2 Considere o seguinte modelo eléctrico RLC série:



$R=3\,\Omega$, $L=1H$, $C=\dfrac{1}{2}F$

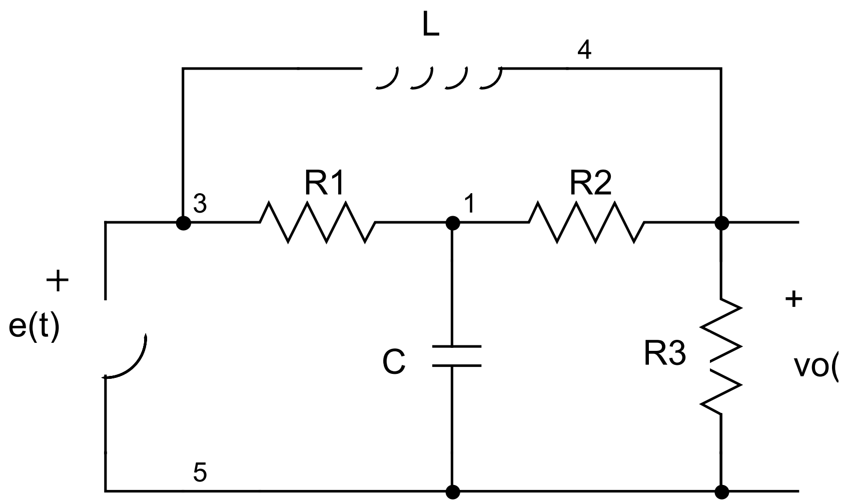
com as seguintes condições iniciais:

$$v_o(0) = 1;\ \left.\frac{dv_o(t)}{dt}\right|_{t=0} = 2$$

a) Determine a equação diferencial que relaciona $v_i(t)$ com $v_o(t)$.

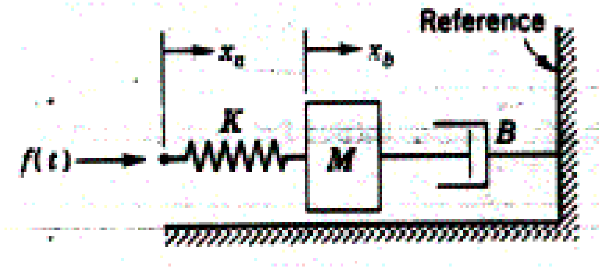
b) Suponha que $v_i(t) = e^{-3t}u(t)$. Usando a T.L. unilateral, determine $v_o(t)$.

1.3 Considere um sistema representado pelo seguinte modelo eléctrico:



Estabeleça um sistema de equações matricial, que lhe permita determinar a função de transferência $\frac{V_o(S)}{E(S)}$.

1.4 Considere o seguinte sistema mecânico translaccional, e determine:



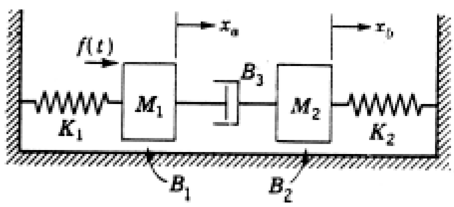
a) A rede mecânica associada ao sistema.

b) O sistema de equações diferenciais que descrevem o seu funcionamento.

c) As funções de transferência para as situações representadas por cada linha da tabela seguinte:

	entrada	saída
1	F	x_a
2	x_a	x_b
3	f	x_b

1.5 Considere o seguinte sistema mecânico translaccional, e determine:



a) A rede mecânica associada ao sistema.

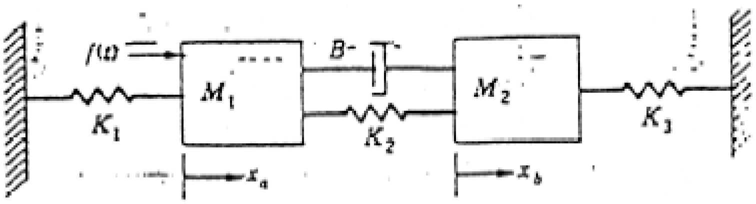
b) O sistema de equações diferenciais que descrevem o seu funcionamento.

c) A função de transferência $\dfrac{x_b(S)}{F(S)}$

d) O equivalente eléctrico.

e) A função de transferência $\frac{V_b(s)}{V_a(s)}$ referente à rede obtida na alínea d). Compare com o resultado da alínea c) e tire conclusões.

