

**Mestrado Integrado em  
Engenharia Electrónica e Telecomunicações**

**Fundamentos de Telecomunicações I**  
[www.deei.fct.ualg.pt/FTel/html/](http://www.deei.fct.ualg.pt/FTel/html/)

Sérgio M.M. Jesus  
[sjesus@ualg.pt](mailto:sjesus@ualg.pt)

Faculdade de Ciências e Tecnologia  
Universidade do Algarve  
1999/00

Versão 2.6a - 31/Outubro/2008  
(<http://www.deei.fct.ualg.pt/FTel/fdt-V2.6a.pdf> e [fdt-V2.6a-X2.pdf](http://www.deei.fct.ualg.pt/FTel/fdt-V2.6a-X2.pdf))

## Últimas Revisões (V2.6, Setembro 2008)

O material deste texto de apoio foi inicialmente escrito para a disciplina de Sistemas de Comunicação, do curso de Engenharia de Sistemas e Computação em 1999/00, quando de uma substituição isolada do docente habitual da disciplina. O seu conteúdo nesta segunda versão foi, primeiramente adaptado às necessidades da nova disciplina de Fundamentos de Telecomunicações da Licenciatura em Sistemas e Informática (Ramo de Sistemas) e em seguida ao novo curso de MIEET, através da inclusão do capítulo 7 modificado desde a versão 2.4 e o capítulo 8 na versão 2.6. O capítulo 2 contém o material de preparação de teoria dos sinais específico para a área das comunicações. Os capítulos 3 e 5 são baseados em [1], enquanto os capítulos 4, 6, 7 e 8 se baseiam em [2]. A parte de aulas práticas inspira-se em [3]. Como habitualmente este texto de apoio encontra-se disponível em vários formatos: i) uma versão pdf da sebenta com paginação frente e verso, ii) uma outra com duas páginas A5 por cada página A4, mais económica em papel e iii) uma versão **HTML ONLINE** completa da sebenta em [www.deei.fct.ualg.pt/FTel/html/](http://www.deei.fct.ualg.pt/FTel/html/).

## NOTA PRÉVIA

O material contido neste conjunto de apontamentos é cedido a título gratuito e para ser utilizado exclusivamente como texto de apoio da disciplina de Fundamentos de Telecomunicações do curso de Engenharia de Sistemas e Informática da Universidade do Algarve. Este texto é formado pelos apontamentos de preparação da disciplina baseando-se nos livros contidos na bibliografia e poderá ter erros involuntários, de cujas consequências o autor não poderá ser responsabilizado. A consulta deste texto não dispensa (e aliás aconselha) a de outras obras, nomeadamente as citadas na bibliografia. Boa leitura !...

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>Sinais e sistemas de comunicações</b>	<b>12</b>
2.1	Modulação e sinais passa-banda . . . . .	12
2.2	Sinais e sistemas passa-banda e a transformada de Hilbert . . . . .	13
2.2.1	Definição de sinais passa-banda . . . . .	13
2.2.2	Transformada de Hilbert . . . . .	14
2.2.3	Propriedades . . . . .	15
2.2.4	Passagem em banda-base . . . . .	18
2.2.5	Espectro de sinais passa-banda . . . . .	19
2.2.6	Sistemas passa-banda . . . . .	19
2.2.7	Resposta de sistemas passa-banda . . . . .	20
2.2.8	Energia e potência . . . . .	21
2.3	Representação espectral de sinais aleatórios . . . . .	22
2.3.1	Noções preliminares . . . . .	23
2.3.2	Densidade espectral de potência . . . . .	25
2.3.3	Sinais aleatórios passa-banda . . . . .	29
2.3.4	Ruído branco passa-banda . . . . .	32
2.4	Sinais cicloestacionários . . . . .	32
2.5	Representação de sinais em expansões ortogonais . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Canais de transmissão</b>	<b>38</b>
3.1	Linhas de transmissão . . . . .	38
3.2	Fibra óptica . . . . .	40
3.3	Transmissão rádio . . . . .	42

3.4	Modelos matemáticos de canais de transmissão . . . . .	43
3.4.1	Canal de ruído aditivo . . . . .	43
3.4.2	Canal de filtro linear invariante . . . . .	43
3.4.3	Canal de filtro linear variante no tempo . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Quantidade de informação, quantificação e codificação</b>	<b>45</b>
4.1	Quantidade de informação e entropia . . . . .	46
4.2	Quantificação . . . . .	47
4.2.1	Quantificação uniforme . . . . .	48
4.2.2	Quantificação não uniforme . . . . .	48
4.3	Codificação . . . . .	49
4.3.1	Com palavras de comprimento fixo . . . . .	50
4.3.2	Com palavras de comprimento variável . . . . .	50
4.3.3	Codificação de sinais analógicos . . . . .	54
4.3.4	Codificação em sub-bandas . . . . .	58
4.3.5	Codificação baseada em modelos do sinal . . . . .	58
<b>5</b>	<b>Modulação analógica de onda sinusoidal</b>	<b>60</b>
5.1	Modulação de amplitude com duas bandas laterais (AM-DSB) . . . . .	60
5.2	Modulação de amplitude com supressão de portadora (AM-CS) . . . . .	63
5.3	Modulação de amplitude de banda lateral única (AM-SSB) . . . . .	64
5.4	Modulação de amplitude vestigial (VSB) . . . . .	67
5.5	Modulação de amplitude em quadratura (QAM) . . . . .	69
5.6	Modulação de ângulo . . . . .	70
5.7	Multiplexagem no tempo e na frequência . . . . .	72

<b>6</b>	<b>Receptores analógicos</b>	<b>75</b>
6.1	Desmodulação . . . . .	75
6.1.1	Extracção do envelope complexo . . . . .	75
6.1.2	Extracção do envelope e da fase . . . . .	77
6.2	Receptores de onda sinusoidal . . . . .	77
6.3	Sincronização . . . . .	78
6.4	Detecção FM com PLL . . . . .	80
<b>7</b>	<b>Modulação de impulsos</b>	<b>83</b>
7.1	Introdução . . . . .	83
7.2	Generalidades . . . . .	83
7.3	Medidas de desempenho . . . . .	86
7.4	Escolha da forma de pulso . . . . .	87
7.4.1	Densidade espectral do sinal emitido . . . . .	87
7.4.2	Interferência intersimbólica . . . . .	93
7.4.3	Diagrama de olho . . . . .	96
7.5	Sinalização por modulação de impulsos . . . . .	98
7.5.1	Modelação por amplitude de impulsos <i>Amplitude Shift Keying - ASK</i> . . . . .	98
7.5.2	Modulação por fase de impulsos <i>(Phase Shift Keying - PSK)</i> . . . . .	100
7.5.3	Modulação de amplitude em quadratura <i>(Quadrature Amplitude Modulation - QAM)</i> . . . . .	101
7.5.4	Modulação de impulsos em frequência <i>(Frequency Shift Keying - FSK)</i> . . . . .	102
7.6	Modulação de impulsos em banda passante . . . . .	103
<b>8</b>	<b>Receptor óptimo em presença de ruído aditivo</b>	<b>106</b>

8.1	Receptor - desmodulador . . . . .	106
8.2	Equivalente em banda base . . . . .	109
8.3	O receptor óptimo . . . . .	111
8.4	O filtro adaptado como receptor óptimo . . . . .	114
8.5	O receptor óptimo em banda base . . . . .	116
8.5.1	Sinalização em banda base . . . . .	116
8.5.2	O receptor óptimo . . . . .	117
8.5.3	O filtro adaptado ( <i>matched-filter</i> ) . . . . .	118
8.5.4	O detector . . . . .	119
8.5.5	Sinais ortogonais, antipodais e on-off . . . . .	120
8.5.6	Sinalização multinível . . . . .	121
<b>A</b>	<b>Tabelas e relações particulares</b>	<b>123</b>
A.1	Transformada de Fourier . . . . .	123
A.2	Relações Trigonométricas Usuais . . . . .	125
A.3	Desenvolvimentos em série . . . . .	126
A.4	Algumas relações úteis . . . . .	127
A.4.1	Integrais . . . . .	127
A.4.2	Séries . . . . .	127
A.4.3	Derivadas . . . . .	127
A.4.4	Trigonometria do círculo . . . . .	127
<b>B</b>	<b>Estimação espectral</b>	<b>128</b>
B.1	Caracterização de estimadores . . . . .	128
B.2	Estimadores para a correlação . . . . .	128
B.3	Estimadores espectrais . . . . .	131
B.3.1	Método do correlograma . . . . .	131

B.3.2	Método do periodograma . . . . .	133
B.3.3	Periodograma de Daniell . . . . .	134
B.3.4	Periodograma de Bartlett . . . . .	135
B.3.5	Periodograma de Welch . . . . .	136
B.3.6	Método combinado periodograma/correlograma . . . . .	136
<b>C</b>	<b>Folhas de Exercícios</b>	<b>142</b>
C.1	Revisões sobre sistemas e sinais . . . . .	142
C.2	Revisões sobre probabilidades e variáveis aleatórias . . . . .	144
C.3	Sinais para comunicações . . . . .	147
C.4	Sinais em banda passante . . . . .	149
C.5	Sinais aleatórios . . . . .	151
C.6	Modulação analógica de onda sinusoidal . . . . .	153
C.7	Modulação digital de impulsos . . . . .	155
<b>D</b>	<b>Folhas de Trabalhos Práticos</b>	<b>157</b>
D.1	Folha 1 - Transmissão de sinais PM em banda passante . . . . .	158
D.2	Folha 2 - Introdução aos sinais aleatórios . . . . .	161
D.3	Folha 3 - Sinais aleatórios e densidade espectral . . . . .	163
D.4	Folha 4 - Modulação analógica e sinais passa-banda . . . . .	164
D.5	Folha 5 - Sinalização e detecção em banda base . . . . .	166
<b>E</b>	<b>Exames de anos anteriores</b>	<b>168</b>
E.1	Exame de Fundamentos de Telecomunicações - Junho 2004 . . . . .	168
E.2	Exame de Fundamentos de Telecomunicações - Julho 2004 . . . . .	170
E.3	Exame de Fundamentos de Telecomunicações I - 2007/08 (normal) . . . . .	172
E.4	Exame de Fundamentos de Telecomunicações I - 2007/08 (recurso) . . . . .	174

# 1 Introdução

Sistemas de comunicação são todos os instrumentos que permitem transmitir informação entre dois pontos distantes. Geralmente o ponto de partida da informação é chamado *emissor*, enquanto o ponto de chegada é chamado *receptor*. Entre o emissor e o receptor encontra-se o *meio de transmissão* ou simplesmente *canal* de transmissão. Frequentemente pretende-se que a transmissão da informação seja efectuada nos dois sentidos, através do mesmo canal de transmissão, e então o emissor é também receptor e vice-versa. O esquema de blocos da figura 1.1 representa um sistema de comunicações onde se podem ver os seus três componentes principais, emissor, canal e receptor, mas também os principais sub-blocos constituintes de cada um destes. Encontramos sistemas de comunicação seja no emissor, seja no receptor. Geralmente

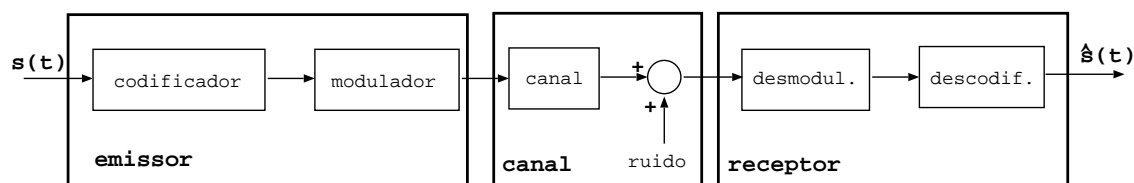


Figura 1.1: esquema de blocos tipo para um sistema de comunicações.

o papel do sistema de comunicação no emissor é o de adaptar o sinal a transmitir ao canal de transmissão. No receptor trata-se de tanto quanto possível recolocar o sinal recebido sob a forma original enviada pelo emissor. Tendo em conta que o sinal foi transformado no emissor e sofreu alterações durante a sua passagem pelo canal de transmissão - nomeadamente a influência de ruído e outras distorções - o papel do sistema de recepção será de colocar o sinal recebido numa forma o mais fiel quanto possível em relação ao sinal emitido.

Assim, ao nível do emissor temos pelo menos dois blocos que são o codificador e o modulador. O codificador permite transformar o sinal a transmitir, fornecido pela fonte, de forma a reduzir tanto quanto possível a quantidade de informação necessária e suficiente para permitir a sua recuperação, com uma taxa de erro aceitável, no receptor. Na prática trata-se frequentemente de uma amostragem de sinal analógico em discreto, numa quantificação de amplitude, numa codificação e finalmente numa compressão da informação. Todas estas etapas, algumas das quais são opcionais, dependem por um lado do tipo de sinal que se apresenta à entrada, do sinal que deve entrar no modulador e também do canal de transmissão considerado. O modulador pode ser de muitos tipos e depende essencialmente do canal de transmissão considerado. Em geral podemos classificar o modulador como podendo ser analógico ou digital, consoante o sinal que se apresenta à sua entrada, sendo que o sinal de saída a emitir para o meio físico de transmissão é quase sempre analógico.

O canal de transmissão representa o meio físico onde o sinal é enviado entre o



emissor e o receptor. Como exemplos de canais de transmissão podemos citar: a atmosfera, através da qual podemos enviar ondas electromagnéticas (p. ex. rádio, televisão, telemóvel, etc...), o cabo eléctrico bifilar (telefone, computador a baixo débito), o cabo coaxial (computador, TV por cabo,...) e a fibra óptica, a água (sonar, telefone submarino, etc...) e o vácuo (satélite, naves espaciais, etc..). Cada um destes exemplos de canais de transmissão tem características próprias que necessitam sistemas de comunicação expressamente dedicados. Existe hoje em dia uma grande variedade de sistemas de comunicação, cada um mais sofisticado que o outro. Uma comunicação por telefone pode, por exemplo, utilizar vários canais de transmissão, passando de cabo bifilar para linha digital, depois fibra óptica em seguida via rádio para um satélite, etc... No entanto uma das características essenciais de cada canal de transmissão é a sua capacidade, *i.e.*, em termos simples, a quantidade máxima de informação que podemos transmitir através dele sem distorção apreciável. As noções de quantidade de informação e de distorção serão introduzidas de forma precisa mais adiante.

No receptor efectuam-se as operações inversas daquelas efectuadas no emissor: desmodulação e descodificação. Estas operações dependem fortemente do que foi feito no emissor, considerando no entanto que o sinal de entrada no receptor se encontra transformado pelo canal e, em particular, corrompido com ruído. O sinal recebido tem portanto uma componente aleatória mais ou menos importante dependendo da natureza e nível de ruído do canal. O receptor é normalmente visto como um detector, cuja característica mais importante é a probabilidade de deteção para uma determinada taxa de erro admissível (*receiver operating characteristics - ROC*). Segundo os casos, o desmodulador pode por sua vez ser separado em vários sub-blocos como por exemplo, o filtro de recepção, destinado a compensar a distorção introduzida pelo meio físico de transmissão, o amostrador e o decisor. À saída do receptor dever-se-à obter um sinal  $\hat{s}(t)$ , tanto quanto possível, idêntico ao sinal emitido.

### **Exemplo: o eco**

A título de exemplo das dificuldades que podem ser encontradas na transmissão de informação entre dois pontos escolhemos o caso da voz num local com eco. Vamos supôr que um explorador tenta comunicar com um companheiro utilizando a voz e que ambos se encontram na escalada de uma ravina rochosa num vale estreito. Sabemos que nesta situação o sinal acústico emitido tem tendência a chegar ao receptor através de mais do que um caminho, *i.e.*, para além do som ouvido em linha recta ouvem-se também repetições desse mesmo som resultado da reflexão nas paredes rochosas. Para simplificar vamos supor que o a um som emitido pelo explorador, o seu companheiro recebe dois: um em linha recta atenuado de uma factor  $\alpha_0$  e atrasado de  $\tau_0$  segundos e um outro atenuado de  $\alpha_1$  e atrasado de  $\tau_1$  segundos. Assim podemos escrever que para o sinal emitido  $s(t)$  obtemos o sinal recebido  $r(t)$  tal que

$$r(t) = \alpha_0 s(t - \tau_0) + \alpha_1 s(t - \tau_1) \quad (1-0.1)$$

onde obviamente  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$  são  $< 1$  e  $\tau_0 = d/c$  onde  $d$  é a distância em metros entre os dois exploradores e  $c$  é a velocidade de propagação do som no ar. Claro que os coeficientes  $\alpha_i$  dependem das distâncias percorridas, mas geralmente, dado que a distância percorrida pelo eco é maior do que a distância percorrida pelo sinal em linha recta temos que  $\alpha_1 < \alpha_0$  e que  $\tau_1 > \tau_0$ . Não sabendo onde é que o som se vai reflectir, torna-se impossível determinar seja  $\alpha_1$ , seja  $\tau_1$ . Em particular, se a reflexão se der numa parede próxima da linha de propagação do som em linha recta, pode acontecer que  $\Delta\tau = \tau_1 - \tau_0$  seja inferior à duração do sinal  $s(t)$ . Nessas condições o eco sobrepõe-se ao sinal em linha recta e torna-se difícil, e por vezes impossível, compreender a mensagem enviada. Dizemos neste caso que temos distorção devida a múltiplos caminhos entre o emissor e o receptor. O problema que se coloca no receptor é o de tentar compreender a mensagem. Existem várias formas de resolver o problema. A primeira constatação que se pode fazer é de que se os atrasos  $\tau_0$  e  $\tau_1$ , ou mesmo apenas a sua diferença  $\Delta\tau = \tau_0 - \tau_1$ , fosse conhecidos, então poderíamos compensá-los no sinal recebido através de um filtro. Pode-se determinar a função de transferência desse filtro através da TF de (1-0.1)

$$\begin{aligned} R(\omega) &= \text{TF}[r(t)] \\ &= \alpha_0 S(\omega) e^{-j\omega\tau_0} + \alpha_1 S(\omega) e^{-j\omega\tau_1} \end{aligned} \quad (1-0.2)$$

$$= H(\omega) S(\omega) \quad (1-0.3)$$

onde, para se obter  $S(\omega)$  a partir de  $R(\omega)$  é necessário

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \frac{1}{H(\omega)} R(\omega) \\ &= G(\omega) R(\omega), \end{aligned} \quad (1-0.4)$$

com o filtro inverso  $G(\omega)$  dado por

$$G(\omega) = H^{-1}(\omega) = [\alpha_0 e^{-j\omega\tau_0} + \alpha_1 e^{-j\omega\tau_1}]^{-1}. \quad (1-0.5)$$

No entanto, na prática, os atrasos temporais do eco não são conhecidos e  $G(\omega)$  não pode ser facilmente calculado através de (1-0.5). Uma das estratégias para estimar os atrasos consiste em emitir um sinal conhecido do receptor, naquilo que é normalmente chamado como um sequência de treino. Pode-se então correlacionar o sinal recebido com o sinal emitido obtendo-se

$$\begin{aligned} y(\tau) &= \int r(t) s(t - \tau) d\tau \\ &= \int [\alpha_0 s(t - \tau_0) + \alpha_1 s(t - \tau_1)] s(t - \tau) d\tau \\ &= \alpha_0 \int s(t - \tau_0) s(t - \tau) d\tau + \alpha_1 \int s(t - \tau_1) s(t - \tau) d\tau \\ &= \alpha_0 y_s(\tau - \tau_0) + \alpha_1 y_s(\tau - \tau_1) \end{aligned} \quad (1-0.6)$$

onde  $y_s(\tau)$  é a função de autocorrelação do sinal emitido  $s(t)$ . Tendo em conta que a função de autocorrelação é uma função monótona pode-se deduzir que os dois picos de  $y(\tau)$  terão lugar para  $\tau = \tau_0$  e  $\tau = \tau_1$ , de onde estes dois valores podem ser directamente estimados. Este processo de emissão de sequências de treino, conhecidas do emissor e do receptor, antes da mensagem propriamente dita é corrente em quase todos os sistemas submetidos a fenómenos multicaminhos, como é por exemplo o caso do actual sistema GSM de telefonia móvel. O problema deste sistema é que por vezes os pontos de reflexão são eles mesmo móveis ou o receptor ou emissor também se movem. Quando a geometria do problema muda ao longo do tempo, os atrasos também se alteram e o filtro estimado a um dado instante já não é válido noutra instante. Dizemos nesse caso que temos um canal de transmissão de estrutura variante no tempo. É claro que nesse caso se pode refazer um novo treino, voltando a construir um filtro correcto. Obviamente que este procedimento não pode vir a ser repetido constantemente pois enquanto o sistema efectua o treino não envia mensagens e a taxa de transmissão do sistema diminui. Existem outras técnicas de extração do sinal útil sem fazer apelo a sequências de treino que utilizam propriedades estatísticas do sinal emitido, para estimar constantemente a estrutura do canal de transmissão. Estas são ditas as técnicas "cegas".

