

3. REPRESENTAÇÃO DE SISTEMAS

A abordagem à teoria dos sistemas, seguida até agora, partiu de alguns exemplos de sistemas físicos, determinou descrições das suas dinâmicas em termos de equações diferenciais e a partir destas, chegou-se ao conceito de função de transferência, Fig.3.1. A função de transferência surgiu como uma forma de representação externa de sistemas, em termos de entrada-saída. Alternativamente à utilização da função de transferência, pode-se contar com a representação interna de sistemas em termos de espaço de estados, cujo estudo está fora do actual programa desta disciplina.

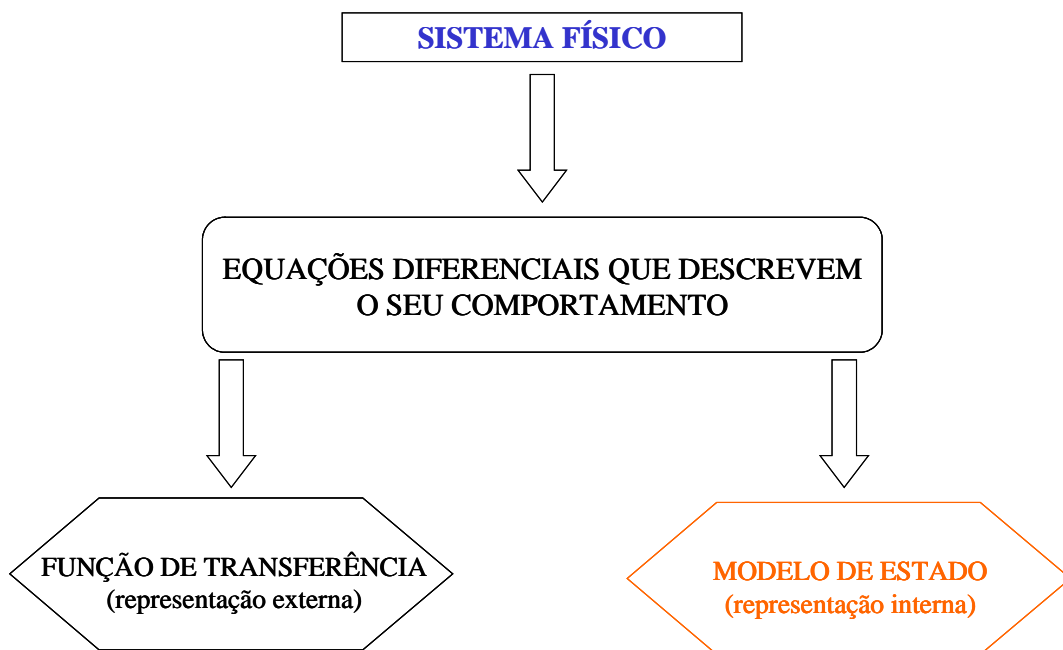


Fig.3.1 – Formas de representação de sistemas.

Este tratamento uniformizado de sistemas permite que se evolua na análise acomodando-se nesta sistemas mais complexos. Assim, qualquer dos exemplos estudados até agora pode passar a ser visto como peça base de um sistema mais complexo, mantendo-se válida toda a fundamentação estudada até então, dado que: um conjunto de sistemas interligados ainda é um sistema.

Nas secções seguintes vão ser estudadas as seguintes formas de representação de sistemas:

- Diagrama de simulação
- Diagrama de blocos
- Diagrama de fluxo de sinal

3.1 DIAGRAMAS DE FLUXO DE SINAL

Durante o estudo dos diagramas de blocos verificou-se que a análise de sistemas mais complexos poder-se-ia transformar numa tarefa incomportavelmente trabalhosa, já que, não existe nenhum método sistemático para aplicação das regras de redução de diagramas de blocos.