1.6 Para o sistema translaccional da figura abaixo, determine:



a) A rede mecânica associada ao sistema.

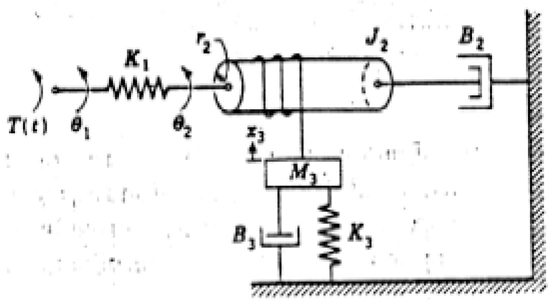
b) As equações diferenciais que descrevem o funcionamento do sistema.

c) A função de transferência $\frac{X_a(s)}{F(s)}$.

d) O seu equivalente eléctrico.

(teste 2/2/94)

1.7 Para o sistema mecânico da figura abaixo, determine:



a) A rede mecânica associada ao sistema.

b) As equações diferenciais que descrevem o funcionamento do sistema.

c) A função de transferência $\frac{X_3(s)}{T(s)}$.

d) O seu equivalente eléctrico.

(exame 4/3/94)

1.8 Considere um disco com momento de inércia *J* suspenso por um fio de elasticidade de torção *K*, e emerso num fluido. Suponha que será aplicado um binário *T*(*t*), provocando rotação sujeita a fricção de coeficiente *B*.

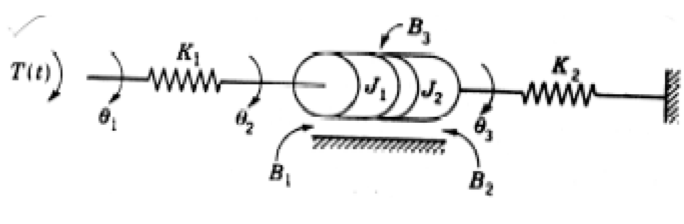
a) Apresente a rede mecânica associada ao sistema.

b) Estabeleça a equação diferencial que relaciona o binário aplicado *T*(*t*) com a posição angular $\theta(t)$.

c) Determine a função de transferência considerando *T*(*t*) a entrada e $\theta(t)$ a saída.

d) Determine o equivalente eléctrico.

1.9 Considere o seguinte sistema mecânico rotacional, e determine:



a) A rede mecânica associada ao sistema.

b) O sistema de equações diferenciais na forma matricial que descreve o seu funcionamento.

c) O sistema de equações na forma matricial que permite determinar a função de transferência $\frac{\theta_3(S)}{T(S)}$.

d) O equivalente eléctrico.

1.10 Considere um termómetro de mercúrio com os seguintes parâmetros:

R_g - resistência térmica do vidro

R_m - resistência térmica do mercúrio

C_g - capacidade térmica do vidro

C_m - capacidade térmica do mercúrio

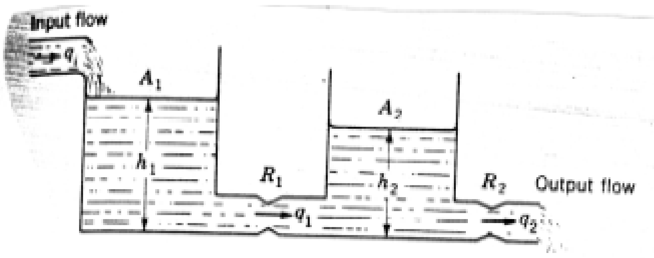
Em determinado instante, o termómetro é submetido a uma fonte de calor à temperatura θ_0.

a) Estabeleça a rede térmica associada ao sistema.

b) Apresente o sistema de equações diferenciais que o caracterizam.

c) Determine a função de transferência $\frac{\theta_m(s)}{\theta_g(s)}$.

1.11 Considere o sistema fluídico representado na figura:



em que se definem:

q_i, q_1, q_2 - fluxos; à entrada, na válvula 1, na válvula 2.

R_1, R_2 - resistências de fluxo; na válvula 1, na válvula 2.

h_1, h_2 - alturas dos níveis de fluido; no vaso 1, no vaso 2.