### Resumo do capítulo 1:

- noções gerais sobre os subsistemas que compoem um sistema de comunicações;
- descrição genérica das dificuldades enfrentadas num sistema de comunicações tais como o ruído e a função do canal de transmissão;
- um exemplo simples do dia a dia que retrata o problema da interferência intersimbólica encontrado em canais de transmissão com *fading*. O exemplo também introduz a noção de receptor - correlacionador como detector dos parâmetros característicos do canal, mesmo que sob uma forma simplificada.

## 2 Sinais e sistemas de comunicações

Num sistema de comunicações a mensagem é transmitida da fonte para o receptor através do canal de transmissão graças a um sistema emissor do lado da fonte e a um sistema receptor do lado do receptor. A informação a transmitir é codificada na fonte sob a forma de um sinal que é geralmente uma voltagem. A variação dessa voltagem ao longo do tempo contém a informação desejada - diz-se que o sinal serve de suporte da informação.

Geralmente, a tensão variável emitida na fonte é uma tensão, dita, analógica, *i.e.*, o sinal pode ser representado por uma função de variável real do tempo,  $v(t)$ , se bem que hoje em dia existam já uma grande quantidade de fontes de informação discretas por natureza. No entanto, grande parte dos sistemas de comunicação modernos efectuem operações em sinais sob forma discreta e por isso seremos levados a manipular seja sinais contínuos seja discretos. A emissão de um sinal modulado num dado canal de transmissão requer normalmente a utilização de uma banda de frequência em torno a uma portadora. De modo a facilitar a caracterização dos sistemas de emissão e de recepção e sem perda de generalidade os sinais passa-banda são transformados nos seus equivalentes passa-baixo de forma a tornar o sistema independente da banda de frequências de transmissão.

### 2.1 Modulação e sinais passa-banda

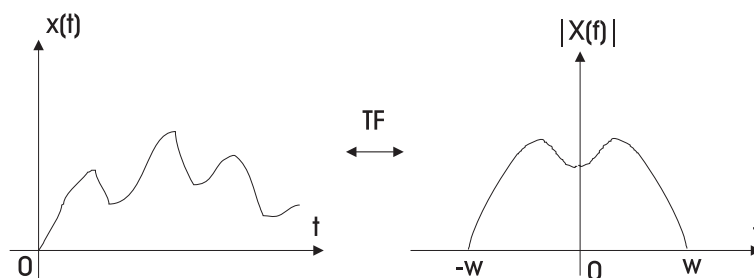


Figura 2.1: espectro do sinal original.

Consideremos um sinal  $x(t)$ , passa-baixo, com uma banda limitada, tendo um espectro  $|X(f)|$  que é nulo fora de uma banda  $(-W, W)$  (ver figura 2.1). Num problema de comunicações servimo-nos em geral de uma portadora de frequência  $\omega_0$ , de tal modo que o sinal modulado é

$$v(t) = x(t) \cos \omega_0 t, \quad \omega_0 = 2\pi f_0 \quad (2-1.1)$$

Como sabemos que a representação frequencial de  $\cos \omega_0 t$  é constituída por dois Diracs colocados em  $\omega = -\omega_0$  e em  $\omega = \omega_0$  o produto temporal da (2-1.1) torna-se numa

convolução no domínio da frequência. O resultado é

$$V(f) = X(f) * \text{TF}[\cos(2\pi f_0 t)] = \frac{1}{2}X(f + f_0) + \frac{1}{2}X(f - f_0) \quad (2-1.2)$$

Isto está ilustrado na figura 2.2. Este resultado que serve de introdução à problemática da modulação e à noção de sinais passa-banda tem dois aspectos interessantes: 1) é que a simples multiplicação de um sinal por uma senoide tem por efeito a deslocação na frequência desse sinal duma quantidade igual à frequência da senoide e 2) constata-se facilmente que para que o sinal modulador mantenha o seu espectro intacto a frequência da senoide (normalmente chamada “portadora”) tem de ser igual ou superior a duas vezes a largura de banda do sinal modulador, *i.e.*,  $f_s \geq 2W$ .

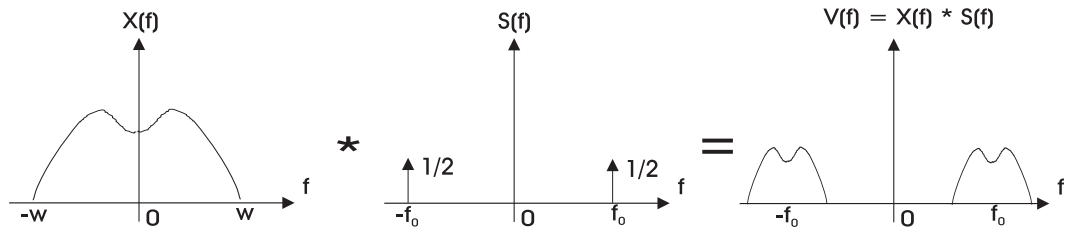


Figura 2.2: espectro do sinal modulado.

## 2.2 Sinais e sistemas passa-banda e a transformada de Hilbert

Como já tivemos a ocasião de mencionar na introdução, um dos papéis desempenhados pelos sistemas de comunicação colocados no emissor, é o de adaptar o sinal ao canal de comunicação. Frequentemente, uma das características essenciais do canal de comunicação é de que a sua banda de frequências é limitada em torno a um determinado valor: dizemos que se trata de um canal “passa-banda” - é o caso do canal rádio-frequência. O sistema de comunicação emissor terá então de transformar o sinal contendo a mensagem a emitir num sinal passa-banda compatível com o canal de transmissão. Vamos agora descrever o formalismo matemático que permite representar sinais passa-banda e a sua manipulação ao longo da cadeia de transmissão.

### 2.2.1 Definição de sinais passa-banda

Vamos considerar o sinal passa-banda  $s(t)$  com o espectro  $S(f)$ . Primeiramente vamos considerar um novo sinal que contenha apenas a parte positiva do espectro de  $s(t)$ ,

$$S_+(f) = 2u(f)S(f), \quad (2-2.1)$$

onde  $u(f)$  é a função degrau unidade e o factor 2 tem em conta a conservação da energia, *i.e.*,  $S_+(f)$  e  $S(f)$  têm a mesma energia. No domínio do tempo temos

$$s_+(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_+(f) e^{j2\pi ft} df, \quad (2-2.2)$$

$$= \text{TF}^{-1}[2u(f)] * \text{TF}^{-1}[S(f)]. \quad (2-2.3)$$

Visto que (ver apêndice A.1)

$$\text{TF}^{-1}[2u(f)] = \delta(t) + \frac{j}{\pi t}, \quad (2-2.4)$$

temos

$$s_+(t) = \left[ \delta(t) + j \frac{1}{\pi t} \right] * s(t). \quad (2-2.5)$$

O sinal  $s_+(t)$  é chamado *pre-envelope* ou *sinal analítico* de  $s(t)$ , e não é mais do que uma versão complexa de  $s(t)$ , cuja parte real é o próprio  $s(t)$  e a parte imaginária é a Transformada de Hilbert de  $s(t)$ , que definimos de seguida.

### 2.2.2 Transformada de Hilbert

A partir do segundo termo do segundo membro de (2-2.5) define-se

$$\hat{s}(t) = \frac{1}{\pi t} * s(t), \quad (2-2.6)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau, \quad (2-2.7)$$

como sendo a *Transformada de Hilbert* de  $s(t)$ , cuja notação é

$$\text{H}[s(t)] = \frac{1}{\pi} \int \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau. \quad (2-2.8)$$

Uma forma alternativa de ver a transformada de Hilbert é de considerar que o sinal  $\hat{s}(t)$  pode ser visto como o sinal de saída de um filtro cuja resposta impulsiva é

$$h(t) = \frac{1}{\pi t}, \quad -\infty < t < \infty \quad (2-2.9)$$

excitado pelo sinal  $s(t)$  à entrada. Este filtro é então chamado um transformador de Hilbert e a sua resposta em frequência escreve-se

$$H(f) = \text{TF}[h(t)] = -j \text{sgn}(f) = \begin{cases} -j & f > 0 \\ 0 & f = 0 \\ j & f < 0 \end{cases}. \quad (2-2.10)$$

Podemos notar que a função de transferência do filtro de Hilbert é tal que o seu módulo é  $|H(f)| = 1$  (salvo para o ponto  $f = 0$ ) e a sua fase é

$$\Phi(f) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & f > 0 \\ \frac{\pi}{2} & f < 0 \end{cases}, \quad (2-2.11)$$

o que nos faz dizer que este filtro se comporta como um desfasador puro de  $\pi/2$  para todas as frequências do sinal de entrada, enquanto a amplitude não é alterada.

### 2.2.3 Propriedades

**2.2.3.1 TF da TH:** porventura a propriedade mais útil na manipulação da TH é o cálculo da sua TF. Dado (2-2.6) podemos escrever a TF da TH como

$$\begin{aligned} \text{TF}[\hat{s}(t)] &= \text{TF}\left[\frac{1}{\pi t} * s(t)\right], \\ &= \text{TF}\left[\frac{1}{\pi t}\right] S(f), \\ &= -j\text{sgn}(f)S(f), \end{aligned} \quad (2-2.12)$$

resultado que utilizaremos abundantemente a seguir.

**2.2.3.2 TH de uma constante:** a transformada de Hilbert de uma constante é zero, i.e.,

$$\begin{aligned} \hat{c} &= \text{TH}[c] \\ &= c * \left[\frac{1}{\pi t}\right] \end{aligned} \quad (2-2.13)$$

calculando a TF de ambos os termos

$$\text{TF}[\hat{c}] = c\delta(f)[-j\text{sgn}(f)] = 0. \quad (2-2.14)$$

e portanto a sua  $\text{TF}^{-1}$  é igualmente nula.

**2.2.3.3 TH da TH:** calculando a transformada de Hilbert duas vezes permite obter o negativo do sinal original,

$$\begin{aligned} \text{TH}[\hat{x}(t)] &= \text{TH}\left[x(t) * \left[\frac{1}{\pi t}\right]\right] \\ &= x(t) * \left[\frac{1}{\pi t}\right] * \left[\frac{1}{\pi t}\right] \end{aligned} \quad (2-2.15)$$

calculando a TF

$$\begin{aligned}\text{TF}[\text{TH}[\hat{x}(t)]] &= X(f)[-j\text{sgn}(f)][-j\text{sgn}(f)] \\ &= -X(f)\end{aligned}\tag{2-2.16}$$

e daí o resultado procurado.

**2.2.3.4 Um sinal e a sua TH são ortogonais:** demonstra-se facilmente que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\hat{x}(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{TF}[x(t)\hat{x}(t)]df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) * \hat{X}(f)df \\ &= j \int_{-\infty}^0 X(f) * X(f)df - j \int_0^{\infty} X(f) * X(f)df \\ &= 0.\end{aligned}\tag{2-2.17}$$

**2.2.3.5 TH do produto de convolução:** a TH do produto de convolução escreve-se

$$\begin{aligned}\text{TH}[x(t) * h(t)] &= x(t) * h(t) * \left[ \frac{1}{\pi t} \right] \\ &= \hat{x}(t) * h(t) \\ &= x(t) * \hat{h}(t).\end{aligned}\tag{2-2.18}$$

**Exemplo 2.1:** calcular a TH do sinal

$$x(t) = \exp(j\omega_c t)$$

é fácil de determinar que

$$\begin{aligned}\text{TF}[\text{TH}[\exp(j\omega_c t)]] &= \text{TF}[\exp(j\omega_c t)][-j\text{sgn}(f)] \\ &= -j\delta(f - f_c)\text{sgn}(f)\end{aligned}$$

e daí que calculando a  $\text{TF}^{-1}$  desta expressão se obtenha o resultado pretendido

$$\begin{aligned}\text{TH}[x(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} -j\text{sgn}(f)\delta(f - f_c) \exp(j2\pi ft)df \\ &= -j\text{sgn}(f_c) \exp(j\omega_c t).\end{aligned}$$

finalmente podemos deduzir do resultado precedente que

$$\text{TH}[\exp(j\omega_c t + \theta)] = -j\text{sgn}(f_c) \exp(j\omega_c t + \theta).$$



ainda a partir deste resultado podemos facilmente deduzir que

$$\text{TH}[\cos \omega_c t] = \text{sgn}(f_c) \sin \omega_c t, \quad (2-2.19)$$

$$\text{TH}[\sin \omega_c t] = -\text{sgn}(f_c) \cos \omega_c t, \quad (2-2.20)$$

e também por combinação das relações precedentes

$$\text{TH}[\cos(\omega_c t + \theta)] = \text{sgn}(f_c) \sin(\omega_c t + \theta) \quad (2-2.21)$$

$$\text{TH}[\sin(\omega_c t + \theta)] = -\text{sgn}(f_c) \cos(\omega_c t + \theta). \quad (2-2.22)$$

**Exemplo 2.2:** calcular a TH do sinal

$$x(t) = b(t) \exp(j\omega_c t) \quad (2-2.23)$$

onde o sinal  $b(t)$  é uma função passa-baixo limitada dentro da banda espectral  $[-W, W]$ . Prova-se então que

$$\hat{x}(t) = -j \text{sgn}(f_c) b(t) \exp(j\omega_c t) \quad (2-2.24)$$

onde se supõe que  $|f_c| > W$ . Deixamos a demonstração deste resultado como exercício para as aulas TP. Simultaneamente, tendo em conta os resultados acima, podemos escrever

$$\text{TH}[b(t) \exp(j\omega_c t + \theta)] = -j \text{sgn}(f_c) b(t) \exp(j\omega_c t + \theta). \quad (2-2.25)$$

Vamos agora supôr que temos duas funções passa-baixo  $x_c(t)$  e  $x_s(t)$  cujo espectro se encontra contido no intervalo  $[-f_c, f_c]$  com  $f_c > 0$ . Assim, combinando (2-2.19) - (2-2.20) com (2-2.24), podemos dizer que

$$\text{TH}[x_c(t) \cos \omega_c t] = x_c(t) \sin \omega_c t \quad (2-2.26)$$

$$\text{TH}[x_s(t) \sin \omega_c t] = -x_s(t) \cos \omega_c t \quad (2-2.27)$$

a partir das quais podemos ainda dizer que a TH de

$$x(t) = x_c(t) \cos \omega_c t - x_s(t) \sin \omega_c t \quad (2-2.28)$$

é dada por

$$\begin{aligned} \text{TH}[x(t)] &= \hat{x}(t), \\ &= x_c(t) \sin \omega_c t + x_s(t) \cos \omega_c t. \end{aligned} \quad (2-2.29)$$

Se invertermos o sistema de equações (2-2.28) e (2-2.29) em relação a  $x_c(t)$  e  $x_s(t)$  podemos calcular as componentes do sinal  $x(t)$

$$x_c(t) = x(t) \cos \omega_c t + \hat{x}(t) \sin \omega_c t \quad (2-2.30)$$

$$x_s(t) = \hat{x}(t) \cos \omega_c t - x(t) \sin \omega_c t \quad (2-2.31)$$

**2.2.3.6 Condição de conservação da energia:** se um dado sinal  $x(t)$  não tem nenhuma componente constante (DC) então a sua energia é conservada pela TH. Com efeito

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{x}(t)|^2 dt. \quad (2-2.32)$$

Deixamos a demonstração como exercício.