Nesta sequência, surge uma representação alternativa de sistemas que consiste no diagrama de fluxo de sinal, recorrendo ao qual se poderá ver facilitada a representação de sistemas mais complexos e sistematizada a sua análise.

O diagrama de fluxo de sinal consiste num grafo orientado em que os nós representam sinais e os ramos funções de transferência que se designam por ganhos ou transmitância dos ramos.

Na Fig.3.2 apresentam-se 2 nós x_1 e x_2 ligados por um ramo de transmitância a . Para este exemplo simples o sinal do nó destino é o produto do sinal do nó origem pela transmitância do ramo que os une.

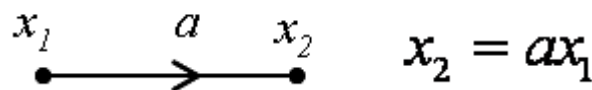


Fig.3.2 – Nós e ramo num diagrama de fluxo de sinal.

Para cada nó podem-se distinguir ramos de entrada e ramos de saída, conforme a orientação destes.

De seguida apresentam-se algumas definições.

- Nó de entrada (fonte): só tem ramos de saída (representam geralmente variáveis independentes).
- Nó de saída (sorvedouro): só tem ramos de entrada (representam geralmente variáveis dependentes).
- Nó misto: tem ramos de entrada e ramos de saída. Podem ser transformados em nós de saída adicionando um ramo de saída com transmitância unitária.

Cada nó num diagrama de fluxo de sinal, soma todos os sinais provenientes dos ramos de entrada, e disponibiliza a soma em todos os ramos de saída.

Para se ilustrar os conceitos acabados de introduzir, apresenta-se o Exemplo 3.1.

Exemplo 3.1

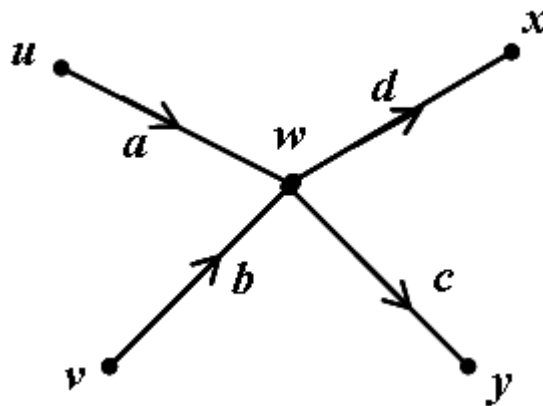


Fig.3.3 – Diagrama de fluxo de sinal do Exemplo 3.1.

Podem-se identificar os nós de entrada u e v e os de saída x e y ; w é um nó misto. As transmitâncias dos ramos são a , b , c , e d .

Pode-se estabelecer que $w = au + bv$, $x = cw$ e $y = dw$.

Assim, os nós de saída em função dos nós de entrada é: $x = cau + cbv$ e $y = dau + dbv$.

Para se analisar diagramas de fluxo de sinal mais complexo, introduzem-se as noções que se apresentam de seguida.

- Caminho: Sequência de ramos ligados, entre um nó origem e um nó destino, percorrida no sentido das setas. Os caminhos podem ser: abertos, cada nó do caminho é percorrido apenas uma vez; fechados (ciclo): cada nó do caminho é percorrido apenas uma vez, excepto o nó de origem que coincide com o destino, ou nem aberto nem fechado¹ passa por pelo menos um nó mais do que umas vez e termina num nó diferente daquele que começou.
- Caminho directo: caminho aberto em que o nó de origem é uma entrada (fonte) e o nó de destino é uma saída (sorvedouro).
- Ganho do caminho: produto das transmitâncias dos ramos que formam o caminho.

Assim como um dado sistema pode ser descrito por diferentes conjuntos de equações, também o diagrama de fluxo de sinal para um dado sistema não é único.