A_1, A_2 - áreas das superfícies transversais; do vaso 1, do vaso 2.

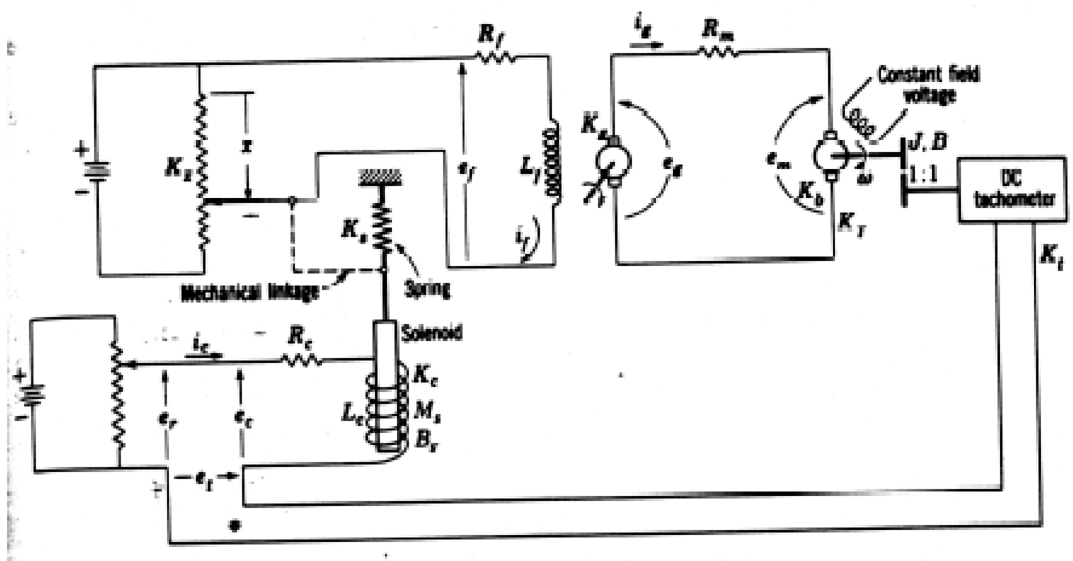
a) Determine as equações diferenciais que caracterizam o sistema.

b) Determine a rede eléctrica equivalente.

c) Determine as equações diferenciais que caracterizam o sistema da alínea b) e compare com o resultado obtido em a).

d) Determine as funções de transferência $H_1(s)/Q_i(s)$ e $H_2(s)/Q_i(s)$.

1.12 Para o sistema de controlo da figura seguinte,



- a força de atracção no solenóide é dada por $f_c = k_c i_c$
- a voltagem aplicada ao gerador é dada por $e_f = k_x x$
- Quando a voltagem aplicada à bobina da solenóide é zero, a mola está em repouso e x=0.

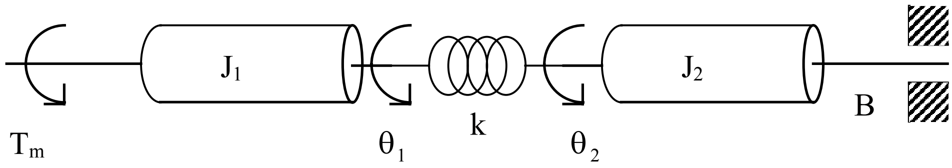
a) Determine todas as equações necessárias relacionando as variáveis do sistema.

b) Desenhe um diagrama de blocos para o sistema de controlo. O diagrama deve incluir blocos que indiquem especificamente as variáveis $I_c(s)$, $X(s)$, $I_f(s)$, $E_g(s)$ e $T(s)$.

c) Determine a função de transferência $\frac{\omega(s)}{X(s)}$.