## 2.2.4 Passagem em banda-base

O sinal analítico  $s_+(t)$  é um sinal passa-banda, *i.e.*, toma valores diferentes de zero para uma banda de frequências em torno a uma frequência  $f_c$ , e é zero para todos os outros valores de  $f$ . Para colocar o sinal  $s_+(t)$  em banda base, *i.e.*, numa banda de frequências em torno a  $f = 0$ , teremos de fazer uma translação de  $f_c$  Hz. Assim o sinal em banda base equivalente a  $s_+(t)$  será (no domínio da frequência)  $S_{bb}(f) = S_+(f+f_c)$  ou seja no tempo

$$\begin{aligned} s_{bb}(t) &= s_+(t)e^{-j2\pi f_c t} \\ &= [s(t) + j\hat{s}(t)]e^{-j2\pi f_c t} \end{aligned} \quad (2-2.33)$$

e de forma equivalente

$$[s(t) + j\hat{s}(t)] = s_{bb}(t)e^{j2\pi f_c t}, \quad (2-2.34)$$

de onde fazendo  $s_{bb}(t) = x(t) + jy(t)$  e igualando partes reais e imaginárias de (2-2.34) obtemos

$$s(t) = x(t) \cos(2\pi f_c t) - y(t) \sin(2\pi f_c t), \quad (2-2.35)$$

$$\hat{s}(t) = x(t) \sin(2\pi f_c t) + y(t) \cos(2\pi f_c t). \quad (2-2.36)$$

A equação (2-2.35) é uma representação do sinal passa-banda  $s(t)$  no qual as suas componentes em banda-base  $x(t)$  e  $y(t)$  se encontram como moduladoras do cos e do sin às frequências centrais  $f_c$ ;  $x(t)$  e  $y(t)$  são chamadas as *componentes em fase e em quadratura* do sinal  $s(t)$  visto que as funções que elas modulam estão desfasadas de  $\pi/2$ . Outra forma de visualizar a equação (2-2.35) é de representar  $s(t)$  sob forma de fasor e nesse caso  $x(t)$  e  $y(t)$  são simplesmente dadas como sendo as projeções do fasor  $s(t)$  no eixo das ordenadas e das abcissas, respectivamente

$$x(t) = A(t) \cos \theta(t)$$

$$y(t) = A(t) \sin \theta(t)$$

onde  $A(t)$  e  $\theta(t)$  são apenas o módulo e o argumento (ou fase) de  $s(t)$ . Utilizando (2-2.35) podemos escrever o sinal em banda  $s(t)$  como sendo

$$\begin{aligned} s(t) &= \text{Re}\{[x(t) + jy(t)]e^{j2\pi f_c t}\}, \\ &= \text{Re}[s_{bb}(t)e^{j2\pi f_c t}], \end{aligned} \quad (2-2.37)$$

onde  $\text{Re}$  significa “parte real de”. Resumindo, partindo de um sinal real em banda-passante  $s(t)$  o seu equivalente passa-baixo em banda de base é  $s_{bb}(t)$  dado por (2-2.37). Alternativamente, utilizando a representação exponencial dum número complexo, podemos escrever

$$s_{bb}(t) = a(t)e^{j\theta(t)}, \quad (2-2.38)$$

onde

$$a(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}, \quad (2-2.39)$$

$$\theta(t) = \tan^{-1} \frac{y(t)}{x(t)}, \quad (2-2.40)$$

e onde  $a(t)$  e  $\theta(t)$  são chamados o envelope e a fase de  $s(t)$ , respectivamente. Assim, utilizando a definição (2-2.37),

$$\begin{aligned} s(t) &= \text{Re}\{a(t)e^{j[2\pi f_c t + \theta(t)]}\}, \\ &= a(t) \cos[2\pi f_c t + \theta(t)]. \end{aligned} \quad (2-2.41)$$

### 2.2.5 Espectro de sinais passa-banda

A TF de  $s(t)$  escreve-se, utilizando mais uma vez (2-2.37)

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re}[s_{bb}(t)e^{j2\pi f_c t}]e^{-j2\pi ft} dt, \quad (2-2.42)$$

e sabendo que a parte real de um número complexo qualquer  $z$  se pode escrever como

$$\text{Re}(z) = (1/2)[z + z^*], \quad (2-2.43)$$

então

$$\begin{aligned} S(f) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [s_{bb}(t)e^{j2\pi f_c t} + s_{bb}^*(t)e^{-j2\pi f_c t}]e^{-j2\pi ft} dt, \\ &= \frac{1}{2}[S_{bb}(f - f_c) + S_{bb}^*(-f - f_c)], \end{aligned} \quad (2-2.44)$$

que nos permite calcular o espectro  $S(f)$  do sinal passa-banda  $s(t)$  a partir do espectro  $S_{bb}(f)$  do seu equivalente passa-baixo  $s_{bb}(t)$ .

### 2.2.6 Sistemas passa-banda

Uma notação semelhante pode ser utilizada para representar sistemas passa-banda de resposta impulsiva  $h(t)$

$$h(t) = \text{Re}[h_{bb}(t)e^{j2\pi f_c t}], \quad (2-2.45)$$

onde  $h_{bb}(t)$  é o seu equivalente passa-baixo sendo que, normalmente,  $h(t)$  é real mas o seu equivalente passa-baixo  $h_{bb}(t)$  é complexo. A função de transferência do sistema passa-banda escreve-se

$$H(f) = \frac{1}{2}[H_{bb}(f - f_c) + H_{bb}^*(-f - f_c)], \quad (2-2.46)$$

e onde

$$\begin{aligned} H_{bb}(f - f_c) &= H_+(f), \\ &= 2u(f)H(f), \\ &= \begin{cases} 2H(f) & f > 0 \\ 0 & f < 0 \end{cases}, \end{aligned} \quad (2-2.47)$$

é a componente para  $f > 0$  do espectro de  $H(f)$  e da mesma forma

$$H_{bb}^*(-f - f_c) = \begin{cases} 0 & f > 0 \\ 2H^*(-f) & f < 0 \end{cases}. \quad (2-2.48)$$

Frequentemente o factor 2 é abandonado na representação de sistemas passa-banda, o que resulta no aparecimento de um factor 2 na equação (2-2.45) e no desaparecimento do factor 1/2 em (2-2.46).

### 2.2.7 Resposta de sistemas passa-banda

A resposta  $r(t)$  de um sistema passa-banda de resposta impulsiva  $h(t)$  a um sinal passa-banda  $s(t)$  escreve-se normalmente como o produto de convolução

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(t - \tau)d\tau, \quad (2-2.49)$$

e de modo equivalente

$$R(f) = H(f)S(f), \quad (2-2.50)$$

onde por substituição

$$R(f) = \frac{1}{2}[H_{bb}(f - f_c) + H_{bb}^*(-f - f_c)][S_{bb}(f - f_c) + S_{bb}^*(-f - f_c)], \quad (2-2.51)$$

onde se utilizaram as relações (2-2.44) e (2-2.46) (esta última sem o coeficiente 1/2). Se o sinal  $s(t)$  for de banda estreita, *i.e.*, a sua banda útil  $B$  é tal que  $B \ll f_c$  então poderemos dizer que  $S_{bb}(f - f_c) \approx 0$  para frequências negativas e o mesmo para o

sistema passa-banda  $H_{bb}(f - f_c) = 0$  para  $f < 0$ . A relação (2-2.51) reduz-se então aos dois termos cruzados de resposta para frequências positivas,

$$\begin{aligned} R(f) &= \frac{1}{2}[S_{bb}(f - f_c)H_{bb}(f - f_c) + S_{bb}^*(-f - f_c)H_{bb}^*(-f - f_c)], \\ &= \frac{1}{2}[R_{bb}(f - f_c) + R_{bb}^*(-f - f_c)], \end{aligned} \quad (2-2.52)$$

de onde podemos escrever que

$$R_{bb}(f) = H_{bb}(f)S_{bb}(f), \quad (2-2.53)$$

é o equivalente passa-baixo  $R_{bb}(f)$  da resposta do sistema passa-banda  $R(f)$ , dada como o produto das TFs dos equivalentes passa-baixo do sinal de entrada e do sistema. Esta relação permite-nos obviamente escrever

$$r_{bb}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{bb}(\tau)h_{bb}(t - \tau)d\tau. \quad (2-2.54)$$

### 2.2.8 Energia e potência

A energia de um sinal é uma quantidade fundamental nos sistemas de comunicação. Assim definimos a energia de um sinal  $s(t)$  por

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt, \quad \text{e} \quad \mathcal{E}_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k|^2 \quad (2-2.55)$$

para sinais contínuos e discretos respectivamente. Sendo a potência igual à energia por unidade de tempo, só poderemos calcular a potência contida num sinal como sendo a potência média dada por

$$P_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2 dt, \quad \text{e} \quad P_s = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=-K/2}^{K/2-1} |s_k|^2. \quad (2-2.56)$$

Para sinais passa-banda, e utilizando a relação (2-2.43) no caso contínuo de (2-2.55), obtem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_s &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2}[s_{bb}(t)e^{j2\pi f_c t} + s_{bb}^*(t)e^{-j2\pi f_c t}] \right]^2 dt \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \{2s_{bb}(t)s_{bb}^*(t) + s_{bb}^2(t)e^{j4\pi f_c t} + [s_{bb}^*(t)]^2 e^{-j4\pi f_c t}\} dt. \end{aligned} \quad (2-2.57)$$

Visto que  $s_{bb}(t)s_{bb}^*(t) = |s_{bb}(t)|^2$  e que  $s_{bb}^2(t) = [s_{bb}^*(t)]^2$ , temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_s &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |s_{bb}(t)|^2 dt + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \{s_{bb}^2(t)e^{j4\pi f_c t} + [s_{bb}^2(t)]^* e^{-j4\pi f_c t}\} dt, \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |s_{bb}(t)|^2 dt + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} [\rho(t)e^{j2\theta(t)} e^{j4\pi f_c t} + \\ &\quad + \rho(t)e^{-j2\theta(t)} e^{-j4\pi f_c t}] dt,\end{aligned}\tag{2-2.58}$$

onde se utilizou  $s_{bb}(t) = \rho e^{-j\theta(t)}$ , com  $\rho = |s_{bb}(t)|$  e  $\theta = \angle[s_{bb}(t)]$ , e assim podemos escrever

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_s &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |s_{bb}(t)|^2 dt + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(t)[e^{j[4\pi f_c t + 2\theta(t)]} + e^{-j[4\pi f_c t + 2\theta(t)]}] dt, \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |s_{bb}(t)|^2 dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |s_{bb}(t)|^2 \cos[4\pi f_c t + 2\theta(t)] dt,\end{aligned}\tag{2-2.59}$$

onde, por definição, o sinal  $s_{bb}(t)$  é passa-baixo comparado com a frequência  $f_c$  e assim podemos dizer que o segundo termo desta expressão é um coseno que varia rapidamente, modulado lentamente em amplitude por  $s(t)$ . Baseando-nos na ideia de que o integral de um cos no intervalo  $[-\infty, +\infty]$  é zero, podemos assim dizer que o segundo termo em (2-2.59) é aproximadamente nulo o que nos dá que a energia é finalmente

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_s &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |s_{bb}(t)|^2 dt, \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{E}_{bb},\end{aligned}\tag{2-2.60}$$

onde  $\mathcal{E}_{bb}$  é a energia do sinal em banda base  $s_{bb}(t)$ .

## 2.3 Representação espectral de sinais aleatórios

A passagem de um sinal através de um sistema físico de natureza electrónica (analógica ou digital) adiciona forçosamente uma componente aleatória indesejável, à qual chamamos ruído. Da mesma forma a passagem do sinal através de um canal de transmissão físico adiciona ruído de transmissão. A adição de uma componente de ruído aleatório num sinal determinístico resulta num sinal de natureza estocástica. Neste capítulo vamos generalizar as noções de sinais e sua representação espectral ao caso de sinais estocásticos. O aluno não familiar com as noções básicas de definição de processos estocásticos deverá rever a matéria de Probabilidades, Estatística e Processos Estocásticos.

### 2.3.1 Noções preliminares

Já vimos na disciplina de Sistemas e Sinais [5], que uma das condições de existência da TF é que o sinal em questão deverá ser absolutamente integrável, o que se pode representar por

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(x)| dx < \infty, \quad (2-3.1)$$

que é uma condição de certo modo drástica e exclui, por exemplo, desde já, simples funções periódicas como  $\sin(x)$ . O cálculo das TF de funções periódicas só pode ser feito exactamente através de Séries de Fourier (SF), ou então, através do uso da noção de função generalizada ou distribuição. Outra forma de resolver o problema na prática, é o de limitar o intervalo de integração de forma a torná-lo finito. Nesse caso, é possível obter um resultado, que não será a TF do sinal pretendido, mas sim a TF do sinal multiplicado pela função de observação (janela), que no caso determinístico pode ser determinada inequivocamente. Tudo isto já foi visto anteriormente e não será repetido. Outro tipo de sinais excluídos da TF, são os sinais ditos aleatórios que, em termos matemáticos, são apenas processos estocásticos. Mas neste caso o problema do cálculo é dificilmente solúvel de modo único pois que, mesmo para um intervalo de tempo limitado, uma nova realização do sinal produz uma nova TF e então devemos questionar-nos sobre qual o verdadeiro significado da representação espectral dum sinal aleatório. Na realidade o verdadeiro resultado não existe (ou pelo menos não pode ser calculado de forma inequívoca) e apenas temos acesso a estimativas desse resultado, e é nesse sentido que se fala de *estimação espectral* e não de cálculo espectral. Chegou a altura de apresentarmos um exemplo do problema enfrentado em estimação espectral.

**2.3.1.1 Exemplo:** consideremos o simples caso de um sinal sinusoidal  $s(t) = \cos(\omega_0 t)$ . Sabemos através da teoria que a TF de  $s(t)$  é

$$\text{TF}[s(t)] = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0) \quad (2-3.2)$$

Façamos agora o exercício já nosso conhecido que consiste em observar o sinal  $s(t)$  no intervalo finito  $[0, T]$ . Nesse caso temos que

$$\text{TF}[s(t)] = \text{TF}\{s(t)\text{rect}[(t - T/2)/T]\} \quad (2-3.3)$$

e portanto, sabendo que a TF do  $\text{rect}$  é um sinc, o resultado vai ser duas funções sinc centradas em  $\pm\omega_0$ . A largura do pico central e a amplitude dos picos laterais da função sinc vão ser proporcionais a  $1/T$ . Na prática isto significa que, quanto maior for o intervalo de observação  $T$ , mais estreito vai ser o pico central do sinc e menores vão ser os picos laterais. Por outras palavras, passando ao limite, as funções sinc irão tender para Diracs. Tudo isto já foi visto anteriormente e diz respeito ao caso da observação dum sinal determinístico num intervalo finito.

Vejamos agora o seguinte problema. Considere o sinal  $y(t) = s(t) + n(t)$ , onde  $n(t)$  é uma sequência de ruído branco de média nula e variância  $\sigma_n^2$  e onde  $s(t)$  é o nosso sinal sinusoidal. Se a relação sinal/ruído for suficientemente baixa, uma simples inspeção de  $y(t)$  não será suficiente para determinar a presença de  $s(t)$  e muito menos a sua forma, amplitude ou frequência. Ocorre-nos então a ideia de recorrer à representação espectral de  $y(t)$  que, normalmente, deveria mostrar um máximo pronunciado para uma determinada frequência, se  $s(t)$  estivesse presente e a sua abcissa seria nem mais menos que o valor da frequência de  $s(t)$ ,  $\omega_0$ . O primeiro problema é que a TF de  $y(t)$  - teoricamente pelo menos - não existe porque  $n(t)$  não é integrável entre  $[-\infty, \infty]$ . Utilizamos então o caminho alternativo que é a função de correlação e que nos leva à densidade espectral. Assim

$$\gamma_y(t_1, t_2) = E[y(t_1)y(t_2)], \quad (2-3.4)$$

onde  $E[ ]$  é o operador “esperança matemática” ou valor esperado. A questão complica-se pois, se para  $s(t)$  determinístico  $E[s(t)] = s(t)$  para  $n(t)$  aleatório, são necessárias - sempre teoricamente - um número infinito de tiragens aleatórias. Além disso podemos questionar-nos sobre o sentido de calcular “periodicidades” de um sinal  $n(t)$  que não tem um “comportamento mais ou menos constante” em torno a um determinado valor médio. Em termos matemáticos, isto quer dizer que, para fazer algum sentido calcular o espectro de  $n(t)$ , este tem de ser estacionário<sup>1</sup> (pelo menos no sentido lato) e ergódico<sup>2</sup> de forma a podermos dizer que (pelo menos) os momentos de primeira e segunda ordem são independentes do instante de cálculo e que a média temporal é igual (no limite) à média de conjunto (ver noções de estacionaridade e ergodicidade na sebeta de SS). Assim, considerando que podemos obter um número infinito de tiragens aleatórias de  $y(t)$ , podemos escrever

$$\gamma_y(\tau) = \gamma_s(\tau) + \gamma_n(\tau), \quad (2-3.5)$$

onde  $\gamma_s(\tau)$  é suposto conhecido<sup>3</sup> e  $\gamma_n(\tau) = \sigma_n^2 \delta(\tau)$ . A TF de (2-3.5) dá-nos, segundo a definição, a densidade espectral de  $y(t)$ ,

$$\begin{aligned} P_{yy}(\omega) &= \text{TF}[\gamma_y(\tau)] \\ &= P_{ss}(\omega) + \sigma_n^2 \end{aligned} \quad (2-3.6)$$

o que nos diz que o efeito do ruído branco é o de adicionar uma constante ao espectro,  $P_{ss}(\omega)$ , de  $s(t)$ . No caso realista de não dispormos de um conjunto infinito de observações independentes para calcular a média de conjunto, temos a complicada tarefa de dividir um intervalo infinito de observação num número infinito de

---

<sup>1</sup>por definição um processo estacionário é um processo estocástico cujas propriedades estatísticas de conjunto são independentes do tempo.

<sup>2</sup>por definição um processo ergódico é um processo estocástico no qual as propriedades estatísticas medidas ao longo do tempo, são iguais às propriedades estatísticas de conjunto.

<sup>3</sup>neste caso o sinal  $s(t)$  deverá ter um termo aleatório de forma a resultar numa função de correlação estacionária - ver exemplo mais a baixo.



sub-intervalos de duração infinita e calcular

$$\bar{\gamma}_{yy}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y(t_n)y(t_n - \tau) \quad (n-1)T \leq t_n \leq nT. \quad (2-3.7)$$

Obviamente, como não dispomos de um intervalo infinito, teremos de nos contentar com um número finito de intervalos, cada um deles finito, apenas com uma estimativa  $\hat{\gamma}_{yy}$ , de  $\gamma_{yy}$  para  $N$  finito. Assim

$$\hat{\gamma}_{yy}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y(t_n)y(t_n - \tau), \quad (n-1)T \leq t_n \leq nT \quad (2-3.8)$$

o que nos leva forçosamente a obter uma estimativa da densidade espectral

$$\hat{P}_{yy}(\omega) = \text{TF}[\hat{\gamma}_{yy}]. \quad (2-3.9)$$

É essencialmente o facto de ter de estimar a função de correlação de um sinal aleatório num intervalo de observação finito que faz do cálculo da densidade espectral de potência um problema de estimação, denominado *estimação espectral*. A estimação espectral tem sido o tema de inúmeros trabalhos, investigações e descobertas nos últimos quarenta anos. Se as características estatísticas de determinado sinal pudessem ser conhecidas com exactidão a partir da observação de um intervalo finito desse sinal então a estimação espectral seria uma ciência exacta. Na realidade, só uma estimativa do espectro pode ser obtida a partir de uma única observação de um intervalo finito do sinal. A figura 2.3 ilustra a ambiguidade do problema da estimação espectral quando dois estimadores espectrais diferentes são usados no mesmo sinal resultando daí duas representações espectrais diferentes: qual delas é a verdadeira? Não existe resposta para esta pergunta.

O facto de dispormos de sinais aleatórios em vez de determinísticos impõe uma análise estatística do sinal, i.e., temos de proceder a uma estimação da função de autocorrelação da sequência temporal fazendo para isso a hipótese de estacionaridade (e ergodicidade) resultando numa estimativa da DEP.