Por questões de legibilidade é costume desenhar os diagramas de fluxo de sinal com as variáveis independentes (fontes) à esquerda e as variáveis dependentes (sorvedouros) à direita. Desta forma, os diagramas de fluxo de sinal podem ser vistos como uma representação gráfica de equações em que os coeficientes destas são as transmitâncias associadas aos ramos. A partir deste desenho é então possível o estabelecimento de relações entre variáveis recorrendo à álgebra dos diagramas de fluxo de sinal que pode assumir 2 estratégias:

- Simplificação: para eliminação dos nós mistos, ficam apenas os nós de entrada e de saída.
- Fórmula de Mason.

Apresenta-se de seguida as regras básicas para simplificação.

1. Série: A transmitancia da série é o produto das transmitâncias

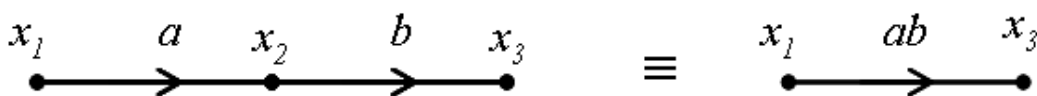


Fig.3.4 – Ramos em série.

¹ Passa por pelo menos um nó mais do que umas vez e termina num nó diferente daquele em que começou.

2. Paralelo: A transmitância do paralelo é a soma das transmitâncias.

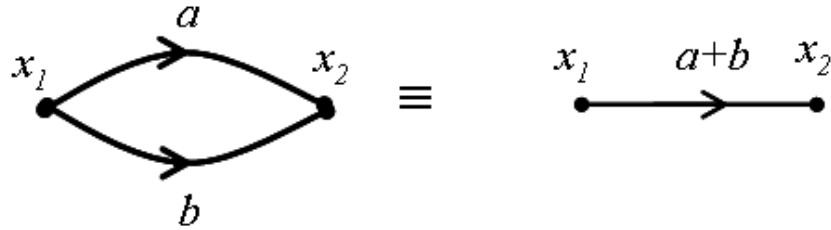


Fig.3.5 – Ramos em paralelo.

3. Supressão de nó misto: Na Fig.3.6 x_3 é um nó misto que pode ser suprimido tendo em conta todas as transmitâncias dos ramos de entrada e de saída.

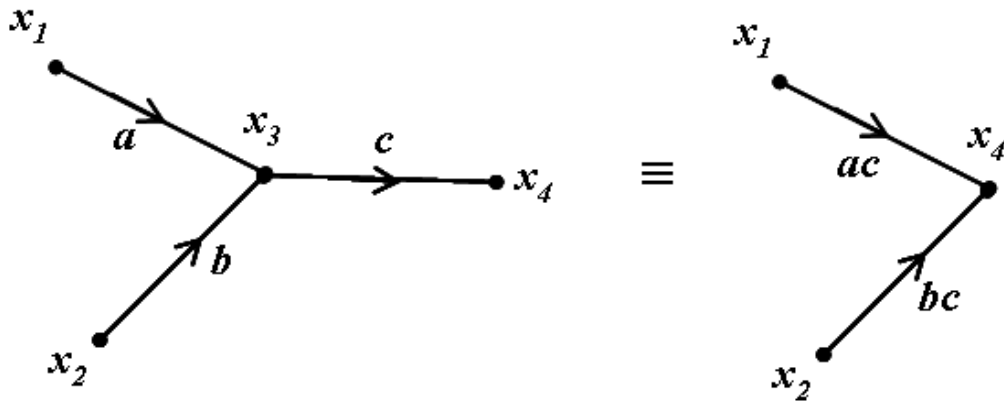


Fig.3.6 – Supressão de nó misto.