(exame 23/1/95)

1.13 Dado o sistema mecânico rotacional da figura, calcule:



a) A função de transferência $\dfrac{\theta_2(s)}{T_m(s)}$

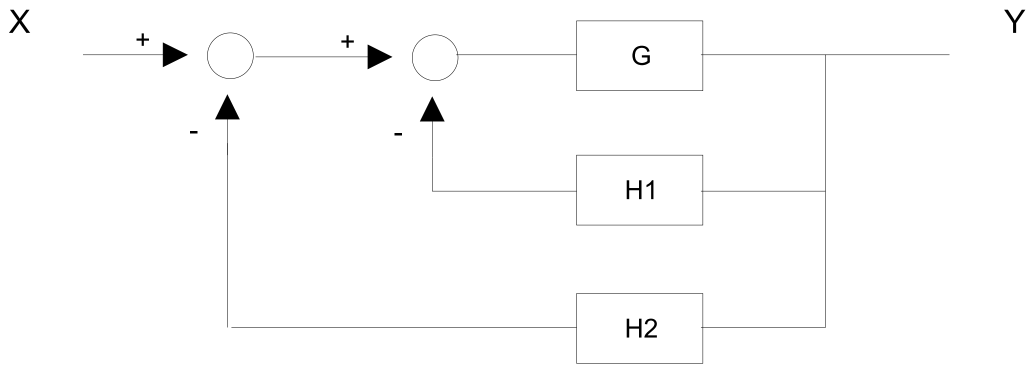
b) O sistema eléctrico análogo.

(6/2/2004)

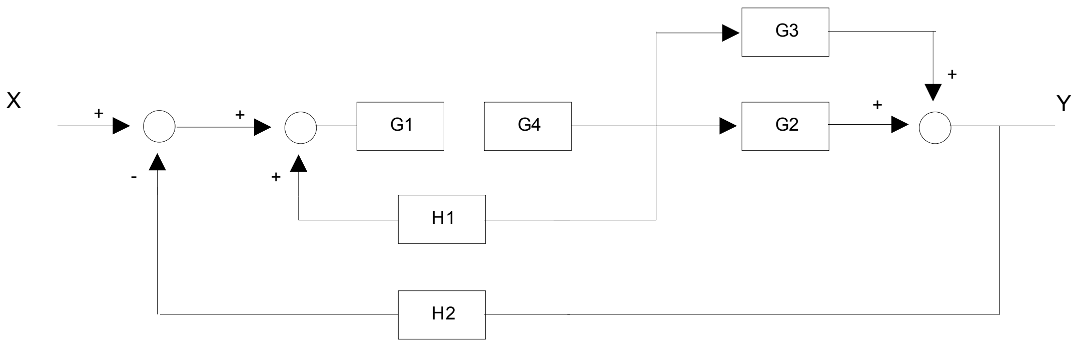
2. DIAGRAMAS DE BLOCOS E DE FLUXO DE SINAL

2.1 Simplifique cada um dos diagramas de blocos das alíneas seguintes, de forma a obter cada função de transferência Y/X.

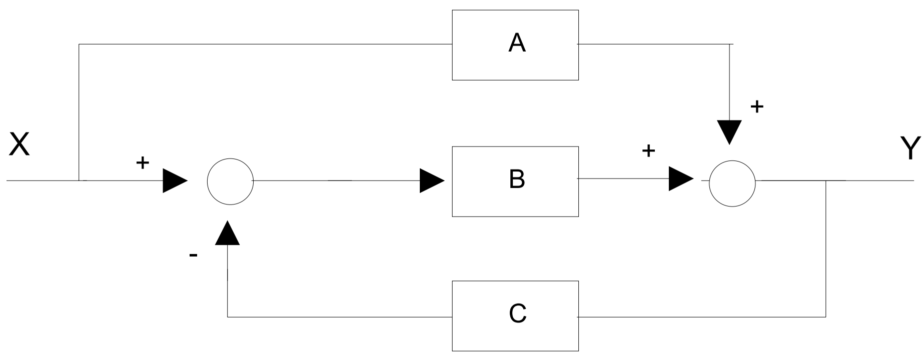
a)



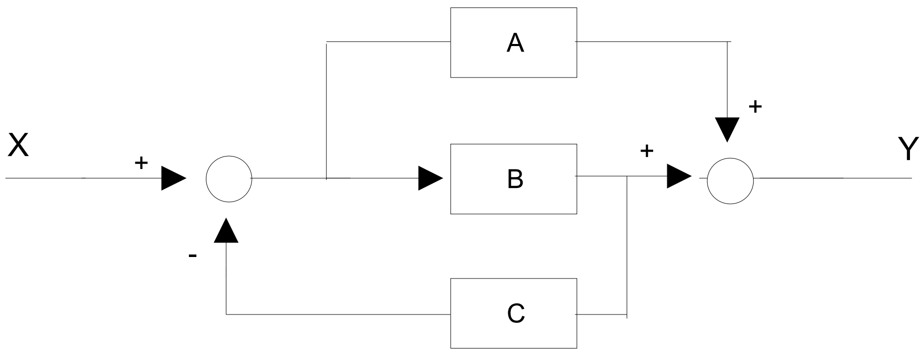
b)



