FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

Redes de Telecomunicações (2006/2007)

Engª de Sistemas e Informática

Trabalho nº4 (2ª aula)

Título: Modelação de tráfego utilizando o modelo de Poisson

Fundamentos teóricos (continuação)

7. Duração das chamadas T_c

Em algumas aplicações é suficiente conhecer o tempo médio de duração das chamadas, ou seja, $E(T_c)=h$. Em outros casos exige-se uma informação mais detalhada, como seja, o conhecimento da função densidade de probabilidade. A distribuição usada normalmente para caracterizar a duração das chamadas telefónicas é a distribuição exponencial negativa. Usando esta distribuição conclui-se que a probabilidade de T_c:

$$P(T_c > t) = \exp(-t/h) \tag{12}$$

8. Estatística do número de chamadas em progresso

Para um grupo de N circuito o número de chamadas em progresso está compreendido entre 0 e N. O comportamento deste grupo pode-se descrever por uma cadeia de Markov com $N+1$ estados, como se representa na Figura 5.

O sistema está no estado j quando o número de circuitos ocupados é igual a j. A chegada de uma chamada faz aumentar o estado do sistema de 1, passando do estado j para o estado k ($k=j+1$). A terminação de uma chamada faz com que o estado do sistema decresça de 1, ou seja, se estiver no estado k passa para o estado j. $P(j)$ é a probabilidade de o sistema se encontrar no estado j e $P(k)$ a probabilidade do sistema se encontrar no estado seguinte k. $P_{j,k}$ é a probabilidade do sistema transitar do estado j para o estado k, enquanto $P_{k,j}$ é a probabilidade de transitar do estado k para o estado j. Assim, as probabilidades $P(0)$, $P(1)$,…$P(N)$ designam-se por **probabilidades de estado**, enquanto $P_{j,k}$, $P_{k,j}$ são designadas por **probabilidades de transição.**

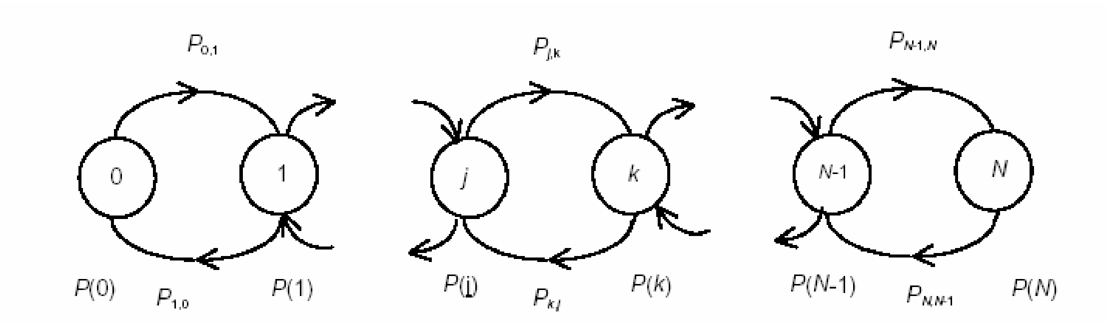

Figura 5. Diagrama de transição de estados para N circuitos.

Considere-se um intervalo de tempo infinitesimal δt com início em t e admita-se que a probabilidade de ocorrerem dois ou mais eventos é desprezável. Os eventos que podem ocorrer em δt são os seguintes:

• Chegada de uma chamada, com probabilidade $P(a)$;
• Terminação de uma chamada, com probabilidade $P(b)$;
• Ausência de mudanças de estado, com probabilidade $1\text{-}P(a)\text{-}P(b)$.