4. Auto-ciclo: Na Fig.3.7 existe um ciclo de apenas um nó: x_2 .

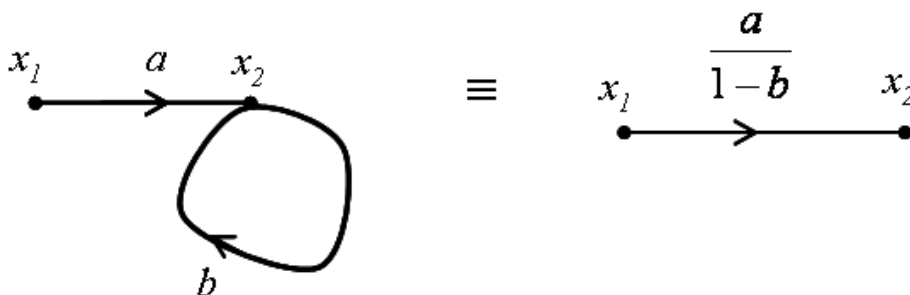


Fig.3.7 – Auto-ciclo.

Considere-se agora um sistema MIMO de complexidade arbitrária com m entradas e r saídas representado pelo diagrama de fluxo de sinal da Fig.3.8.

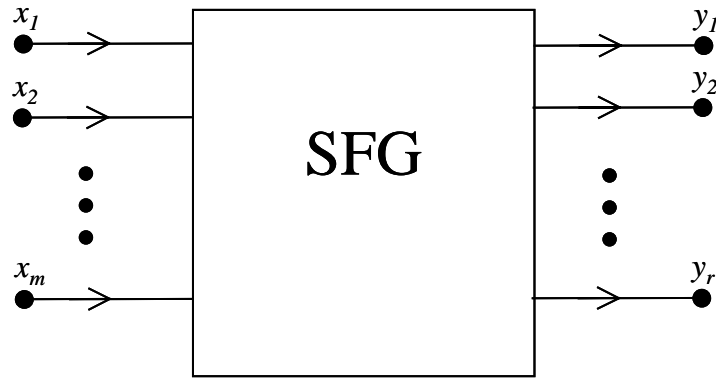


Fig.3.8 – Diagrama de fluxo de sinal para sistema MIMO de m entradas e r saídas.

A aplicação das regras de simplificação enunciadas conduz à eliminação dos nós mistos ficando o sistema representável de acordo com a Fig.3.9.

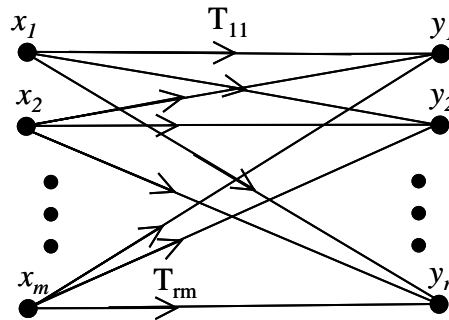


Fig.3.9 – Diagrama de fluxo de sinal simplificado para sistema MIMO de m entradas e r saídas.

Desta forma, cada uma das r saídas pode ser expressa de acordo com (3.1), tratando-se de um sistema linear pode-se, adicionalmente, aplicar o princípio da sobreposição.

$$\begin{aligned}
 y_1 &= T_{11}x_1 + T_{12}x_2 + \dots + T_{1m}x_m \\
 y_2 &= T_{21}x_1 + T_{22}x_2 + \dots + T_{2m}x_m \\
 &\vdots \\
 y_r &= T_{r1}x_1 + T_{r2}x_2 + \dots + T_{rm}x_m
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

Neste sistema de equações T_{ij} denomina-se transmitância global entre a entrada x_j e a saída y_i ; podendo ser determinada recorrendo à fórmula de Mason (3.2). A utilização da fórmula de Mason para simplificação de diagramas de fluxo de sinal constitui uma alternativa sistematizada relativamente à aplicação das regras apresentadas com vista à supressão de nós mistos.

$$T = \frac{\sum_{n=1}^p T_n \Delta_n}{\Delta} \quad (3.2)$$

A transmitância avaliada segundo (3.2) pressupõe a existência de p caminhos directos entre a entrada x_j e a saída y_i ; desta forma define-se:

T_n - Transmitância do caminho directo de ordem n que liga a entrada à saída.