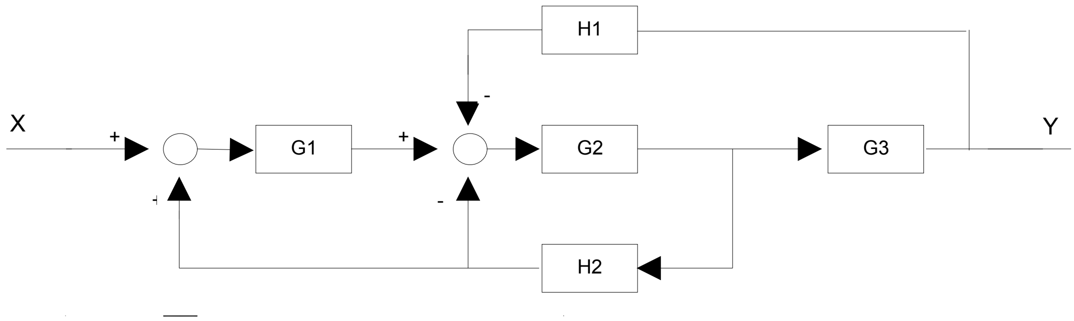
c)



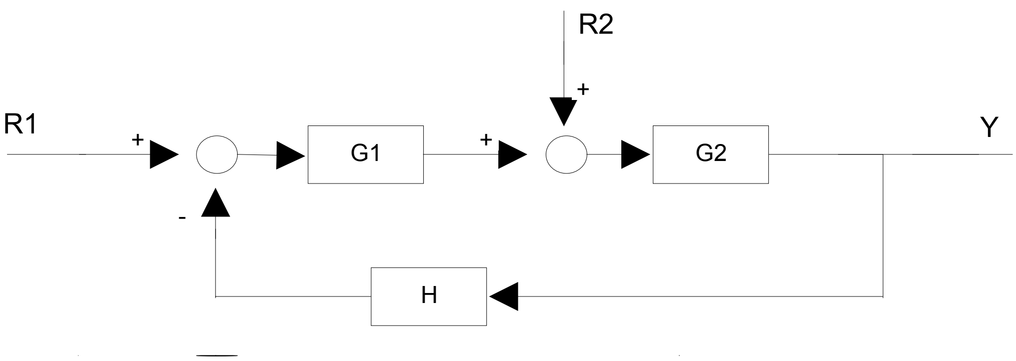
d)



e)

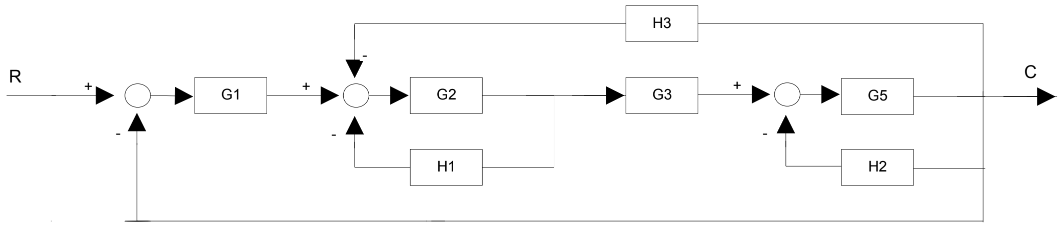


2.2 Para o diagrama de blocos da figura seguinte, determine Y em função de R_1 e R_2.

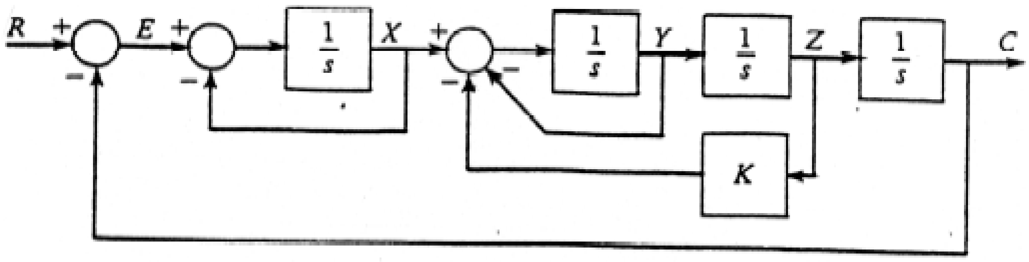


2.3 Para cada um dos diagramas de blocos apresentados, determine o diagrama de fluxo de sinal correspondente, e aplicando a fórmula de transmitância de Mason, determine a função de transferência C/R:

a)