A equação 3 permite concluir que o número médio de chamadas que chegam durante o intervalo de tempo δt é $A\ \delta t/h$. Atendendo ao facto de δt ser um intervalo infinitesimal, tem-se que $A\ \delta t/h<<1$ representa a probabilidade $P(a)$ de uma chamada chegar no intervalo de tempo δt. Assim,

$$P_{j,k} = P(a) = A\delta t / h \qquad (13)$$

Se o tempo médio de duração de uma chamada é h e o número de chamadas em progresso é k, espera-se que no intervalo h terminem em média k chamadas. O número médio de chamadas terminadas em δt será por conseguinte $k\ \delta t/h$. Com base num raciocínio idêntico ao do caso anterior pode-se escrever que

$$P_{k,j} = P(b) = k\delta t / h \qquad (14)$$

Tendo presente que a probabilidade de existirem j chamadas em progresso no instante t é $P(j)$, então a probabilidade de transição de j para k no intervalo de tempo δt é dada por

$$p(j \to k) = P(j)P(a) = P(j)A\delta t / h \qquad (15)$$

Se a probabilidade de haver k chamadas no instante t é $P(k)$, então a probabilidade de uma transição do estado k para o estado j durante δt é

$$\boxed{p(k \to j) = P(k)P(b) = P(k)k\delta t / h} \qquad (16)$$

Admitindo-se que existe um estado de **equilíbrio estatístico.** Segundo esta hipótese, o número médio de chamadas em progresso mantém-se constante (ou, haverá aproximadamente tantas chegadas ao sistema como terminações) o que faz com que a probabilidade de abandonar o estado *j* seja igual à probabilidade de mudança para ele, o que leva a escrever

$$p(j \to k) = p(k \to j) \tag{17}$$

ou seja

$$p(k) = \frac{A}{k} P(j) \tag{18}$$

Repetindo a equação 18 *n* vezes obtém-se

$$P(n) = \frac{A^n}{n!} P(0) \tag{19}$$

A hipótese de um tráfego puramente aleatório implica a existência de um número de fontes muito elevado. Assim, pode-se considerar que *n* varia entre zero e infinito, de modo que a condição de normalização de probabilidade adquire a forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n) = 1 \tag{20}$$

Utilizando-se 19 e 20 obtém-se

$$P(n) = \frac{A^n}{n!} e^{-A} \tag{21}$$

A equação (21) mostra que o número de chamadas em progresso segue uma distribuição de Poisson, o que é consequência do facto de se admitir que a chegada de chamadas também é descrita por uma estatística de Poisson. Esta estatística requer um número de circuitos infinito para escoar as chamadas. Como o número de circuitos é necessariamente finito haverá um certo número de chamadas que são perdidas (ou atrasadas nas redes de pacotes) e a estatística das chamadas em progresso deixa de ser Poissoniana. Na secção seguinte ir-se-á analisar esta questão, considerando um sistema com perdas, isto é, um sistema em que as chamadas são perdidas no caso de não haver circuitos livres.

9. Fórmula de Erlang para sistemas com perdas

Para se calcular o número de chamadas em progresso para um sistema com um número de circuitos finito vai admitir-se que são válidas as seguintes condições:

- tráfego puramente aleatório;

• existe equilíbrio estatístico, isto é, o número de chamadas originadas num determinado período (ex. exemplo hora mais carregada) é em média igual ao número de chamadas terminadas nesse período;
• acesso completo, ou seja, se as chamadas que chegam são ligadas aos circuitos de saída por comutadores, estes não introduzem bloqueio (destaque-se que em grande número de casos práticos isto não é verdade, como se irá ver mais tarde);
• sistema com perdas, ou seja, as chamadas chegadas que não encontram circuitos livres são perdidas.

A condição do sistema com perdas tem implícito, que qualquer chamada perdida não ocupa o equipamento durante nenhum tempo, e que o número máximo da chamadas em progresso não pode ultrapassar o número N de circuitos disponíveis, isto é, $0 \leq n \leq N$. Nesta situação a equação 20 reescreve-se na forma

$$\sum_{n=0}^{N} P(n) = 1 \tag{22}$$

o que, atendendo a (19) permite concluir que:

$$P(0) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N} \frac{A^n}{n!}} \tag{23}$$

Inserindo esta equação em (19 deduz-se que

$$P(n) = \frac{\frac{A^n}{n!}}{\sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!}} \quad 0 \leq n \leq N \tag{24}$$