Δ - Determinante do grafo dada por (3.3).

$$\Delta = 1 - \sum L_1 + \sum L_2 - \sum L_3 + \dots \quad (3.3)$$

L_1 - Transmitância de cada ciclo; $\sum L_1$ somatório das transmitâncias de todos os ciclos.

L_2 - Produto das transmitâncias de pares de ciclos disjuntos (que não se tocam); $\sum L_2$ somatório dos produtos das transmitâncias de pares de ciclos disjuntos.

L_3 - O mesmo que L_2 , mas, considerando-se de cada vez 3 ciclos disjuntos.

Por mais complexo que seja o diagrama de fluxo de sinal, existirá um i tal que $L_i = 0$ pois para i suficientemente grande não será possível extrair em simultâneo i ciclos disjuntos; ficando terminada a soma que define Δ .

Δ_n - Determinante do co-factor de ordem n ; avalia-se da mesma forma que Δ mas considerando agora o diagrama de fluxo de sinal que resulta quando se retira o caminho directo T_n .

Para se ilustrar a construção de um diagrama de fluxo de sinal e a determinação de uma função de transferência por aplicação da fórmula de Mason considere-se o Exemplo 3.2 [2].

Exemplo 3.2

Seja um sistema representado pelo diagrama de blocos da Fig.3.10.

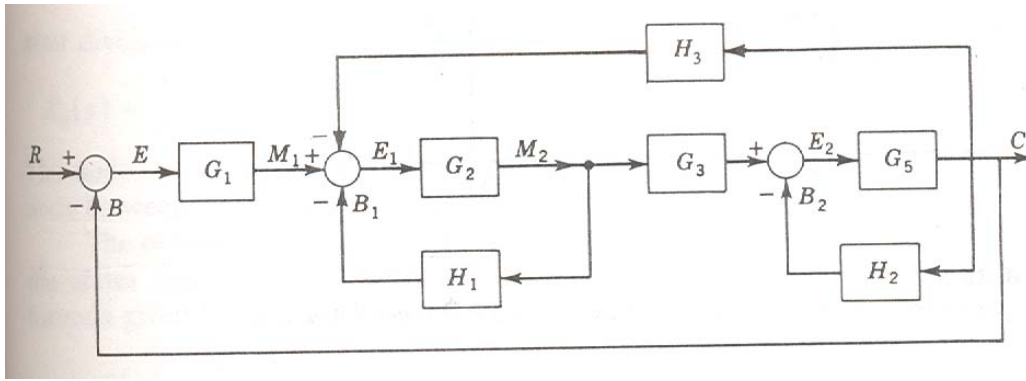


Fig.3.10 – Diagrama de blocos para o sistema do Exemplo 3.2.

A representação do sistema em termos de diagrama de fluxo de sinal deverá ter em conta que cada nó representa um sinal e funciona como somador e cada ramo tem associada uma função de transferência; desta forma, o diagrama de fluxo de sinal correspondente apresenta-se na Fig.3.11.

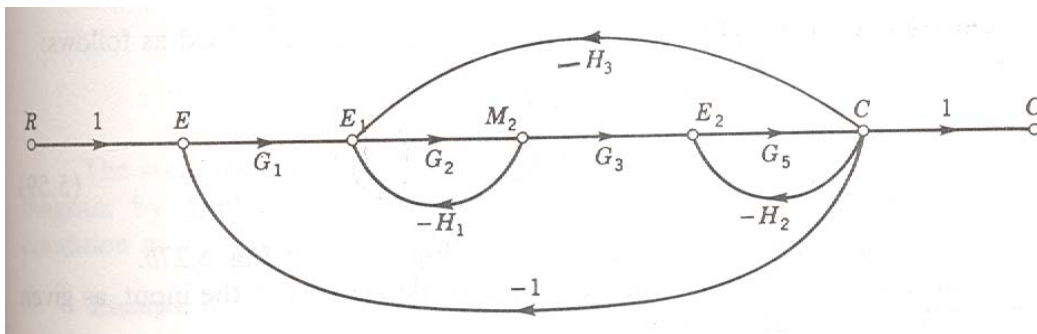


Fig.3.11 – Diagrama de fluxo de sinal para o sistema do Exemplo 3.2.