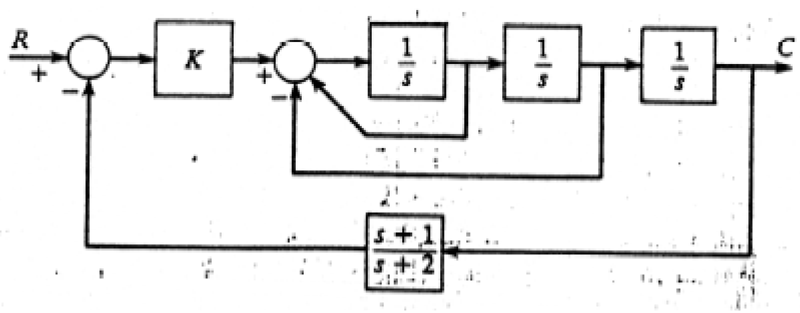


b)



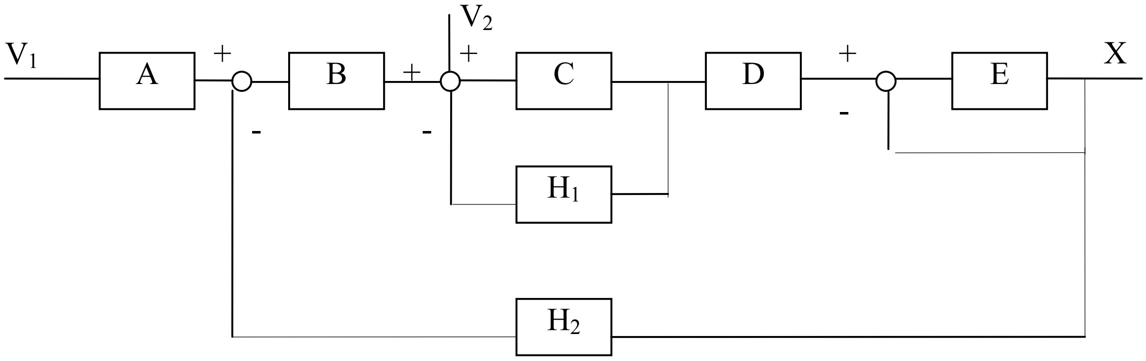
(teste 2/2/94)

c)



(exame 4/3/94)

2.4 Considere o seguinte diagrama de blocos:



Determine, utilizando a fórmula de transmitância de Mason, as funções de transferência:

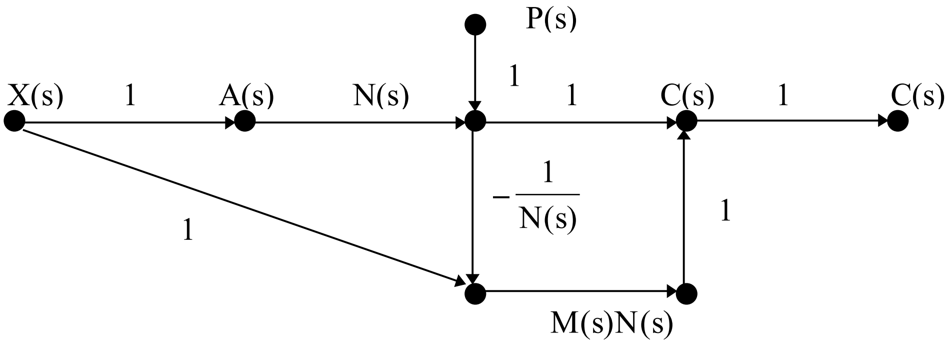
$X(s)/V_1(s)$ e $X(s)/V_2(s)$

(teste 19/12/2003)