Esta equação traduz a primeira distribuição de Erlang e representa a probabilidade de no conjunto das N circuitos considerados existirem *n* ocupados (n chamadas em progresso).
A utilização da fórmula de Erlang vai permitir obter o grau de serviço. Para isso, admita-se que o tráfego A é oferecido sequencialmente aos diferentes circuitos. Assim, o tráfego A é, em primeiro lugar, todo oferecido ao 1. Nestas condições, a probabilidade de ocupação deste circuito é dada por

$$p(1) = \frac{A}{1+A} \tag{25}$$

Durante a ocupação do circuito 1 o tráfego será desviado para o circuito 2, que vê oferecido o tráfego perdido pelo circuito 1, ou seja

$$A_{of\,2} = A_{p1} = Ap(1) = \frac{A^2}{1+A} \tag{26}$$

Do tráfego A é portanto, transportado pelo circuito 1

$$A_{t1} = A - A_{of\,2} = A\left(1 - P(1)\right) \tag{27}$$

A probabilidade de ocupação do circuito 2, tendo presene que o circuito 1 está ocupado, será:

$$P(2) = \frac{A^2/2}{1 + A + A^2/2} \tag{28}$$

Idêntico raciocínio para o circuito *N*, permite escrever que:

$$A_{of(N+1)} = A_{pN} = AP(N) = \frac{A^{N+1}/N!}{\sum_{n=0}^{N} A^n/n!} \tag{29}$$

Tendo presente que existem unicamente *N* circuitos, tem-se que o tráfego perdido pelo circuito *N* (que teoricamente é igual ao tráfego oferecido à inexistente tronca *N*+1) dividido pelo tráfego inicial oferecido ao conjunto dos *N* circuitos dá precisamente o grau, B, de serviço oferecido por estes circuitos, ou seja,

$$B = E_{1,N}(A) = \frac{A_{pN}}{A} = \frac{A^N/N!}{\sum_{n=0}^{N} A^n/n!} \tag{30}$$

Esta expressão é conhecida como fórmula de Erlang B, e desempenha um papel relevante na teoria do teletráfego. A fórmula de Erlang B pode-se ainda simplificar por

$$E_{1,N}(A) \approx= \frac{A^N}{N!e^A} \tag{31}$$

expressão idêntica à da distribuição de Poisson, que é, por vezes, conhecida como fórmula de Grinstead. Essa simplificação baseou-se na aproximação

$$e^A \approx \sum_{i=0}^{N} \frac{A^i}{i!} \tag{32}$$

Esta aproximação é válida para $A^N / N! << 1$

Execução Prática

Exercício 2 (Duração uma aula)

a) Simulação do modelo de tráfego Erlang-B

Considere um sistema de perda com acesso total a N canais e represente a actividade do conjunto de utilizadores que acedem ao sistema através de uma fonte que gera chamadas a uma taxa λ (processo de Poisson) e que cada chamada tem uma duração média d_m, com distribuição exponencial (modelo Erlang-B).

Desenvolva um programa de simulação deste sistema, que lhe permita obter:

- o estimador da probabilidade de bloqueio B;
- o estimador do tráfego médio transportado por canal At/N;
- os estimadores das probabilidades de o sistema estar em cada um dos estados possíveis (0 a N);
- o histograma das durações das chamadas;
- o estimador do valor médio da duração das chamadas.

b) Simulação do tráfego de chamadas numa estação base GSM

Considere o caso concreto de uma estação base de uma rede GSM, à qual é oferecido um tráfego com as seguintes características, na hora mais carregada: taxa global de chegada de chamadas λ =1,5/s; duração média das chamadas d_m=105 s.

Usando o programa anterior, e por iteração realizada através da entrada de dados pela consola, dimensione o número mínimo N de canais que o sistema requer, sem exceder a probabilidade de bloqueio de B=1%.

Compare os resultados obtidos com os valores previstos teoricamente.