### 2.3.2 Densidade espectral de potência

A densidade espectral de potência (DEP ou PSD=power spectral density) é definida pela transformada de Fourier da função de autocorrelação de um processo estacionário, ou seja

$$P_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{xx}(\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau. \quad (2-3.10)$$

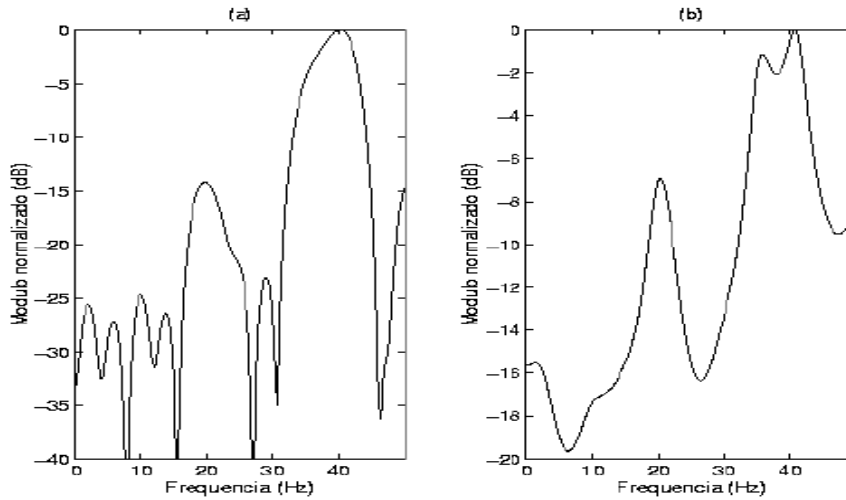


Figura 2.3: densidade espectral de potência do mesmo sinal obtida através de um método de estimação espectral clássica (a) e um de alta resolução (b).

Por outras palavras, a DEP descreve a distribuição da variância de um processo aleatório no domínio da frequência. Do mesmo modo, através da TF inversa,

$$r_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{xx}(f) e^{j2\pi f\tau} df. \quad (2-3.11)$$

Este par de transformadas de Fourier é chamado teorema de Wiener-Khintchine. Para  $\tau = 0$  temos que

$$r_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{xx}(f) df, \quad (2-3.12)$$

o que significa que a autocorrelação para um desvio nulo é igual à potência total contida no espectro do sinal  $x(t)$ . Como para os sinais determinísticos, aplicam-se todas as propriedades da TF no que diz respeito, em particular, às simetrias de  $r_{xx}(\tau)$  e de  $P_{xx}(f)$  para  $x(t)$  real.

Um processo aleatório particularmente interessante é o que representa o ruído branco contínuo  $w(t)$ , cuja função de autocorrelação é dada por  $r_{ww}(\tau) = \sigma_w^2 \delta(\tau)$ . A DEP do ruído branco escreve-se substituindo esta relação em (2-3.10), obtendo

$$P_{ww}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_w^2 \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (2-3.13)$$

$$= \sigma_w^2, \quad (2-3.14)$$

que é constante qualquer que seja  $f$ . Podemos agora, a partir da resposta de um sistema linear invariante de resposta impulsiva  $h(t)$ , quando excitado por um sinal

$x(t)$ , dizer que a DEP do sinal resposta é obtida a partir da DEP do sinal excitação sabendo que para os sistemas lineares

$$y(t) = h(t) * x(t) \Rightarrow E[y(t)y(t - \tau)] = E[\{h(t) * x(t)\}\{h(t - \tau) * x(t - \tau)\}]. \quad (2-3.15)$$

Aqui a notação da convolução é um pouco infeliz, pois na realidade não se deveria escrever  $h(t) * x(t)$  mas sim  $(h * x)(t)$ . Esta notação deficiente, traduz-se no facto de, no segundo termo da relação anterior, aparecer  $h(t - \tau) * x(t - \tau)$  o que induz facilmente em erro. Utilizando uma notação explícita podemos escrever a partir de (2-3.15),

$$\begin{aligned} E[y(t)y(t - \tau)] &= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(u)x(t - u)du \int_{-\infty}^{\infty} h(v)x(t - \tau - v)dv\right] \\ &= \int \int h(u)h(v)E[x(t - u)x(t - \tau - v)]dudv, \end{aligned} \quad (2-3.16)$$

fazendo uma mudança de variável apropriada  $\alpha = t - u$  podemos escrever

$$\begin{aligned} E[y(t)y(t - \tau)] &= \int \int h(u)h(v)r_{xx}(\tau + v - u)dudv \\ &= \int h(v)\left[\int h(u)r_{xx}(\tau + v - u)du\right]dv \\ &= \int h(v)(h * r_{xx})(\tau + v)dv \\ &= h(\tau) * h(-\tau) * r_{xx}(\tau), \end{aligned} \quad (2-3.17)$$

e finalmente fazendo a TF de ambos os membros da equação anterior

$$P_{yy}(f) = P_{xx}(f)|H(f)|^2. \quad (2-3.18)$$

O caso interessante em muitas aplicações é quando o processo excitação é uma sequência de ruído branco e então  $P_{xx}(f) = \sigma_w^2$ .

**2.3.2.1 Exemplo:** a título de exemplo vamos agora considerar um sinal sinusoidal discreto do tipo

$$x[n] = A \sin(2\pi f_0 n + \theta), \quad (2-3.19)$$

onde  $A$  é a amplitude,  $f_0$  a frequência e  $\theta$  a fase. A média estatística deste sinal é

$$\bar{x}[n] = E[A \sin(2\pi f_0 n + \theta)] = A \sin(2\pi f_0 n + \theta), \quad (2-3.20)$$

que é uma função de  $n$  e portanto este sinal é não estacionário, i.e., a sua média de conjunto depende do instante onde é realizada. A autocorrelação do sinal  $x[n]$  escreve-se

$$\begin{aligned} r_{xx}[n + m, n] &= E\{x[n + m]x^*[n]\} \\ &= E\{A^2 \sin(2\pi f_0 [n + m] + \theta) \sin(2\pi f_0 n + \theta)\} \\ &= \frac{A^2}{2} \{\cos(2\pi f_0 m) - \cos[2\pi f_0 (2n + m) + 2\theta]\}, \end{aligned}$$

relação a partir da qual se torna óbvio que também a função de autocorrelação não é uma função do intervalo temporal entre os instantes considerados na correlação. A conclusão é que uma senoide determinística é não estacionária. No entanto se a fase for considerada como uma variável aleatória uniformemente distribuída em  $[0, 2\pi]$  temos que

$$\begin{aligned}\bar{x}[n] &= E[A \sin(2\pi f_0 n + \theta)] \\ &= A \int_0^{2\pi} \sin(2\pi f_0 n + \theta) \frac{1}{2\pi} d\theta, \\ &= 0\end{aligned}$$

o que significa que na realidade  $\bar{x}[n] = \bar{x} = 0$ , é independente de  $n$ . De notar que  $1/2\pi$  na relação anterior é simplesmente a densidade de probabilidade da variável aleatória  $\theta$ . Da mesma forma

$$\begin{aligned}r_{xx}[n+m, n] &= E\{x[n+m]x^*[n]\} \\ &= E\{A^2 \sin(2\pi f_0[n+m] + \theta) \sin(2\pi f_0 n + \theta)\} \\ &= \frac{A^2}{2} \int_0^{2\pi} \{\cos(2\pi f_0 m) - \cos[2\pi f_0(2n+m) + 2\theta]\} \frac{1}{2\pi} d\theta, \\ &= \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 m),\end{aligned}\tag{2-3.21}$$

que é uma função apenas do intervalo  $m$  entre os instantes considerados, e portanto  $r_{xx}[n+m, n] = r_{xx}[m] = (A^2/2) \cos(2\pi f_0 m)$ . Neste caso o sinal  $x[n]$  é estacionário (pelo menos no sentido lato).

Por extensão, se o sinal for formado por uma soma de  $L$  sinusoides cujas fases são aleatórias, distribuídas uniformemente em  $[0, 2\pi]$  e independentes entre elas, tal que

$$x[n] = \sum_{l=1}^L A_l \sin(2\pi f_l n + \theta_l)\tag{2-3.22}$$

então poderemos dizer que para a média

$$\begin{aligned}E[x[n]] &= E\left[\sum_{l=1}^L A_l \sin(2\pi f_l n + \theta_l)\right], \\ &= \sum_{l=1}^L A_l \int_0^{2\pi} \sin(2\pi f_l n + \theta_l) p_{\Theta_l}(\theta_l) d\theta_l, \\ &= 0,\end{aligned}\tag{2-3.23}$$

porque os termos de fase são descorrelacionados entre si o que implica que a densidade de probabilidade conjunta se pode escrever como o produto das densidades de

probabilidade  $p_{\Theta_l}(\theta_l)$  para cada uma delas. Da mesma forma para a correlação,

$$\begin{aligned}
 r_{xx}[n+m, n] &= E\{x[n+m]x^*x[n]\}, \\
 &= \sum_{l=1}^L A_l^2 \int_0^{2\pi} \sin(2\pi f_l[n+m] + \theta_l) \sin(2\pi f_l n + \theta_l) p_{\Theta_l}(\theta_l) d\theta_l + \\
 &\quad + \sum_{l=1}^L \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^L \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} A_l A_i \sin(2\pi f_l[n+m] + \theta_l) \\
 &\quad \sin(2\pi f_i n + \theta_i) p_{\Theta_l}(\theta_l) p_{\Theta_i}(\theta_i) d\theta_l d\theta_i,
 \end{aligned}$$

onde o segundo termo é nulo, permitindo assim dizer que

$$r_{xx}[n+m, n] = r_{xx}[m] = \sum_{l=1}^L \frac{A_l^2}{2} \cos(2\pi f_l m), \quad (2-3.24)$$

e que o processo  $x[n]$  é também estacionário. Ainda, se as sinusoides forem complexas, i.e., se

$$x[n] = \sum_{l=1}^L A_l e^{j(2\pi f_l n + \theta_l)}, \quad (2-3.25)$$

então prova-se utilizando o mesmo raciocínio, que

$$r_{xx}[m] = \sum_{l=1}^L A_l^2 e^{j2\pi f_l m}. \quad (2-3.26)$$

Finalmente se adicionarmos ao sinal  $x[n]$  um ruído branco  $w[n]$  de média nula e variância  $\sigma_w^2$  e independente das fases das sinusoides, tal que  $y[n] = x[n] + w[n]$ , então obtemos que

$$\begin{aligned}
 r_{yy}[m] &= r_{xx}[m] + r_{ww}[m] \\
 &= \sum_{l=1}^L A_l^2 e^{j2\pi f_l m} + \sigma_w^2 \delta[m].
 \end{aligned} \quad (2-3.27)$$

### 2.3.3 Sinais aleatórios passa-banda

A adição de uma componente de ruído aleatório a um sinal passa-banda resulta num sinal passa-banda de natureza estocástica. Neste capítulo vamos generalizar as noções de sinais passa-banda e sua representação espectral ao caso de sinais estocásticos.

Consideremos um processo estocástico  $n(t)$  estacionário no sentido lato de média nula e de densidade espectral de potência  $P_{nn}(f)$ . À semelhança do caso dos sinais

determinísticos, este processo aleatório será considerado de banda estreita se a sua densidade espectral de potência for aproximadamente zero fora de uma banda  $B_n$  tal que  $B_n \ll f_c$ , onde  $f_c$  é a frequência da portadora. Sob esta condição poderemos exprimir o processo passa-banda em função de grandezas equivalentes passa-baixo

$$n(t) = a(t) \cos[2\pi f_c t + \theta(t)], \quad (2-3.28)$$

$$= x(t) \cos 2\pi f_c t - y(t) \sin 2\pi f_c t, \quad (2-3.29)$$

$$= \operatorname{Re}[z(t)e^{j2\pi f_c t}], \quad (2-3.30)$$

onde  $z(t)$  é chamado envelope complexo ou componente em banda base de  $n(t)$ . Dada a relação que liga o processo estocástico passa-banda  $n(t)$  às suas componentes em quadratura  $x(t)$  e  $y(t)$  podemos deduzir que:

1. tanto  $x(t)$  como  $y(t)$  são processos aleatórios de média nula, visto que  $E(n(t)) = 0$  e (2-3.29)  $\Rightarrow E[x(t)] = E[y(t)] = 0$ .
2. a estacionaridade de  $n(t)$  implica que as funções de autocorrelação e correlação cruzada de  $x(t)$  e  $y(t)$  obedecem a  $\phi_{xx}(\tau) = \phi_{yy}(\tau)$  e que  $\phi_{xy}(\tau) = -\phi_{yx}(\tau)$ . Com efeito calculando a função de correlação do processo aleatório  $n(t)$ ,

$$\begin{aligned} \phi_{nn}(t, t + \tau) &= E[n(t), n^*(t + \tau)] \\ &= E[x(t) \cos 2\pi f_c t - y(t) \sin 2\pi f_c t \\ &\quad [x(t + \tau) \cos 2\pi f_c(t + \tau) - y(t + \tau) \sin 2\pi f_c(t + \tau)]] \\ &= E[x(t)x(t + \tau)] \frac{1}{2} [\cos 2\pi f_c(2t + \tau) + \cos 2\pi f_c \tau] - \\ &\quad - E[y(t)y(t + \tau)] \frac{1}{2} [\sin 2\pi f_c(2t + \tau) - \sin 2\pi f_c \tau] - \\ &\quad - E[x(t)y(t + \tau)] \frac{1}{2} [\sin 2\pi f_c(2t + \tau) + \sin 2\pi f_c \tau] + \\ &\quad + E[y(t)x(t + \tau)] \frac{1}{2} [\cos 2\pi f_c \tau - \cos 2\pi f_c(2t + \tau)], \end{aligned}$$

de onde visto que  $n(t)$  é estacionário, os termos em  $t$  devem ser nulos, o que implica que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \phi_{xx}(\tau) \cos 2\pi f_c(2t + \tau) - \frac{1}{2} \phi_{yy}(\tau) \cos 2\pi f_c(2t + \tau) = \\ \frac{1}{2} \phi_{yx}(\tau) \sin 2\pi f_c(2t + \tau) + \frac{1}{2} \phi_{xy}(\tau) \sin 2\pi f_c(2t + \tau) \end{aligned}$$

ou seja, que para que esta última equação seja verificada, devemos ter que

$$\begin{aligned} \phi_{xx}(\tau) &= \phi_{yy}(\tau) \\ \phi_{xy}(\tau) &= -\phi_{yx}(\tau) \end{aligned}$$

3. e também que  $\phi_{nn}(\tau) = \phi_{xx}(\tau) \cos 2\pi f_c \tau - \phi_{yx}(\tau) \sin 2\pi f_c \tau$ , consequência directa do ponto anterior, no caso  $n(t)$  estacionário.

4. ainda que  $\phi_{zz}(\tau) = \phi_{xx}(\tau) + j\phi_{yx}(\tau)$ . Com efeito se utilizarmos a definição

$$\begin{aligned}\phi_{zz}(\tau) &= E \{ [x(t) + jy(t)][x(t + \tau) + jy(t + \tau)]^* \} \\ &= E [x(t)x^*(t + \tau) + jy(t)x^*(t + \tau) - jx(t)y^*(t + \tau) + y(t)y^*(t + \tau)] \\ &= \phi_{xx}(\tau) + j\phi_{yx}(\tau) - j\phi_{xy}(\tau) + \phi_{yy}(\tau) \\ &= 2\phi_{xx}(\tau) + 2j\phi_{yx}(\tau),\end{aligned}$$

o que implica que

$$z(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[x(t) + jy(t)].$$

5. e finalmente que  $\phi_{nn} = \text{Re}[\phi_{zz}(\tau) \exp j2\pi f_c \tau]$ . Que se obtem a partir de (2-3.29),

$$\begin{aligned}\phi_{nn}(\tau) &= E[n(t)n^*(t + \tau)] \\ &= E \{ \text{Re}[z(t)e^{j2\pi f_c t}] \text{Re}[z(t + \tau)e^{j2\pi f_c (t + \tau)}] \} \\ &= \frac{1}{4} E [z(t)z(t + \tau)e^{j2\pi f_c (2t + \tau)} + z^* z(t + \tau)e^{j2\pi f_c \tau} + \\ &\quad + z(t)z^*(t + \tau)e^{-j2\pi f_c \tau} + z^* z^*(t + \tau)e^{-j2\pi f_c (2t + \tau)}],\end{aligned}$$

e dado que  $n(t)$  é estacionário temos que os termos dependentes de  $t$  deverão ser identicamente nulos o que implica necessariamente que

$$\begin{aligned}E[z(t)z(t + \tau)] &= 0 \\ E[z^*(t)z^*(t + \tau)] &= 0,\end{aligned}$$

e finalmente

$$\begin{aligned}\phi_{nn}(\tau) &= \frac{1}{4} [\phi_{zz}^*(\tau)e^{j2\pi f_c \tau} + \phi_{zz}(\tau)e^{-j2\pi f_c \tau}] \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} [\phi_{zz}(\tau)e^{j2\pi f_c \tau}].\end{aligned}$$

Esta última relação implica que a autocorrelação do processo estocástico passa-banda pode ser definida de forma única a partir da função de autocorrelação da sua componente passa-baixo  $z(t)$  e da frequência da portadora  $f_c$ . Assim podemos definir a densidade espectral de potência de  $n(t)$  como

$$\begin{aligned}P_{nn}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \{ \text{Re}[\phi_{zz}(\tau)e^{j2\pi f_c \tau}] \} e^{-j2\pi f \tau} d\tau, \\ &= \frac{1}{2} [P_{zz}(f - f_c) + P_{zz}^*(-f - f_c)].\end{aligned}\tag{2-3.31}$$

Como a função de autocorrelação  $\phi_{zz}(\tau)$  de  $z(t)$  é tal que  $\phi_{zz}(\tau) = \phi_{zz}^*(-\tau)$  então  $P_{zz}(f)$  é uma função real.

### 2.3.4 Ruído branco passa-banda

O problema subjacente à caracterização do ruído branco passa-banda é de que, por definição, o ruído branco tem uma densidade espectral de potência que é de banda larga (teoricamente infinita) e constante para qualquer valor de  $f$  o que, obviamente, contraria a hipótese de banda estreita postulada no capítulo anterior. Portanto o termo “ruído branco passa-banda” não deveria teoricamente existir. No entanto, e na prática, chama-se ruído branco passa-banda, ao processo estocástico branco filtrado por um filtro passa-banda ideal de banda  $B$  em torno à frequência  $f_c$  da portadora. Assim a densidade espectral do ruído branco pode-se escrever

$$P_{ww}(f) = \begin{cases} N_0/2 & |f - f_c| \leq B/2, \\ N_0/2 & |f + f_c| \leq B/2, \\ 0 & \text{outro } f. \end{cases} \quad (2-3.32)$$

Admitindo toda a notação introduzida no capítulo anterior para os processos aleatórios em geral, podemos definir o equivalente passa-baixo  $z(t)$  do ruído branco passa-banda  $w(t)$  cuja densidade espectral de potência se escreve então

$$P_{zz}(f) = \begin{cases} N_0 & |f| \leq B/2, \\ 0 & |f| > B/2, \end{cases} \quad (2-3.33)$$

e a sua função de autocorrelação escreve-se

$$\phi_{zz}(\tau) = N_0 \frac{\sin \pi B \tau}{\pi \tau}, \quad (2-3.34)$$

tal que

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \phi_{zz}(\tau) = N_0 \delta(\tau). \quad (2-3.35)$$

De onde podemos deduzir que, tal como no caso do ruído branco em geral, tanto a densidade espectral de potência como a função de autocorrelação do ruído branco passa-banda são funções simétricas, o que implica, em particular,  $\phi_{xy}(\tau) = 0$  e que  $\phi_{zz}(\tau) = \phi_{xx}(\tau) = \phi_{yy}(\tau)$ . Isto implica que tanto o sinal equivalente passa-baixo, como as componentes passa-baixo em fase e quadratura são descorrelacionadas e tem autocorrelações iguais para todos os atrasos  $\tau$ .