2.5 Dado o seguinte diagrama de fluxos, calcule:

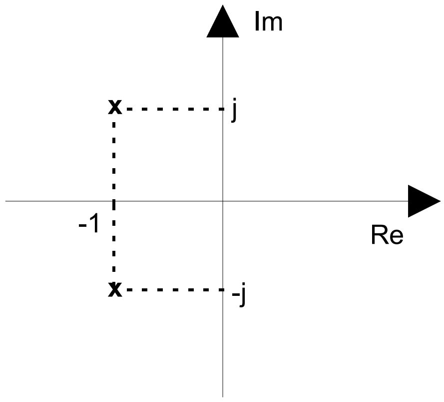
a) A função de transferência entre a perturbação P(s) e a saída C(s).

b) A função de transferência entre o sinal de entrada X(s) e a saída C(s).



3. CARACTERÍSTICAS E DESEMPENHO DE SISTEMAS

3.1 Considere o seguinte mapa de pólos-zeros referente a um sistema de ganho estático unitário.



Admita que à entrada do sistema, é aplicado um degrau unitário, determine:

a) A resposta do sistema.

b) Período das oscilações amortecidas.

c) Tempo de pico.

d) Sobreelevação.

e) Tempo de estabelecimento.

3.2 Considere um sistema linear invariante no tempo com pólos em $-3 \pm 4j$ e zero em -1. Sabe-se que o valor final da resposta ao degrau unitário é 2.

a) Determine a resposta à rampa do sistema dado.

b) Determine a resposta $y(t)$ a um degrau unitário. Qual a relação com a resposta da alínea anterior?

c) Nas condições da alínea anterior, determine analiticamente o tempo de pico e a percentagem de sobreelevação.

d) Considere um sistema semelhante ao sistema dado, mas com um pólo duplo adicional, na origem. Justificando, apresente a nova resposta impulsional.

(exame 22/1/2003)

3.3 Considere um sistema de 2ª ordem sub-amortecido sem zeros e ganho estático unitário. Pretende-se que a resposta ao degrau unitário verifique as seguintes especificações:

- $20\% \leq$ sobre-elevação (%) $\leq 40\%$
- $1.5s \leq$ tempo de estabelecimento $\leq 3s$.

a) Esboce a região do plano complexo onde a concretização dos pólos permite o cumprimento das especificações.

b) Nas condições apresentadas, determine o menor valor possível para o tempo de pico.

c) Determine a resposta ao degrau unitário $y_u(t)$ tal que $S = 20\%$ e $t_s = 1.5s$.

d) Considere que ao sistema que originou a resposta $y_u(t)$ é adicionado um pólo na origem. Determine a resposta impulsional do novo sistema e diga justificando se essa resposta tem alguma relação com $y_u(t)$.

(exame 29/1/2003)

3.4 Considere um sistema de 2ª ordem sub-amortecido sem zeros e ganho estático unitário. Pretende-se que a resposta ao degrau unitário verifique as seguintes especificações:

- tempo de pico: $\frac{\pi}{4}\mathbf{s} \le \mathbf{T_p}(\mathbf{s}) \le \frac{\pi}{2}\mathbf{s}$
- tempo de estabelecimento a 5%: $\mathbf{3s} \le \mathbf{T_s}(\mathbf{s}) \le \mathbf{6s}$

a) Esboce a região do plano complexo onde a concretização dos pólos permite o cumprimento das especificações.

b) Nas condições especificadas apresente, justificando, os valores de T_p e T_s que conduzem ao maior valor da percentagem de sobre-elevação. Determine, nessas circunstâncias, o valor da percentagem de sobre-elevação.

c) Pretende-se agora um factor de amortecimento $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Verifique se este valor permite o cumprimento das especificações. Justifique.

d) Determine a resposta impulsional do sistema que cumpre a especificação da alínea anterior, e que, adicionalmente, apresenta $\mathbf{T_p} = \frac{\pi}{2}\mathbf{s}$.