Para se determinar a função de transferência $\frac{C(s)}{R(s)}$ recorre-se à simplificação do diagrama de fluxo de sinal aplicando-se a fórmula de Mason (3.2).

De acordo com este método começa-se por identificar os caminhos directos, que, tendo em conta a definição da pag. 42 se conclui que existe apenas 1 caminho directo ($p=1$), então, tendo em conta (3.2) a transmitância entre a entrada R e a saída C é dada por (3.4).

$$T = \frac{T_1 \Delta_1}{\Delta} \tag{3.4}$$

O caminho directo, único, é dado por (3.5).

$$T_1 = G_1 G_2 G_3 G_5 \quad (3.5)$$

Avalia-se de seguida o determinante do diagrama Δ de acordo com (3.3). Para tal, observe-se que existem 4 ciclos, assim,

$$\sum L_1 = -G_1 G_2 G_3 G_5 - G_2 G_3 G_5 H_3 - G_2 H_1 - G_5 H_2 \quad (3.6)$$

De seguida verifica-se que existe apenas 1 par de ciclos disjuntos:

$$\sum L_2 = (-G_2 H_1)(-G_5 H_2) = G_2 H_1 G_5 H_2 \quad (3.7)$$

Para o exemplo em estudo verifica-se que não existem ternos de ciclos disjuntos, então $\sum L_3 = 0$.

Entrando com as expressões (3.6) e (3.7) na expressão (3.3), obtém-se o determinante do diagrama dado por (3.8).

$$\Delta = 1 + G_1 G_2 G_3 G_5 + G_2 G_3 G_5 H_3 + G_2 H_1 + G_5 H_2 + G_2 H_1 G_5 H_2 \quad (3.8)$$

No que se refere ao determinante do cofactor Δ_1 verifica-se que, retirando o caminho directo T_1 não restam quaisquer ciclos, então, recorrendo a (3.3) se conclui que $\Delta_1 = 1$.

Por último, utilizando (3.4) chega-se à transmitância equivalente T entre a entrada R e a saída C dada por (3.9).

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_5}{1 + G_1 G_2 G_3 G_5 + G_2 G_3 G_5 H_3 + G_2 H_1 + G_5 H_2 + G_2 H_1 G_5 H_2} \quad (3.9)$$

Referências

- [1] M. I. Ribeiro, *Análise de Sistemas Lineares*, IST Press.
- [2] John J. D'Azzo e Constantine H. Houppis, *Linear Control Systems Analysis and Design*, 3ª ed., McGraw-Hill, 1988.
- [3] J. Martins de Carvalho, *Dynamical Systems and Automatic Control*, Prentice Hall, 1993.
- [4] Richard C. Dorf and Robert H. Bishop, *Modern Control Systems*, 7ª ed., Addison Wesley, 1995.
- [5] Katsuhiko Ogata, *Modern Control Engineering*, 2ª ed., Prentice-Hall, 1990.
- [6] Chi-Tsong Chen, *Analog and Digital Control Systems Design: Transfer-function, state-space and algebraic methods*, Saunders College Publishing, 1993.
- [7] Bahram Shahian, *Control Systems Design using Matlab*, Prentice-Hall, 1993.
- [8] Duane C. Hanselman e Benjamin Kuo, *Matlab Tools for Control Systems Analysis and Design*, Prentice-Hall, 1995.