## 2.4 Sinais cicloestacionários

Sinais cicloestacionários são sinais aleatórios cujas funções de autocorrelação são periódicas. Assim, a função de autocorrelação

$$\phi_{xx}(t + \tau, t) = E[x(t + \tau)x^*(t)], \quad (2-4.1)$$



é tal que

$$\phi_{xx}(t + \tau + kT, t + kT) = \phi_{xx}(t + \tau, t), \quad (2-4.2)$$

e portanto de período  $T$ . A caracterização destes sinais através da sua densidade espectral faz-se introduzindo a média temporal da sua função de autocorrelação num período que é

$$\bar{\phi}_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \phi_{xx}(t + \tau, t) dt, \quad (2-4.3)$$

permitindo o cálculo da densidade espectral de potência média de um processo cicloestacionário definida por

$$P_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\phi}_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau. \quad (2-4.4)$$

## 2.5 Representação de sinais em expansões ortogonais

Para introduzir a expansão de sinais em bases ortogonais convém lembrar que, de forma análoga aos espaços vectoriais, nos quais podemos definir o produto vectorial e a norma, também para funções podemos escrever o produto interno entre duas funções definidas no intervalo  $[a, b]$  como sendo

$$\langle x_1(t)x_2(t) \rangle = \int_a^b x_1(t)x_2^*(t) dt, \quad (2-5.1)$$

no caso geral em que as funções podem ser complexas e onde \* significa complexo conjugado. Como no caso dos vectores, se as funções forem ortogonais, temos que o seu produto interno é nulo. A partir da definição de produto interno é fácil chegar à noção de norma que é

$$\|x(t)\| = \left( \int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \quad (2-5.2)$$

Um conjunto de sinais é dito ortornormal se forem conjuntamente ortogonais e a sua norma for igual a um. Como no caso dos vectores um conjunto de sinais é dito linearmente independente, se nenhum deles pode ser representado como uma combinação linear dos outros. Adicionalmente, temos a desigualdade triangular que se escreve simplesmente

$$\|x_1(t) + x_2(t)\| \leq \|x_1(t)\| + \|x_2(t)\|, \quad (2-5.3)$$

e a desigualdade de Schwartz que se enuncia

$$\left| \int_a^b x_1(t)x_2^*(t) dt \right| \leq \left| \int_a^b |x_1(t)|^2 dt \right|^{1/2} \left| \int_a^b |x_2(t)|^2 dt \right|^{1/2}, \quad (2-5.4)$$

na qual a igualdade é obtida apenas quando  $x_1(t) = ax_2(t)$ , onde  $a$  é uma constante complexa.

Vamos agora generalizar ao caso de um sinal  $s(t)$  real, determinístico e de energia finita  $\mathcal{E}$ ,

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt. \quad (2-5.5)$$

Podemos então aproximar o sinal  $s(t)$  como uma expansão  $\hat{s}(t)$  numa determinada base de funções  $f_n(t)$  como

$$\hat{s}(t) = \sum_{k=1}^K s_k f_k(t) \quad (2-5.6)$$

onde a base de funções  $\{f_k(t); k = 1, \dots, K\}$  é ortonormal e onde  $\{s_k; k = 1, \dots, K\}$  são os coeficientes da expansão de  $s(t)$  na base que se encontram através da minimização da energia do erro quadrático

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_e &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^2(t) dt, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [s(t) - \hat{s}(t)]^2 dt. \end{aligned} \quad (2-5.7)$$

A minimização de (2-5.7) pode ser efectuada de forma clássica diferenciando em relação a cada um dos coeficientes  $\{s_k\}$  e anulando as derivadas ou, alternativamente, utilizando um resultado da teoria da estimação que consiste em considerar que o conjunto  $\{s_k\}$  que minimiza a forma quadrática do erro corresponde ao caso em que a função de erro  $e(t)$ , é ortogonal a cada uma das funções da base  $\{f_k(t)\}$ . Uma explicação rápida desta noção consiste em observar que, devido às propriedades enunciadas acima, as funções  $\{f_k(t)\}$  formam um sub-espço vectorial (ou um plano) no qual se encontra também  $\hat{s}(t)$  visto que é uma combinação linear dos  $\{f_k(t)\}$ . Geometricamente a expressão (2-5.7) representa a distância entre  $s(t)$  e esse espaço vectorial (esse plano), ora é sabido que a distância mínima entre um ponto e um plano é o segmento de recta que passa pelo ponto e é perpendicular ao plano. Assim, o  $e(t)$  mínimo será ortogonal ao sub-espço definido pelas  $\{f_k(t)\}$ . Sob forma de equação podemos escrever

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[ s(t) - \sum_{k=1}^K s_k f_k(t) \right] f_n(t) dt = 0, \quad n = 1, \dots, K \quad (2-5.8)$$

e como, por definição as funções  $\{f_k(t)\}$  são ortonormais, esta equação reduz-se a

$$s_n = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) f_n(t) dt, \quad n = 1, \dots, K \quad (2-5.9)$$

o que simplesmente indica que os coeficientes da expansão são obtidos através da projecção do sinal na base de funções. O erro mínimo  $\mathcal{E}_{\min}$  obtido é então dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\min} &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^2(t) dt, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e(t)s(t) dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{s}(t)e(t) dt, \quad (2-5.10)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \int_{-\infty}^{+\infty} e(t)s(t) dt, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [s(t)]^2 dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^K s_k f_k(t) s(t) dt, \\ &= \mathcal{E}_s - \sum_{k=1}^K s_k^2.\end{aligned} \quad (2-5.11)$$

onde o segundo termo da expressão (2-5.10) se anula devido à ortogonalidade entre o sinal de erro  $e(t)$  e a expansão  $\hat{s}(t)$ . Pode-se então dizer que para  $\mathcal{E}_{\min} = 0$ , i.e., quando

$$\mathcal{E}_s = \sum_{k=1}^K s_k^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [s(t)]^2 dt, \quad (2-5.12)$$

temos que

$$s(t) = \sum_{k=1}^K s_k f_k(t), \quad (2-5.13)$$

quando o sinal  $s(t)$  pode ser representado pela expressão (2-5.13) dizemos que a base de funções ortonormais  $\{f_k(t)\}$  é uma **base completa**.

Eventualmente o exemplo mais conhecido de uma base de funções completa é a que resulta da expansão em série de Fourier e é um conjunto de funções trigonométricas em seno e coseno. O procedimento de Gram-Schmidt, normalmente utilizado para vectores pode ser usado também para construir uma base completa de funções (ver disciplinas de Álgebra Linear e/ou Análise Numérica).

Vamos agora aplicar estas noções em modulação digital de sinais, onde um sinal analógico é normalmente representado na sua forma passabanda, tal que

$$s_m(t) = \text{Re}[s_{lm}(t)e^{j2\pi f_c t}], \quad (2-5.14)$$

onde  $s_{lm}(t)$  é a componente passabaixo do sinal  $s_m(t)$ ,  $f_c$  é a frequência central da modulação. Para facilitar os cálculos repetitivos dos próximos capítulos, introduzimos

desde já o valor da energia  $\mathcal{E}_m$  do sinal passa banda  $s_m(t)$  como

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_m &= \int_{-\infty}^{+\infty} s_m^2(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Re}[s_{lm}(t)e^{j2\pi f_c t}]^2 dt.\end{aligned}\quad (2-5.15)$$

Onde, seguindo o mesmo raciocínio já usado no capítulo 2.2.8 nas equações (2-2.43) e (2-2.57) - (2-2.58), nos permite escrever que

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_m &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |s_{lm}(t)|^2 dt, \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{E}_{lm},\end{aligned}\quad (2-5.16)$$

onde  $\mathcal{E}_{lm}$  é a energia do sinal passa baixo  $s_{lm}(t)$ .

Tendo dois sinais funções de base  $s_k(t)$  e  $s_m(t)$ , um dado muito útil consiste em determinar a distância Euclidiana entre eles e que é dada por

$$\begin{aligned}d_{km} &= \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} [s_m(t) - s_k(t)]^2 dt} \\ &= \sqrt{\mathcal{E}_m + \mathcal{E}_k - 2\sqrt{\mathcal{E}_k \mathcal{E}_m} \text{Re}[\rho_{km}]},\end{aligned}\quad (2-5.17)$$

onde  $\mathcal{E}_k = \mathcal{E}_m = \mathcal{E}$  para qualquer  $m$  e  $k$ , e  $\rho_{km}$  é o coeficiente de correlacionamento cruzado, i.e., o valor da função de correlacionamento normalizada  $\phi_{mk}(\tau)$  tomada no ponto  $\tau = 0$ , definido por

$$\rho_{mk} = \frac{1}{2\sqrt{\mathcal{E}_k \mathcal{E}_m}} \int_{-\infty}^{\infty} s_{lm}^*(t) s_{lk}(t) dt. \quad (2-5.18)$$

A distância (2-5.17) pode ser então re-escrita

$$d_{km} = \sqrt{2\mathcal{E}[1 - \text{Re}(\rho_{km})]}, \quad (2-5.19)$$

que permite ter um outro critério de diferenciação entre os dois sinais  $s_m(t)$  e  $s_k(t)$ , para além da função de correlação, claro.

## Resumo do capítulo 2:

- introduziu-se a noção de sinal passa-banda e sinal em banda base, assim como as noções de sinal analítico e a sua manipulação através da Transformada de Hilbert;

- definiu-se a representação de um sinal passa-banda através das suas componentes passa-baixo em fase e em quadratura; passagem de banda base para sinal em banda e vice-versa; finalmente introduz-se a definição essencial de um sinal passa-banda  $s(t)$  como

$$s(t) = \text{Re}[s_{bb}(t)e^{j2\pi f_c t}]$$

onde  $s_{bb}(t)$  é a sua componente banda-base e  $f_c$  é a frequência portadora. A noção de sinais passa banda é estendida a sistemas passa-banda através da sua resposta impulsiva.

- tendo em conta a importância da determinação do espectro do sinal de comunicações que é geralmente aleatório devido seja ao *stream* de bits emitido pela fonte seja ao tipo de modulação escolhida fez-se uma introdução à estimação espectral clássica. São introduzidas as noções de densidade espectral de potência e a sua definição através do teorema de Wiener-Khintchine como a TF da função de autocorrelação do sinal estocástico. Devido à sobreposição desta matéria com aquela de Processamento Digital de Sinal refere-se apenas em apêndice dois estimadores clássicos para a função de autocorrelação (casos enviesados e não enviesados) assim como os respectivos estimadores espectrais tanto para o caso contínuo como para o caso discreto (ver tabela 2.3). Refere-se finalmente uma série de técnicas de estimação espectral clássica e suas variantes frequentemente usadas na prática.
- é feita em seguida uma extensão da noção de sinais passa-banda determinísticos a sinais passa-banda estocásticos. Chega-se à interessante conclusão que também para o caso de  $n(t)$  estocástico, podemos escrever

$$n(t) = \text{Re}[z(t)e^{j2\pi f_c t}]$$

onde  $z(t)$  é a componente passa-baixo do sinal estocástico  $n(t)$ . Interessantemente podemos ainda escrever o resultado notável

$$\phi_{nn}(\tau) = \frac{1}{2}\text{Re}[\phi_{zz}(\tau)e^{j2\pi f_c \tau}]$$

onde  $\phi_{nn}(\tau)$  e  $\phi_{zz}(\tau)$  são as funções de autocorrelação de  $n(t)$  e de  $z(t)$ , respetivamente. Esta noção é depois aplicada ao caso particular interessante, e algo controverso, do ruído branco passa-banda.

- este capítulo termina com a definição de sinais cicloestacionários, que são sinais aleatórios cujas funções de correlação são periódicas, e a representação (ou decomposição) de sinais em expansões ortogonais. Este último tema será de grande utilidade para a modulação digital de sinais tratada no capítulo 7.

## 3 Canais de transmissão

### 3.1 Linhas de transmissão

Talvez o meio mais antigo e também mais utilizado até hoje para transmitir informação tenha sido o cabo bifilar e/ou o cabo bifilar entrelaçado. É no entanto cada vez menos utilizado hoje em dia devido à sua fraca capacidade para suportar grandes quantidades de informação. A sua utilização encontra-se quase praticamente restrita a curtas distâncias e a baixo débito. As razões principais devem-se essencialmente a: grande sensibilidade a interferências electromagnéticas, *cross-talk* e atenuação elevada em função da distância percorrida pelo sinal. O *cross-talk* é definido como sendo a interferência gerada num cabo por um outro na sua proximidade devido ao campo electromagnético gerado pela corrente que o atravessa. A atenuação é uma função da resistência própria do condutor e directamente ligado ao material empregue e à sua secção. Outros efeitos como o efeito de bobine e de condensador tornam a atenuação dependente da frequência, o que faz o cabo actuar como um filtro e limitar fortemente a banda de frequências do sinal que o pode atravessar e por isso a quantidade de informação.

O cabo coaxial é utilizado para transmissão de maiores quantidades de informação. A atenuação aumenta aproximadamente com a raiz da frequência do sinal transmitido e por isso requer alguma adaptação para altas frequências a longas distâncias. Uma vantagem típica dos cabos coaxiais é a sua grande imunidade a interferências electromagnéticas. Esta deve-se à construção concêntrica do cabo na qual o condutor exterior se encontra à massa e portanto faz o papel de gaiola de Faraday não deixando sair para o exterior quase nenhuma radiação. Encontram-se cabos coaxiais capazes de suportar uma banda de 60 MHz correspondente a cerca de 140 Mbit/s. Devido

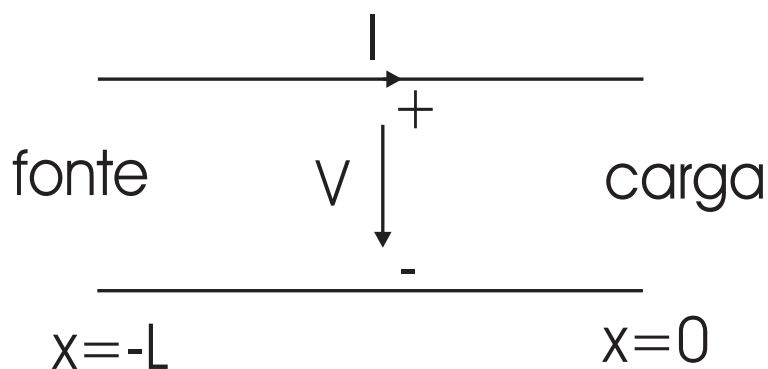


Figura 3.1: linha de transmissão uniforme.

às elevadas frequências e ao comprimento das linhas de transmissão a sua análise reveste-se da particularidade de a tensão e a corrente serem funções não do tempo

mas também do espaço. Assim, e considerando a figura 3.1, podemos dizer que a tensão e a corrente no momento  $t$  e no ponto  $x$  do eixo colocado ao longo da linha são

$$V(x, \omega) = V(x)e^{j\omega t}, \quad I(x, \omega) = I(x)e^{j\omega t} \quad (3-1.1)$$

onde  $V(x)$  e  $I(x)$  são dois termos complexos representando a dependência espacial do potencial e corrente eléctrica respectivamente. O potencial e a corrente na linha de transmissão são resultantes da sobreposição de uma onda que se propaga na direcção  $x > 0$  e outra na direcção  $x < 0$ . Podemos então escrever

$$V(x) = V_+e^{-\gamma x} + V_-e^{\gamma x}, \quad I(x) = \frac{1}{Z_0}(V_+e^{-\gamma x} - V_-e^{\gamma x}), \quad (3-1.2)$$

onde os termos  $V_+$  e  $V_-$  correspondem às ondas no sentido positivo e negativo respectivamente,  $\gamma$  é chamada a constante de propagação, complexa e dada por  $\gamma = \alpha + j\beta$  -  $\alpha$  é a atenuação e  $\beta$  é a constante de fase - e finalmente  $Z_0$  é a impedância característica da linha. Substituindo, por exemplo, a parte positiva de (3-1.2) na expressão da tensão de (3-1.1) obtemos que o atraso de fase de um lado ao outro da linha é  $\phi = \beta L/2\pi$  e portanto o tempo que demora (à frequência  $\omega$ ) é de

$$t_0 = \frac{\beta}{\omega}L \quad \text{sec} \quad (3-1.3)$$

visto que a distância total é  $L$  podemos tirar de (3-1.3) que a velocidade de propagação é  $v = \omega/\beta$ .

Através das condições de adaptação de impedância podemos dizer que quando uma linha de transmissão se encontra fechada por uma impedância de carga  $Z_L$  igual à impedância característica  $Z_0$  então a impedância de entrada é igual à impedância característica e existe uma condição de adaptação em potência.

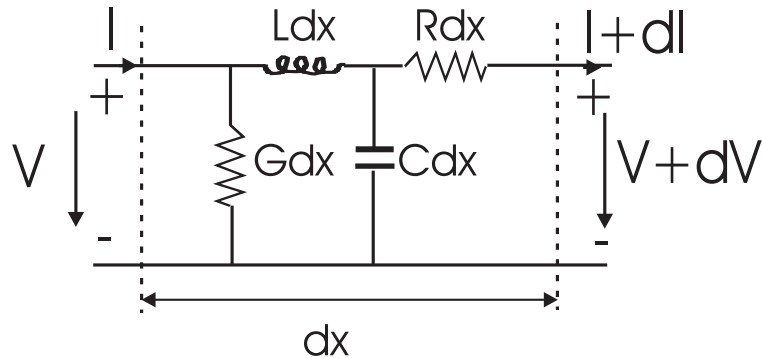


Figura 3.2: modelo paramétrico de uma secção de linha de transmissão.

A forma mais usual de análise de linhas consiste em considerar um modelo físico como o representado na figura 3.2. O interesse deste modelo é de permitir calcular

directamente os valores característicos da linha a partir de constantes físicas, *i.e.*, para o caso da figura 3.2,

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}, \quad \gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}. \quad (3-1.4)$$

No caso de cabos bifilares os parâmetros físicos tomam os seguintes valores típicos:

- capacidade = 0.0515  $\mu\text{F}/\text{km}$ , sensivelmente independente da frequência na banda de utilização corrente.
- conductância é extremamente baixa e desprezável.
- indutância = 0.62 mH/km a baixa frequência diminuindo até cerca de 70% deste valor com o aumento da frequência.
- resistência que é aproximadamente proporcional à raiz quadrada da frequência na gama de frequências mais alta, devido ao efeito de pele (tendência para a corrente circular na camada exterior do conductor a alta frequência - *skin effect*).