(exame 6/2/2003)

3.5 Considere um sistema de 2ª ordem sem zeros, sub-amortecido e ganho estático unitário. Pretende-se que a resposta ao degrau unitário verifique as seguintes especificações:

- intervalo de tempo entre dois máximos consecutivos: $2\frac{\pi}{3}s \le T_d \le \pi s$
- percentagem de sobre-elevação: $20\% \le S\% \le 30\%$

a) Esboce a região do plano complexo onde a concretização dos pólos permite o cumprimento das especificações.

b) Suponha que se pretende tempo de estabelecimento a 5%: $T_s = 3s$. Verifique se com este valor as especificações ainda podem ser cumpridas. (exame 12/3 /2003)

4. ESTABILIDADE DE SISTEMAS LINEARES

4.1 Utilizando o critério de Routh-Hurwitz, localize as raízes de D(s)=0, concluindo sobre a estabilidade dum sistema cuja função de transferência tem por denominador D(s), dado por:

a) $D(s) = s^5 + s^4 + 10s^3 + 72s^2 + 152s + 240$

b) $D(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10$

c) $D(s) = s^7 + 4s^6 + 5s^5 + 5s^4 + 6s^3 + 9s^2 + 8s + 2$

d) $D(s) = s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 8s + 9$

4.2 Considere o sistema com função de transferência:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 12s + 8}$$

Comente a estabilidade do sistema. Quais os pólos do sistema?

(teste 23/1/95)

4.3 Considere a seguinte função de transferência:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+3}{s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 12s + 8}$$

a) Comente a estabilidade do sistema

b) Com base nos resultados da alínea anterior, determine as raízes da equação característica.

4.4 Considere a seguinte função de transferência:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+3}{s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 12s + k}$$

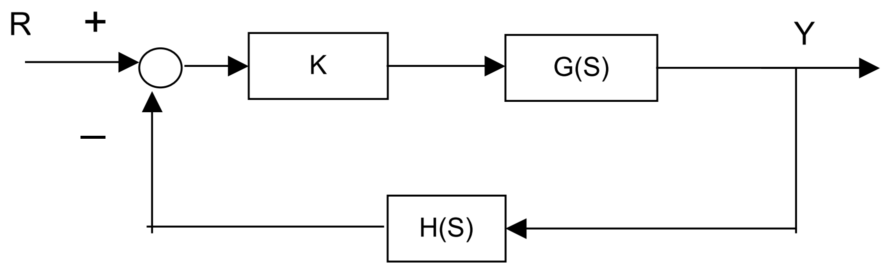
a) Comente a estabilidade do sistema.

b) Com base nos resultados da alínea anterior, determine as raízes da equação característica no limite da estabilidade.

(exame 20/9/95)

5. MÉTODO DO LUGAR DAS RAÍZES

5.1 Considere o seguinte sistema realimentado:



Determine o lugar das raízes, assinalando os pontos mais relevantes quando:

a) $G(s) = \dfrac{4}{s(s+2)}$, $H(s) = \dfrac{s+3}{3}$

b) $G(s) = \dfrac{1}{s(s-1)(s+6)}$, $H(s) = s+1$

5.2 Para cada sistema G(s), pertencente ao respectivo sistema de controlo com realimentação unitária, negativa:

a) $G(s) = \dfrac{k}{s(s+3)(s+6)}$

(teste 2/2/94)

b) $G(s) = \dfrac{k}{s(s+3)^2}$

(exame 4/3/94)

a) Esboce o lugar das raízes para k positivo, determinando o melhor possível os pontos de interesse.

b) Admita que pretende um ζ das raízes dominantes de 0.866. Determine, aproximadamente, o valor de k que satisfaz essa condição. Indique adicionalmente quais serão:

- a percentagem de sobreelevação,
- o tempo de pico
- o tempo de estabelecimento
- o erro em regime estacionário

quando se aplica um degrau unitário ao sistema em malha fechada.

5.3 Para o sistema com função de transferência em malha aberta:

$$GH(s) = \frac{A(s-1)}{s(s+2)^2}$$

a) Esboce o lugar das raízes para A<0.

b) Determine os valores de A para os quais o sistema é estável.

c) Determine os pólos do sistema no limite da estabilidade.

5.4 Trace o lugar das raízes dos sistemas cuja f.t. em malha aberta é:

a) $GH(s) = \dfrac{k}{(s+1)(s+3)\left(s^2+3s+5\right)}$

b) $GH(s) = \dfrac{k(s+1)(0.5s+1)}{s^3}$

Determine adicionalmente os valores de k para os quais o sistema é instável.

5.5 Esboce o lugar das raízes ($\beta > 0$) para o sistema com f.t.

$$GH(s) = \frac{4s+2}{s(s+\beta)(s+3)}$$