Como nota adicional podemos referir que existe hoje em dia uma esperança realística de que a introdução de novos materiais super conductores levem ao fabrico de linhas conductoras praticamente sem perdas. Nesse caso ideal teríamos

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \gamma = j\omega\sqrt{LC}, \quad (3-1.5)$$

neste caso a impedância característica é puramente resistiva, por isso fácil de adaptar, e visto que a constante de propagação é imaginária pura o termo de atenuação  $\alpha = 0$ , como era de esperar. Não existe atenuação ao longo da linha.

## 3.2 Fibra óptica

A fibra óptica utiliza a luz para transmitir informação. É o meio de transmissão por excelência hoje em dia. O sinal transmitido pode ser do tipo microondas ou no espectro do visível. As frequências são da ordem de, ou superiores a,  $10^{14}$  Hz. Neste caso o canal de transmissão comporta-se como um guia de ondas no qual a construção da fibra é extremamente importante de forma a manter duas camadas (uma interna e outra externa) com índices de refração diferentes de modo a evitar que a onda saia para fora do guia de ondas. É também importante manter o ângulo de reflexão na interface entre as duas zonas sempre inferior a um valor limite  $\theta_m$  de



modo a que o sinal seja totalmente reflectido e não haja refração evitando assim a perda de energia. Como ilustração do princípio básico vejamos a figura 3.3 onde temos dois meios de propagação 1 e 2, de índices de refração  $n_1$  e  $n_2$  respectivamente. A figura 3.3(a) mostra o caso em que o raio incidente no meio 1 segundo um ângulo

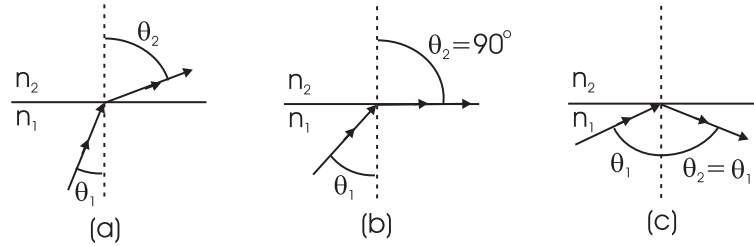


Figura 3.3: ilustração da lei de Snell: a) ângulo de incidência < ao ângulo crítico; b) ângulo de incidência = ao ângulo crítico e c) ângulo de incidência > ao ângulo crítico.

$\theta_1$  é parcialmente transmitido para o meio de 2, segundo um ângulo  $\theta_2$ , de acordo com a lei de Snell,

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_2}{n_1} < 1. \quad (3-2.1)$$

Mantendo os mesmos índices de refração mas aumentando o ângulo de incidência chegamos ao valor chamado ângulo de incidência crítica  $\theta_c$ , para o qual  $\theta_2 = \pi/2$  (figura 3.3(b)) e então a partir de (3-2.1) temos

$$\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1}, \quad (3-2.2)$$

e a luz é refractada ao longo da interface entre os dois materiais. Aumentando posteriormente o ângulo de incidência temos reflexão interna total na qual o ângulo de incidência e de reflexão são iguais. É este último modo de propagação que é empregue na fibra óptica.

Existem essencialmente três factores mais importantes que limitam a banda, e por isso a capacidade de transmissão da fibra óptica, que são:

- *atenuação do material*: através de quatro mecanismos: difusão devido a impurezas, absorpção, perdas nos conectores e perdas introduzidas pela curvatura do cabo.
- *dispersão modal*: é devida à diferença de velocidade de propagação dos diferentes modos do guia de ondas. Por outras palavras a energia injectada numa extremidade do guia de ondas não vai chegar à outra extremidade toda ao mesmo tempo. Este facto causa um alargamento dos impulsos transmitidos e por isso uma sobreposição entre símbolos, chamada interferência intersimbólica (ISI - intersymbol interference).

- *dispersão cromática*: é causada pelas diferenças de velocidade de propagação a diferentes comprimentos de onda.

Tem sido feitos enormes progressos ultimamente nos dispositivos de geração e de controlo dos raios luminosos para ataque das fibras ópticas. Atingem actualmente taxas de transmissão típicas de 100 a 1000 GB-km/sec. Este é um campo de investigação intensa hoje em dia.

### 3.3 Transmissão rádio

Nestes sistemas o sinal é primeiro aplicado a uma antena antes de atravessar o canal de propagação. Inversamente, no receptor, o sinal é primeiro captado por uma antena antes de ser processado para ser retirada a informação útil. O canal de propagação propriamente dito pode ser mesmo assim de vários tipos: a propagação pode ser em linha de vista através da camada baixa da atmosfera; pode ser reflectida nas camadas de ar superiores da atmosfera (ionosfera) e assim o sinal pode ser recebido em pontos não directamente rádio visíveis entre si; ou ainda pode ser através do espaço sem atmosfera como é o caso das comunicações espaciais ou via satélite. As perdas de transmissão das ondas rádio são proporcionais ao logaritmo da distância entre o emissor e o receptor, o que levaria a considerar que as transmissões a longa distância seriam preferivelmente efectuadas através de ondas rádio. Porém esta lei de atenuação só é praticável para emissores em linha de vista o que limita na prática o seu raio de acção.

Vejamos o efeito dos dois factores mais importantes em transmissão via rádio que são a atenuação e o atraso do sinal. Vamos supor que a atenuação é  $A$  e a distância é  $d$  a uma velocidade de propagação  $c$  provocando um atraso de  $\tau = d/c$  segundos. Assim o sinal passabanda recebido escreve-se

$$s(t) = \sqrt{2}A \operatorname{Re}\{u(t - \tau)e^{j\omega_c(t - \tau)}\}, \quad (3-3.1)$$

onde  $u(t)$  é o sinal transmitido em banda base. Podemos ainda escrever (3-3.1) fazendo sobressair a constante de propagação  $\kappa = \omega_c \tau / d$ ,

$$s(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{Au(t - \tau)e^{-j\kappa d} e^{j\omega_c t}\}. \quad (3-3.2)$$

Podemos então modelar o canal de transmissão como um filtro de resposta impulsiva

$$h(\omega) = A e^{-j\omega \tau} e^{-j\kappa d}, \quad (3-3.3)$$

mostrando uma dependência da frequência linear devido ao atraso  $\tau$ . Receptores móveis são bastante mais sensíveis a pequenas mudanças em  $d$  - que produzem diferenças de fase - do que a variações no atraso.

## 3.4 Modelos matemáticos de canais de transmissão

De forma a poder estudar e comparar o desempenho de determinados métodos de codificação e modulação, torna-se necessário dispôr de modelos matemáticos representativos dos vários canais de transmissão, que podem ir do caso mais simples do ruído aditivo até ao mais complexo do filtro linear variante no tempo.

### 3.4.1 Canal de ruído aditivo

Á parte o caso em que o canal não introduz nenhuma alteração no sinal, este é sem dúvida o caso mais simples de um canal realístico no qual o sinal emitido  $s(t)$ , chega ao receptor simplesmente adicionado com um termo de ruído  $w(t)$ , tal que o sinal recebido  $r(t)$ , se pode escrever

$$r(t) = s(t) + w(t), \quad (3-4.1)$$

onde o termo de ruído é uma realização de um processo estocástico devido a ruído de origem electrónica no sistema de emissão/recepção ou devido a interferências no meio físico de propagação do sinal. É frequente, e não desprovido de sentido prático, considerar que a sequência  $w(t)$  é branca, que segue uma lei conjuntamente Gaussiana e é independente do sinal emitido  $s(t)$ . Uma atenuação e um atraso de propagação podem ser facilmente considerados, sem que seja introduzida distorção, através de

$$r(t) = \alpha s(t - t_0) + w(t), \quad (3-4.2)$$

onde  $\alpha$  e  $t_0$  são constantes.

### 3.4.2 Canal de filtro linear invariante

Este caso é ligeiramente mais complexo do que o precedente, englobando-o. Aqui o sinal recebido é suposto ser a soma de um termo de ruído aditivo (como no caso anterior) e um termo sem ruído igual á resposta de um filtro linear invariante ao sinal emitido  $s(t)$ . Assim, temos que o sinal recebido  $r(t)$ , se escreve

$$\begin{aligned} r(t) &= g(t) * s(t) + w(t), \\ &= x(t) + w(t), \end{aligned} \quad (3-4.3)$$

onde  $g(t)$  é a resposta impulsiva do canal considerado. Podemos então escrever

$$x(t) = \int g(\tau) s(t - \tau) d\tau. \quad (3-4.4)$$

### 3.4.3 Canal de filtro linear variante no tempo

A representação do canal de transmissão através de um filtro linear variante no tempo, representa um grau de complexidade acrescida em relação ao caso anterior, mas que é muitas vezes justificado na prática. A única diferença é que a componente sem ruído do sinal recebido se escreve

$$x(t) = \int g(\tau; t)s(t - \tau)d\tau, \quad (3-4.5)$$

onde neste caso a resposta impulsiva do canal  $g(t)$  é variante no tempo. O exemplo mais conhecido para um canal linear variante no tempo é o dos telefones celulares e da propagação do sinal acústico submarino em águas pouco profundas. Nestes casos o sinal chega ao receptor móvel através de um número elevado de canais de propagação (propagação multicanal) cada um com um atraso e uma atenuação específicos. Normalmente a atenuação de cada canal é também variante no tempo.

#### Resumo do capítulo 3:

- neste capítulo faz-se uma revisão geral dos vários tipos de canais de transmissão do cabo bifilar à fibra óptica, traçando para cada um deles algumas propriedades mais importantes;
- na última secção descrevem-se de forma sucinta três modelos de canais de comunicação que são normalmente usados em sistemas de simulação e de estudo de modulações, codificação, etc. Estes modelos vão desde o modelo mais simplista no qual o sinal recebido é igual ao sinal emitido mais ruído, até ao mais sofisticado no qual o sinal recebido é o sinal emitido filtrado por um sistema cuja resposta impulsiva é variante no tempo mais ruído.

## 4 Quantidade de informação, quantificação e codificação

Na disciplina de PDS foi abordada a questão da passagem do sinal contínuo  $s(t)$  para a sua versão discreta no tempo  $s(k)$ . Em particular, preocupámo-nos em deduzir um processo que garantisse duas coisas: 1) que a representação discreta ocupasse o mínimo de banda possível e 2) que permitisse uma reconstrução fiel e sem ambiguidade do sinal original. Por outras palavras, uma reconstrução fiel significa uma reconstrução com o mínimo de distorção. Normalmente diz-se que a distorção é mínima, neste caso zero, quando a quantidade de informação é preservada. Isto é quando a informação contida no sinal  $s(t)$  se encontra integralmente no sinal  $s(k)$ .

É facilmente compreensível que a noção de quantidade de informação seja uma questão central em problemas de telecomunicações. O objectivo primário de um sistema de comunicação não é mais do que transmitir informação de um ponto para o outro. Foi Claude Shannon em 1940 que, pela primeira vez, introduziu a possibilidade de quantificar a quantidade de informação, e assim revolucionou a nossa forma de ver a problemática das comunicações.

Porém não basta que uma determinada mensagem seja fielmente discretizada no tempo, é também necessário que ela seja discretizada na sua amplitude. Isto é,  $s(t)$  é à partida uma função real de variável real  $t$ . Uma vez que se procedeu à discretização da variável tempo  $t$ , ela passou a ser uma função real de variável discreta  $k$ , que toma valores inteiros. Teoricamente uma função real pode tomar um número infinito de valores o que, utilizando um sistema binário, necessitaria na prática um número infinito de bits para ser representado. O processo que permite reduzir o número de níveis que pode tomar a amplitude de uma determinada mensagem chama-se quantificação. A quantificação é um processo que introduz inevitavelmente alguma distorção.

Finalmente, quando a mensagem que se pretende transmitir se encontra discretizada, seja no tempo seja na amplitude, trata-se de determinar qual o melhor modo de representar os níveis obtidos após discretização de forma a minimizar, tanto quanto possível, a quantidade de dados a transmitir, sem que no entanto haja perda de informação. A este último processo chama-se codificação sem ruído ou compressão de dados. Talvez esta última etapa não seja muito clara e por isso vamos dar um exemplo simples. Vamos imaginar que uma determinada mensagem é quantificada entre -10 e +10 volts utilizando 1024 níveis discretos. Admitindo que o sinal é em geral de média nula, é provável que uma estatística demonstre que os valores dos níveis centrais (em torno a 0) são mais prováveis do que os níveis perto dos -10 ou dos +10 volts. Compreende-se então facilmente que seria vantajoso para o sistema de comunicações que os níveis centrais fossem codificados com menos bits, enquanto os níveis menos prováveis (que ocorrem menos frequentemente) fossem codificados

com mais bits. Este processo de atribuição de códigos mais curtos a símbolos mais prováveis e de códigos mais longos a símbolos menos prováveis, consiste um exemplo simples da utilização eficiente da codificação para a diminuição do volume de dados a transmitir, aumentando assim a eficiência do sistema de transmissão. Trata-se de alguma forma de uma compressão de dados, cujo exemplo mais familiar de todos é o algoritmo de Lempel-Ziv universalmente utilizado nos programas de “zipagem” em informática.

## 4.1 Quantidade de informação e entropia

A entropia é uma forma de medir a quantidade de informação. Intuitivamente uma mensagem tem tanta mais informação quanto maior for o seu grau de aleatoriedade ou imprevisibilidade. Por exemplo, se dissermos: “o sol nasceu esta manhã”. Temos aqui uma mensagem com uma certa quantidade de informação. Agora se dissermos: “houve um terramoto em Lisboa.” Qual das duas frases tem mais informação? Intuitivamente seremos levados a dizer que a segunda tem mais informação que a primeira. Isto, porque a segunda mensagem era mais imprevisível, ou seja representa um acontecimento que ocorre menos vezes que o da primeira mensagem. A entropia tenta traduzir uma forma de quantificar este conceito. Assim, por exemplo, a entropia ou quantidade de informação da variável aleatória  $x$  de probabilidade  $p_X(x)$ , é definida por

$$H(x) = E[-\log_2 p_X(x)] = - \sum_{x \in \Omega_x} p_X(x) \log_2 p_X(x). \quad (4-1.1)$$

Nesta equação percebemos o porquê da densidade de probabilidade e do sinal de menos, pois a entropia deverá ser tanto maior quanto menos provável for o sinal, e também percebemos o porquê da esperança matemática  $E[.]$ , que realiza uma “média” sobre todas as tiragens possíveis. Mas de onde vem o  $\log_2$ ? A introdução do logaritmo está ligada com o facto de que se considerarmos dois processos estocásticos independentes  $X$  e  $Y$ , a informação do acontecimento conjunto de  $X$  e de  $Y$  deverá ser simplesmente a soma das quantidades de informação de um e do outro (o logaritmo do produto é a soma dos logaritmos!). Assim deverá haver um logaritmo tal que

$$H(x, y) = E[-\log_2 p_{XY}(x, y)] \quad (4-1.2)$$

$$= E[-\log_2 p_X(x) - \log_2 p_Y(y)] \quad (4-1.3)$$

$$= H(x) + H(Y), \quad (4-1.4)$$

onde  $p_{XY}(x, y)$  não é mais do que a densidade de probabilidade conjunta das va's  $X$  e  $Y$ , tal que, visto que as va's são independentes,  $p_{XY}(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$ . Para o caso do alfabeto binário, formado de 0 e 1's, com probabilidades  $p$  e  $1 - p$  respectivamente, a entropia total é dada por

$$H_b(p) = -p \log_2 p - (1 - p) \log_2(1 - p) \quad (4-1.5)$$

que se encontra representada na figura 4.1 em função da probabilidade  $p$ . Podemos ver

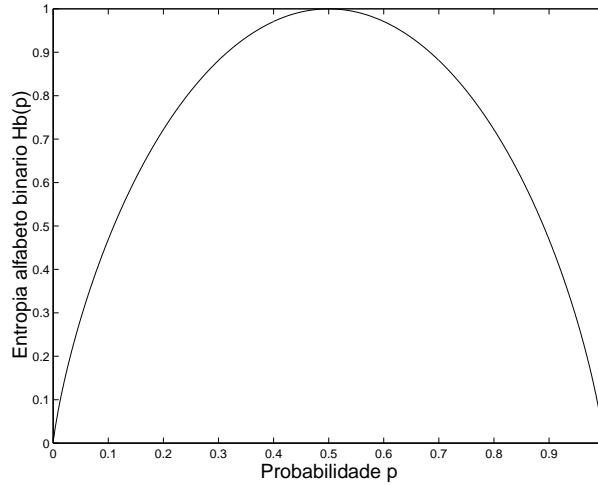


Figura 4.1: entropia do alfabeto binário.

nesta figura que se a probabilidade  $p$  do símbolo 0 for nula então quer dizer que todos os símbolos serão iguais a 1 e imprevisibilidade será nula e portanto a quantidade de informação ou entropia também. O mesmo acontece para  $p = 1$ . Inversamente se  $p = 0.5$ , a probabilidade de ter 0 ou 1 é igual e portanto a imprevisibilidade será máxima coincidindo com a quantidade de informação e com a entropia.

## 4.2 Quantificação

Quantificação é o processo de representação de uma fonte de dados analógicos num conjunto finito de níveis. Como já dissemos, este processo introduz necessariamente alguma distorção e perda de informação. De uma forma geral a quantificação pode ser *uniforme* ou *não uniforme*. Na quantificação uniforme o passo de quantificação, i.e., a diferença entre dois níveis contíguos é constante entre o valor mínimo e o valor máximo. No caso de quantificadores não uniformes, pelo seu lado, o nível de quantificação não é constante. Na análise da quantificação pode-se representar o sinal a quantificar por uma variável aleatória (v.a.)  $X$ , de lei  $p_X(x)$ . O processo de quantificação consiste na divisão do domínio de  $X$  em  $N$  intervalos contíguos onde cada intervalo de quantificação  $R_n$  é representado por um valor  $\hat{x}_n$ . Assim cada vez que a v.a.  $X$ , de valor  $x$ , à entrada do quantificador pertence ao intervalo  $R_n$ , a saída do quantificador toma o valor  $\hat{x}_n$ . O erro quadrático médio dado por

$$\begin{aligned}\epsilon &= E[(x - \hat{x}_n)^2] \\ &= \sum_{n=1}^N \int (x - \hat{x}_n)^2 p_X(x) dx,\end{aligned}\tag{4-2.1}$$

caracteriza, em média, o erro quadrático de quantificação cometido ao substituir o valor real  $x$  pelo seu valor quantificado  $\hat{x}_n$ . O valor (4-2.1) toma o nome de ruído de quantificação. Assim, a relação sinal-ruído de quantificação escreve-se (SQNR=sinal to quantization noise ratio), é

$$\text{SQNR}_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \frac{E[X^2]}{\epsilon}, \quad (4-2.2)$$

onde  $E[X^2]$  representa a esperança matemática do quadrado da v.a.  $X$ , i.e., a sua variância se for de média nula.

### 4.2.1 Quantificação uniforme

No processo de quantificação uniforme o domínio de discretização é dividido em intervalos iguais, i.e.,  $\hat{x}_{n+1} - \hat{x}_n = \Delta$  é uma constante  $\forall n$ . Se o domínio a discretizar não for limitado, então o primeiro e o último intervalos de quantificação são infinitos, i.e., as regiões de discretização serão dadas por

$$\begin{aligned} R_1 &= ] - \infty, a] \\ R_2 &= ]a, a + \Delta] \\ R_3 &= ]a + \Delta, a + 2\Delta] \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4-2.3)$$

$$R_N = ]a + (N - 2)\Delta, \infty[, \quad (4-2.4)$$

demonstra-se facilmente que o nível a associar com cada intervalo de quantificação é dado pelo valor médio de cada intervalo, assim

$$\hat{x}_n = a + (n - 2)\Delta + \frac{\Delta}{2}, \quad (4-2.5)$$

este ponto é chamado a centróide do intervalo e não é mais do que  $\hat{x}_n = E[X|X \in R_n]$ . Será fácil determinar que a função de quantificação  $Q(x) = \hat{x}_n$ ,  $n \in [1, N]$  é uma função em escada, dependente dos dois parâmetros  $a$  e  $\Delta$ .

### 4.2.2 Quantificação não uniforme

Neste caso o intervalo de quantificação não é constante. É óbvio que uma zona de valores onde o sinal é mais provável deverá ter mais níveis do que uma região onde o sinal é pouco provável. Assim, este método de quantificação permite normalmente obter um maior desempenho que o caso uniforme. Prova-se com efeito que os intervalos e níveis de quantificação são dados de forma óptima através das condições de



Lloyd-Max que se escrevem

$$\begin{aligned}\hat{x}_n &= \frac{\int_{a_{n-1}}^{a_n} x p_X(x) dx}{\int_{a_{n-1}}^{a_n} p_X(x) dx} \\ a_n &= \frac{\hat{x}_{n-1} + \hat{x}_n}{2},\end{aligned}\tag{4-2.6}$$

de onde podemos concluir que os níveis de quantificação óptimos são dados pelas centroides e os limites de quantificação de cada região são dados pelos pontos médios entre cada par de centroides. A resolução do sistema de equações (4-2.6) faz-se de modo iterativo partindo de um conjunto inicial de centroides e calculando iterativamente o ruído de distorção, até que não haja uma diminuição significativa dessa distorção entre um ponto e o seguinte.

### 4.3 Codificação

Já vimos como colocar uma mensagem sob a forma de uma sequência de valores ou símbolos que forma uma representação discreta da informação emitida pela fonte. Vamos agora tratar do problema de como codificar de forma óptima esta sequência de símbolos numa sequência de dígitos binários. Tendo em conta que o alfabeto utilizado pela fonte é geralmente finito, o problema da codificação torna-se um problema relativamente fácil. No entanto isto só é verdade quando os símbolos são estatisticamente independentes entre si, i.e., quando o sistema não tem memória - diz-se nesse caso que temos uma *fonte discreta sem memória*. Infelizmente, na prática, poucas fontes de mensagens podem ser consideradas como sendo *fontes discretas sem memória*.

O exemplo clássico consiste em considerar uma fonte discreta sem memória que produz um símbolo cada  $\tau$  segundos. Cada um dos símbolos é selecionado de um alfabeto finito com  $L$  símbolos  $x_n; n = 1, \dots, L$ , com a probabilidade  $p(x_n)$ . Assim a entropia da fonte, de acordo com (4-1.1), é dada por

$$H(x) = - \sum_{n=1}^L p(x_n) \log_2 p(x_n).\tag{4-3.1}$$

Se os símbolos forem igualmente prováveis temos que  $p(x_n) = 1/L$  e então

$$\begin{aligned}H(x) &= -\frac{1}{L} \sum_{n=1}^L \log_2 \frac{1}{L} \\ &= \log_2 L,\end{aligned}\tag{4-3.2}$$

o que representa o valor máximo que pode tomar  $H(x)$  em (4-3.1), e que é o número de bits médio necessário para representar cada símbolo do alfabeto. A taxa de transmissão é então de  $H(x)/\tau$  bits/s. Existem essencialmente dois grandes grupos de

métodos de codificação para fontes discretas sem memória, que são: codificação com palavras de comprimento fixo e codificação com palavras de comprimento variável.

### 4.3.1 Com palavras de comprimento fixo

Neste caso utiliza-se um número de bits  $R$  fixo para cada símbolo. De acordo com este esquema de codificação, a cada símbolo corresponderá um único conjunto de  $R$  bits. Dado que temos  $L$  símbolos e, admitindo que  $L$  é uma potência de 2, o número de bits necessário é dado por  $R = \log_2 L$ . Se  $L$  não for uma potência de 2 então o número de bits necessário será  $R = \text{int}[\log_2 L] + 1$ , onde  $\text{int}$  significa “o maior inteiro inferior a”. É óbvio que se  $H(x) \leq \log_2 L$  teremos que  $R \geq H(x)$ . Na prática um bom esquema de codificação é aquele que se aproxima o mais possível da entropia, e portanto  $H(x)/R$  é uma medida da eficiência do esquema de codificação. Existem métodos alternativos que consistem em codificar não cada símbolo individualmente mas sim sequências de símbolos (um exemplo típico é um código fonte no qual as palavras *while do*, etc se encontram frequentemente repetidas). Assim pode-se melhorar a eficiência do esquema de codificação aumentando o número de símbolos por grupo tanto quanto se pretender.

Alternativamente, existem esquemas nos quais a relação entre a representação em bits de cada símbolo não é única. Isto significa que no alfabeto podem coexistir um conjunto de símbolos cuja representação é única (os mais frequentes) e um outro conjunto de símbolos representados pelo mesmo conjunto de bits (os muito pouco frequentes). É claro que este esquema de codificação não permite a recuperação de toda a informação emitida pela fonte no momento de descodificação. Trata-se aqui de uma codificação que introduz ruído de codificação e portanto perda de informação. O problema na prática é de controlar o ruído de quantificação dentro de níveis aceitáveis obtendo em troca um forte aumento da compactação da informação que se traduz numa eficiência alta e portanto uma alta taxa de transmissão efectiva.

### 4.3.2 Com palavras de comprimento variável

Quando os símbolos emitidos pela fonte não são equiprováveis torna-se óbvio que o esquema de codificação mais apropriado deverá ter códigos de comprimento variável: os símbolos mais frequentes deverão ter códigos com menos bits e vice-versa. O exemplo mais conhecido é o código Morse que já na época utilizava códigos mais curtos para as letras mais frequentes do alfabeto. Um problema óbvio desde logo é que as letras mais frequentes por exemplo em inglês não serão sempre as mais frequentes em português o que leva inevitavelmente a perdas de eficiência quando de mudanças de língua. Um problema que se coloca na prática quando da codificação com palavras de comprimento variável é que por vezes não podemos saber imediatamente no receptor

se uma dada sequência de bits forma vários símbolos codificados com códigos curtos ou símbolos codificados com códigos longos, dado que utilizando dígitos binários, utilizar o ‘1’ para o A, ‘00’ para o B, ‘01’ para o C e ‘10’ para o D, a sequência ‘001001’ não nos permite determinar unicamente quais os símbolos emitidos. Claramente temos B como primeiro símbolo mas em seguida não sabemos se é ABA ou CB. Na prática temos que ter a certeza que o código escolhido não contém ambiguidades e pode ser unicamente e instantaneamente decodificado. Desde já podemos notar que existe uma condição de base que é chamada a *Condição do prefixo*: e que consiste em afirmar que nenhum código deverá ser o prefixo de um outro código. Pode-se efectivamente demonstrar que códigos com palavras de comprimento variável que satisfazem a condição do prefixo são eficientes para qualquer fonte discreta sem memória com símbolos não equiprováveis. O algoritmo de Huffman permite construir tais códigos e é muito importante na prática.

### Algoritmo de codificação de Huffman

O método proposto por Huffman em 1952 baseia-se no princípio de atribuir de forma progressiva os códigos mais longos aos símbolos menos prováveis até aos símbolos mais prováveis, evitando os prefixos. Desde logo se pode constatar que para construir um esquema de codificação com o algoritmo de Huffman é necessário dispôr das probabilidades de cada símbolo. O procedimento inicia-se concatenando os dois símbolos menos prováveis construindo um novo símbolo cuja probabilidade é igual à soma das probabilidades dos dois símbolos iniciais. Este processo prossegue até ficarmos com um único símbolo de probabilidade 1. Obtem-se assim uma árvore contendo todas as combinações dos símbolos existentes. Começa-se depois pela raiz da árvore alocando os dígitos ‘0’ e ‘1’ aos dois símbolos mais prováveis (e que assim terão o código mais curto); em seguida os dois símbolos que formam, por exemplo o símbolo codificado com o ‘0’ serão codificados com ‘00’ e ‘01’, da mesma forma para o outro ramo com ‘10’ e ‘11’ e assim sucessivamente aumentando o número de dígitos do código à medida que se diminui a probabilidade do símbolo e garantido que a condição do prefixo é satisfeita. Talvez a forma mais simples seja, neste caso, a de aplicar o algoritmo de codificação de Huffman num exemplo.

**Exemplos:** consideremos um alfabeto de  $L = 7$  símbolos  $\{x_1, \dots, x_7\}$  que ocorrem com as probabilidades indicadas na tabela 4.1.

A aplicação do algoritmo faz-se através da árvore da figura 4.2 da qual podemos extrair os códigos indicados na última coluna da tabela 4.1. Podemos verificar que estes códigos efectivamente asseguram a condição do prefixo. Podemos ainda notar que a codificação de Huffman não é única pois a atribuição do bit ‘0’ ao ramo superior e ‘1’ ao ramo inferior é puramente arbitrária, assim como a junção de  $x_1$  e  $x_2$  e o resultado com  $x'_3$  de probabilidade 0.35 ou alternativamente  $x_2$  com  $x'_3$  e o resultado com  $x_1$ . Deixamos ao cuidado do leitor a verificação de que a nova codificação assim obtida atinge o mesmo factor de qualidade. A informação contida em cada símbolo

símbolos	probabilidade	informação	Código
$x_1$	0.35	1.5146	00
$x_2$	0.30	1.7370	01
$x_3$	0.20	2.3219	10
$x_4$	0.10	3.3219	110
$x_5$	0.04	4.6439	1110
$x_6$	0.005	7.6439	11110
$x_7$	0.005	7.6439	11111

Tabela 4.1: *exemplo de aplicação do algoritmo de codificação de Huffman (exemplo 3.3.1 de [2]).*

$i$  é dada por  $\pi \log_2 p_i$  e encontra-se calculada na terceira coluna da tabela 4.1 e de onde podemos deduzir a quantidade de informação total

$$H(x) = \sum_{i=1}^7 p_i \log_2 p_i = 2.11. \quad (4-3.3)$$

Para ter uma ideia do grau de eficiência deste código devemos comparar este número com aquele dado pelo número de bits médio

$$R = \sum_{i=1}^7 p_i N_i = 2.21, \quad (4-3.4)$$

onde  $N_i$  é um número de bits utilizado para codificar o símbolo  $x_i$ . Chegamos assim ao factor de qualidade  $Q = H(x)/R = 0.954$ , ou seja, uma eficiência de 95.4%. Em termos de comparação, se tivéssemos utilizado um algoritmo com palavras de comprimento fixo, teriam sido necessários 3 bits por símbolo e por isso teríamos  $R = 3$ , o que daria um factor de eficiência  $Q = 2.11/3 = 0.7$  ou 70%.

Voltamos agora ao caso geral no qual a fonte não é sem memória, i.e., o caso em que os símbolos emitidos não são estatisticamente independentes uns dos outros, porém consideraremos sempre o caso em que a sequência de símbolos será considerada estacionária. Ou seja, o processo aleatório discreto associado à fonte não é branco mas é estacionário. Aqui o problema é singularmente mais complicado dada a dependência estatística entre símbolos, que não nos permite determinar a entropia (e portanto o número mínimo de bits necessário), de forma directa. Felizmente pode-se definir a entropia de um alfabeto de uma fonte estacionária através da definição da entropia de um bloco de símbolos. Assim, seja a entropia do bloco de símbolos  $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ ,

$$H(X_1, X_2, \dots, X_k) = \sum_{i=1}^k H(X_i | X_1, X_2, \dots, X_{i-1}), \quad (4-3.5)$$

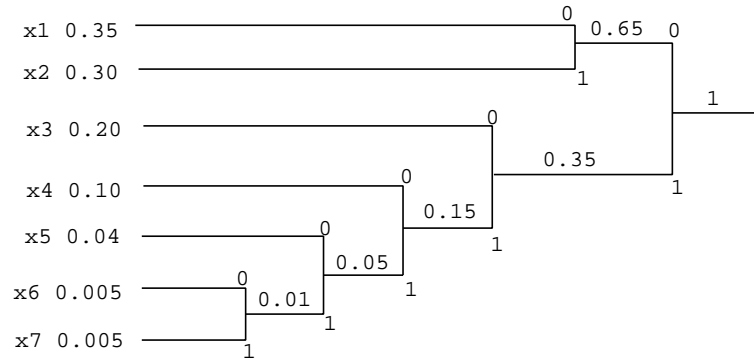


Figura 4.2: árvore de aplicação do algoritmo de Huffman no exemplo da tabela 4.1.

onde  $H(X_i|X_1, X_2, \dots, X_k)$  é a entropia condicional do símbolo  $X_i$  dados os símbolos anteriores  $X_n; n = 1, \dots, i - 1$ . A entropia por símbolo dentro do conjunto de  $k$  símbolos, define-se como sendo

$$H_k(X) = \frac{1}{k}H(X_1, X_2, \dots, X_k). \quad (4-3.6)$$

Finalmente a entropia do alfabeto escreve-se como sendo a entropia do bloco  $k$  quando  $k \rightarrow \infty$ ,

$$H(X) = \lim_{k \rightarrow \infty} H_k(X) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k}H(X_1, X_2, \dots, X_k). \quad (4-3.7)$$

O papel da definição da noção de entropia no caso estacionário é essencial pois permite estabelecer uma métrica da eficiência da codificação. A partir daqui prova-se que uma codificação eficiente de uma fonte discreta estacionária com memória é possível através da representação de largos blocos de símbolos por códigos. Para cada um dos blocos pode (e deve) ser utilizado o algoritmo de Huffman com código de palavras de comprimento variável. De notar no entanto que para que isso seja possível será necessário conhecer as densidades de probabilidade conjuntas dos símbolos contidos no mesmo bloco, o que nem sempre acontece de forma directa e requiere frequentemente na prática uma fase de amostragem para obter uma estimação empírica dessas probabilidades. Para obviar este problema da necessidade da estimação das probabilidades a priori foi proposto o algoritmo de Lempel-Ziv.

### Algoritmo de Lempel-Ziv

Este algoritmo é independente das propriedades estatísticas dos dados e por isso tem um carácter universal. Este algoritmo procede separando a sequência emitida pela fonte em blocos de comprimento variável, chamadas frases. Uma nova frase é criada cada vez que ela difere no seu último símbolo de uma outra frase formada anteriormente. As frases são colocadas num dicionário juntamente com o respectivo índice de início de frase na mensagem. Quando toda a mensagem foi lida, atribui-se sequencialmente um código a cada uma das frases formado pela localização da frase

na mensagem acrescentada da última letra em que cada mensagem difere das outras já classificadas no dicionário. Esta etapa de codificação é inicializada começando com o código '0000' (no número de bits necessário para o comprimento do dicionário). No decodificador constrói-se a tabela a partir dos códigos recebidos procedendo ao contrário, separando o código em localização e última letra de forma ordenada. A partir da tabela reconstrói-se a mensagem. Trata-se de um processo não linear cuja análise ultrapassa largamente o objectivo deste capítulo introdutivo à codificação. Mencione-se no entanto que este algoritmo é hoje em dia o mais utilizado em aplicativos de compressão e descompressão de dados tais como os programas `zip` e `unzip` tanto em Unix como em DOS.

### 4.3.3 Codificação de sinais analógicos

Até agora temos descrito técnicas de codificação para fontes de sinal discretas, ou para fontes de sinal analógicas discretizadas e quantificadas. Existem no entanto técnicas de codificação utilizadas para fontes de sinal analógicas como, por exemplo, a Modulação por códigos de pulsos (*Pulse Code Modulation - PCM*) e as suas variantes tal como a PCM diferencial (DPCM) ou PCM diferencial adaptativa (ADPCM). Vamos agora definir estes tipos de codificação.

#### Modulação por Códigos de Pulso (Pulse Code Modulation - PCM)

Existem dois tipos de PCM: uniforme e não uniforme. Na PCM uniforme o sinal analógico é primeiramente amostrado a uma taxa superior a Nyquist, i.e., se  $W$  for a banda (em Hz) do sinal analógico, a taxa de amostragem deverá ser  $f_s \geq 2W$ . Em seguida o sinal já discreto no tempo é quantificado utilizando  $2^R$  níveis discretos entre o valor mínimo e máximo do sinal de entrada  $x(t) \in [-x_{\max}, x_{\max}]$ . Assim o intervalo de quantificação será  $\Delta = 2x_{\max}/2^R$ . Como em qualquer processo de quantificação vai existir um erro (ou ruído) de quantificação devido à diferença entre o valor real do sinal no instante  $k$ ,  $x(k)$  e o seu valor quantificado  $\hat{x}(k)$ , que pode ser estimado considerando que, se o número de níveis  $N = 2^R$  é suficientemente elevado, o sinal amostrado pode-se representar como

$$\hat{x}(k) = x(k) + q(k), \quad (4-3.8)$$

onde  $q(k)$  é o ruído de quantificação, suposto uniforme no intervalo  $[-\Delta/2, \Delta/2]$ . Ora é sabido que a potência do ruído pode ser expressa pela sua variância, o que para uma v.a. uniforme é

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{\Delta^2}{12}, \\ &= \frac{x_{\max}^2}{3 \times 4^R}, \end{aligned} \quad (4-3.9)$$

$$(4-3.10)$$

de onde podemos calcular a relação sinal-ruído de quantificação (SQNR) em dB, como sendo

$$\begin{aligned} \text{SQNR}_{\text{dB}} &= 10 \log_{10} \left[ 3 \times 4^R \frac{E[X^2]}{x_{\text{max}}^2} \right] \\ &= 10 \log_{10} [3 \times 4^R E[\bar{X}^2]] \\ &\approx 4.8 + 6R + 10 \log_{10} E[\bar{X}^2], \end{aligned} \quad (4-3.11)$$

onde  $\bar{X} = X/x_{\text{max}}$  é o valor normalizado do sinal  $x(k)$ . A taxa de transmissão do sinal codificado é (no mínimo)  $f_s R$ , o que significa que na prática é quase sempre superior a  $1.5 f_s R$ .

A PCM não uniforme difere apenas pelo facto de que antes de ser quantificado, o sinal é filtrado por um elemento não linear destinado a reduzir a sua gama de valores. Na prática isto corresponde a ter mais níveis nos valores em torno a 0 e menos níveis nos valores extremos. Depois desta filtragem em amplitude não linear é aplicada um PCM uniforme. Na recepção, depois de uma decodificação PCM uniforme o sinal deve ser filtrado com um filtro inverso daquele utilizado na transmissão de forma a colocar o sinal na sua gama de valores original. Nas aulas práticas veremos alguns exemplos de filtragem não linear para PCM não uniforme.

### PCM diferencial (*Differential PCM - DPCM*)

Em PCM cada uma das amostras é quantificada e codificada nos  $2^R$  bits independentemente das outras amostras anteriores do sinal. Ora na prática, se a taxa de amostragem  $f_s$  é suficientemente alta, a amplitude do sinal de entrada é suposta não variar muita numa amostra para a seguinte, o que pressupõe a ideia de que em vez de codificar o valor absoluto do sinal a codificação do seu valor em relação à amostra anterior permitiria utilizar muito menos bits e portanto uma menor taxa de transmissão para enviar a mesma quantidade de informação. Esta é a ideia de base do PCM diferencial (DPCM): trata-se de codificar não o valor absoluto do sinal mas apenas a sua variação em relação à amostra anterior. Um dos problemas mais óbvios com a aplicação directa desta simples ideia é de que os erros devidos ao ruído tem tendência para se adicionar ao longo do tempo. Por essa razão surge a ideia de não limitar a dependência da evolução do sinal apenas à última amostra, mas sim às, digamos,  $p$  últimas amostras. Assim, constrói-se um modelo de dados recursivo de forma a escrever o sinal amostrado predicto no instante  $k$  como

$$\tilde{x}(k) = \sum_{i=1}^p a_i x(k-i), \quad (4-3.12)$$

o que é uma combinação linear ponderada das  $p$  amostras anteriores, e onde os coeficientes de ponderação  $a_i$  são determinados de forma a minimizar o erro quadrático

médio  $\epsilon^2(k)$  entre o sinal predicto e o sinal real

$$E[\epsilon^2(k)] = E[(x_k - \sum_{i=1}^p a_i x_{k-i})^2]. \quad (4-3.13)$$

Existem vários métodos bem conhecidos para estimar os coeficientes  $a_i$ , entre os quais os famosos algoritmos de Levison e Durbin (1959). Na prática o que acaba por ter que ser transmitido é o erro entre o sinal predicto e o sinal real o que requer, no lado do receptor, que o mesmo conjunto de coeficientes  $a_i$  seja utilizado para voltar a reconstruir o sinal  $x(k)$  a partir de  $\tilde{x}_k$  e das amostras anteriormente estimadas do sinal. Prova-se que neste algoritmo os erros não se acumulam ao longo do tempo.

### **PCM diferencial adaptativo (*Adaptive DPCM - ADPCM*)**

Uma das suposições que estão na base do DPCM é que o sinal não muda muito de uma amostra para a seguinte, o que permite obter um bom estimador do seu valor no instante  $k$  conhecendo as amostras nos  $p$  instantes anteriores. Quanto mais elevado for o valor de  $p$  maior é a quantidade de informação reunida no algoritmo para determinar  $x(k)$  e normalmente mais estável e preciso será o algoritmo, o que na prática se traduz por uma baixa taxa de erro de transmissão. Porém, não devemos esquecer que na base do método se encontra a suposição de invariabilidade (ou fraca variabilidade temporal) do sinal o que, na presença de ruído, se traduz por estacionaridade. A pergunta que se pode colocar é: então e quando o sinal não é estacionário? A resposta a esta pergunta encontra-se no DPCM adaptativo (ADPCM). Na prática a não estacionaridade é difícil de ter em conta, mas também existem poucos processos de interesse que sejam absolutamente não estacionários e portanto apenas nos interessa o caso da quasi-não estacionaridade, onde a média e a variância variam lentamente com o tempo. Uma das formas para ter em conta esta quasi-não estacionaridade é utilizar um quantificador DPCM uniforme no qual o intervalo de quantificação varia de acordo com a variância local das amostras do sinal de entrada. Por variância local entende-se a variância estimada numa janela temporal em torno à amostra actual. Assim pode-se fazer variar o intervalo de amostragem e portanto a dinâmica do sinal à entrada do quantificador de acordo com as variações lentas do sinal de entrada.

### **Modulação Delta (*Delta Modulation - DM*)**

A modulação delta (DM) é uma variante simplificada do DPCM e que se encontra representada na figura 4.3. Neste codificador simplificado, o sinal é modelado utilizando um predictor fixo de ordem um ( $p = 1$ ) do tipo (4-3.12) com  $a_1 = 1$  e quantificado apenas com um bit (2 níveis). Na prática isto é equivalente a dizer que o valor predicto do sinal é apenas o valor no instante anterior mais o ruído de quantificação. O resultado é que o sinal se encontra aproximado por uma função em escada com um determinado intervalo de quantificação  $\Delta$ . Para ser efectiva, a DM geralmente requer uma taxa de amostragem bem superior a Nyquist, da ordem de 5 vezes a taxa mínima, e que o sinal a emitir evolua lentamente. Mesmo assim existem



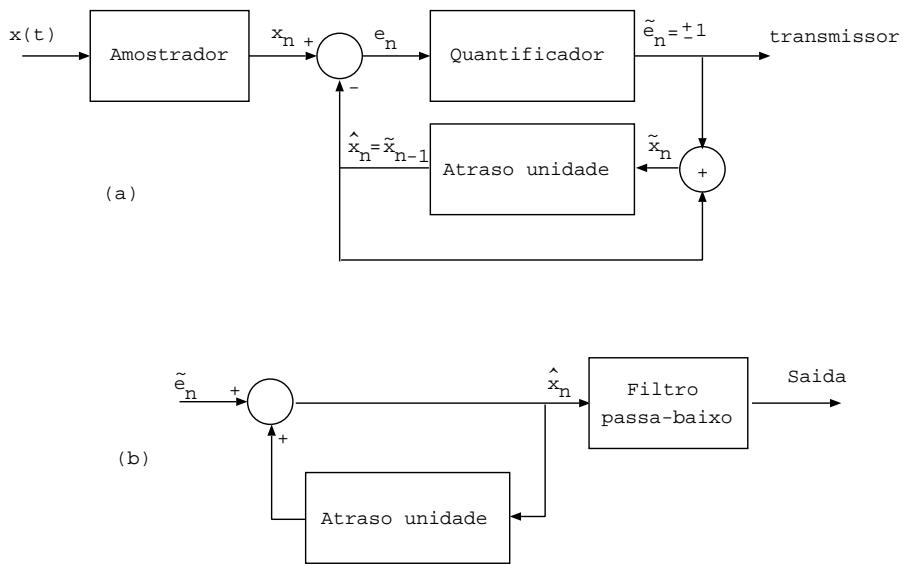


Figura 4.3: codificação por modulação delta (DM): sistema codificador (a) e sistema decodificador (b).

dois tipos de distorção frequentes no receptor, que são: o erro de “slope-overload” e o erro de ruído granular. Estes dois tipos de distorção encontram-se exemplificados na figura 4.4 e resultam, como se pode verificar, de uma demasiado rápida variação da entrada para o intervalo de quantificação, que não consegue acompanhar o sinal, e de uma variação demasiado lenta da entrada que resulta numa constante oscilação em torno a um valor que varia demasiado lentamente. Estes dois erros impõem re-

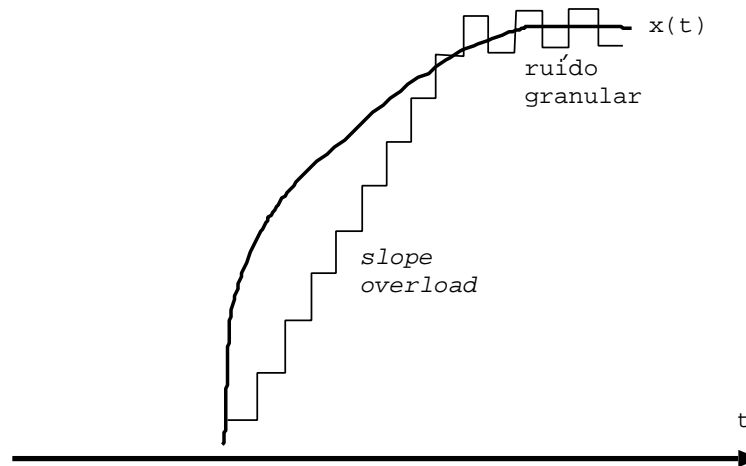


Figura 4.4: distorção de *slope overload* e ruído granular, devida ao desajuste do intervalo de quantificação.

strições contraditórias no intervalo de quantificação  $\Delta$  que num caso deverá ser maior

e no outro caso menor. Existe uma DM com intervalo de quantificação a intervalo variável, na qual  $\Delta$  é fixado de forma adaptativa de acordo com a maior ou menor taxa de variação do sinal de entrada de forma minimizar simultaneamente os dois tipos de distorção.

#### 4.3.4 Codificação em sub-bandas

Devido a estes problemas de sinais com requisitos contraditórios, uns que variam rápido demais e outros lentos demais, colocou-se a ideia de filtrar o sinal a emitir em várias sub-bandas de frequência, podendo assim, eventualmente separar componentes do sinal com maior dinâmica de outros com menor dinâmica, e utilizando mais bits para um e menos para outro. Isto implica uma recombinação do sinal à chegada ao receptor. Demonstrou-se na prática que a codificação em sub-bandas é muito efectiva para a codificação da voz. Assumindo que a voz se encontra entre 0 e 3200 Hz, é frequente definir 4 sub-bandas 0-400, 400-800, 800-1600 e 1600-3200 Hz. Note-se que cada filtro tem uma banda que é o dobro do anterior e são por isso chamados filtros em oitavos de banda. A voz tem geralmente uma dinâmica mais elevada e os erros de quantificação são mais perceptíveis ao ouvido também nessa banda, o que implica que mais bits deverão ser usados para codificar o sinal nas primeiras bandas e progressivamente menos nas seguintes. Geralmente utiliza-se ADPCM em cada sub-banda.

#### 4.3.5 Codificação baseada em modelos do sinal

Convém ainda referir, para completar este capítulo, que existe uma outra classe de métodos que tenta resolver o problema da codificação através de um método completamente diferente que é utilizando modelos do sinal. Neste tipo de métodos o que é transmitido deixa de ser o sinal propriamente dito (ou suas componentes) mas sim os coeficientes de um modelo ajustado no sinal. Para certos tipos de sinais, que podem ser correctamente representados pelo modelo utilizado, o ganho em termos de taxa de transmissão e número de bits utilizado pode ser muito superior a qualquer um dos outros métodos de codificação utilizados anteriormente. Um erro de quantificação mínimo é obtido através de um maior ou menor ajuste do modelo e que se traduz por um maior ou menor número de coeficientes. Obviamente que, se o sinal for dificilmente representado pelo modelo, o número de coeficientes necessários para uma representação correcta torna-se muito elevado e devido a limitações práticas no número máximo de coeficientes, a distorção tende a aumentar. Não nos vamos alongar aqui neste tipo de métodos, basta dizer que o mais utilizado se chama codificação de predição linear (*Linear Prediction Coding - LPC*), e que passa pela utilização de um modelo auto-regressivo (AR) semelhante ao representado na equação (4-3.12).

## Resumo do capítulo 4:

Este capítulo trata dos vários processos por que passa o sinal emitido pela fonte quando da sua entrada no bloco emissor, nomeadamente:

- começa-se por definir a uma das grandezas fundamentais em teoria da informação que é precisamente a noção de quantidade de informação. Em particular, diz-se que a quantidade de informação se encontra ligada à entropia e é portanto uma medida do grau de imprevisibilidade da mensagem transmitida;
- estabelece-se a necessidade de quantificar o sinal analógico real num número finito de valores e define-se o ruído de quantificação em função dos vários tipos de quantificadores;
- a codificação da mensagem emitida pela fonte num alfabeto eficiente de transmissão da informação seja com palavras de comprimento fixo seja com palavras de comprimento variável; introduz-se o conceito de eficiência de codificação em relação à entropia teórica. São dados como exemplos o algoritmo de Huffman e o de Lempel-Ziv.
- a codificação de sinais analógicos e o PCM, DPCM, ADPCM e modulação delta são apresentados e caracterizados.

## 5 Modulação analógica de onda sinusoidal

A modulação de portadora sinusoidal compreende a modulação de amplitude, de fase e de frequência, que constituem uma família de métodos de modulação nos quais a amplitude, a fase ou a frequência de uma senoide de frequência central pré-determinada é alterada em função do sinal modulador. A modulação de amplitude (AM) é caracterizada por uma relativa simplicidade de representação e uma fraca necessidade de banda passante. Por outro lado a sua eficiência em termos de potência é bastante baixa quando comparada com os métodos de modulação angular (fase e frequência). Os métodos de modulação AM são ainda hoje frequentemente empregues em difusão rádio e TV, comunicações ponto a ponto (SSB) e multiplexagem em telefonia. Os métodos de modulação de fase e frequência são mais difíceis de implementar mas bastante mais eficientes e imunes ao ruído e daí uma qualidade de recepção bastante superior.

### 5.1 Modulação de amplitude com duas bandas laterais (AM-DSB)

Uma portadora de frequência central  $f_c$  e amplitude  $A_c$  é modulada em amplitude por um sinal  $m(t)$  quando se escreve

$$s(t) = [1 + a\bar{m}(t)]c(t), \quad (5-1.1)$$

onde  $m(t)$  é a mensagem a transmitir, passa-baixo, dentro da banda  $-W, W$  e  $c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$  é a portadora onde se supõe que  $f_c > W$  e  $0 \leq a \leq 1$  é um coeficiente real denominado índice de modulação. O sinal  $\bar{m}(t)$  é a mensagem  $m(t)$  normalizada, *i.e.*, tal que

$$\bar{m}(t) = \frac{m(t)}{\max |m(t)|}. \quad (5-1.2)$$

Obviamente (como aliás já vimos no capítulo 2.1) este tipo de modulação resulta no domínio da frequência num espectro que se escreve

$$S(f) = \frac{A_c}{2} [a\bar{M}(f - f_c) + \delta(f - f_c) + a\bar{M}(f + f_c) + \delta(f + f_c)], \quad (5-1.3)$$

onde o espectro do sinal modulador (normalizado) foi deslocado de  $-f_c$  e  $+f_c$ , frequências às quais encontramos igualmente um impulso correspondente à portadora. Todo o espectro foi multiplicado por  $1/2$  devido ao princípio de conservação de energia. A banda ocupada pelo sinal modulador é de  $2W$ .

**Exemplo:** considere o sinal

$$m(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < t_0/3 \\ -2 & t_0/3 \leq t < 2t_0/3 \\ 0, & \text{para todo outro } t \end{cases} \quad (5-1.4)$$

com  $t_0 = 0.15$  e que modula uma portadora de frequência  $f_c = 250$  Hz, com  $A_c = 2$  e um índice de modulação  $a = 0.8$ .

- determine a expressão do sinal modulador normalizado  $\bar{m}(t)$
- calcule a expressão do sinal modulado  $s(t)$
- determine o espectro de  $\bar{m}(t)$  e de  $s(t)$

O sinal modulador normalizado escreve-se facilmente, tendo em conta que

$$\max |m(t)| = 2$$

o que implica que

$$\bar{m}(t) = \begin{cases} 1/2 & 0 \leq t < t_0/3 \\ -1 & t_0/3 \leq t < 2t_0/3 \\ 0. & \text{para todo outro } t \end{cases}$$

A expressão do sinal modulado obtém-se começando por considerar que o sinal modulador normalizado se escreve como uma soma de duas funções porta de largura  $t_0/3$ : uma positiva, de amplitude  $1/2$  e atrasada de  $t_0/6$ , outra negativa de amplitude  $-1$  e atrasada de  $t_0/2$ . Assim podemos escrever

$$\bar{m}(t) = \frac{1}{2}p\left(\frac{t-t_0/6}{t_0/3}\right) - p\left(\frac{t-t_0/2}{t_0/3}\right),$$

onde  $p(t)$  é a função porta típica, centrada e de amplitude unidade. Podemos então escrever o sinal modulado

$$\begin{aligned} s(t) &= 2[1 + 0.8\bar{m}(t)] \cos(500\pi t) \\ &= 2 \left[ 1 + 0.4p\left(\frac{t-t_0/6}{t_0/3}\right) - 0.8p\left(\frac{t-t_0/2}{t_0/3}\right) \right] \cos(500\pi t). \end{aligned}$$

O espectro do sinal modulador  $m(t)$  obtém-se a partir da expressão temporal acima sabendo que  $\text{TF}[p(t)] = \text{sinc}(f)$  e portanto que devido a um atraso  $t_0$  e a uma largura de porta  $\tau$  temos que

$$\text{TF} \left[ p\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right) \right] = \tau e^{-j2\pi f t_0} \text{sinc}(f\tau),$$

de onde aplicando à expressão de  $\bar{m}(t)$  acima obtemos

$$\begin{aligned}\bar{M}(f) &= \frac{t_0}{6}e^{-j\pi ft_0/3}\text{sinc}\left(\frac{t_0 f}{3}\right) - \frac{t_0}{3}e^{-j\pi ft_0}\text{sinc}\left(\frac{t_0 f}{3}\right) \\ &= \frac{t_0}{3}e^{-j\pi ft_0/3}\text{sinc}\left(\frac{t_0 f}{3}\right)[1/2 - e^{-j2\pi ft_0/3}].\end{aligned}$$

Por outro lado a expressão do espectro do sinal modulado obtem-se a partir da equação anterior deslocando-a de  $+f_c$  e de  $-f_c$  e adicionando os Diracs às mesmas frequências, correspondentes à portadora e tendo em conta que  $A_c = 2$ ,

$$\begin{aligned}S(f) &= \delta(f - f_c) + \delta(f + f_c) + \\ &0.8\frac{t_0}{3}e^{-j\pi(f-f_c)t_0/3}\text{sinc}\left(\frac{t_0(f-f_c)}{3}\right)[1/2 - e^{-j2\pi(f-f_c)t_0/3}] + \\ &0.8\frac{t_0}{3}e^{-j\pi(f+f_c)t_0/3}\text{sinc}\left(\frac{t_0(f+f_c)}{3}\right)[1/2 - e^{-j2\pi(f+f_c)t_0/3}],\end{aligned}$$

que é o espectro do sinal modulado  $s(t)$ .

Podemos calcular igualmente a potência do sinal modulado que se exprime utilizando (2-2.56) como

$$P_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt \quad (5-1.5)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A_c^2 [1 + a\bar{m}(t)]^2 \cos^2(2\pi ft) dt \quad (5-1.6)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [A_c^2 \cos^2(2\pi f_c t) + A_c^2 a^2 \bar{m}^2(t) \cos^2(2\pi f_c t) + \quad (5-1.7)$$

$$+ 2A_c^2 a \bar{m}(t) \cos(2\pi f_c t)] dt \quad (5-1.8)$$

$$= \frac{A_c^2}{2} + \frac{A_c^2 a^2}{2} P_{\bar{m}} + 0, \quad (5-1.9)$$

onde se assumiu que a média do sinal modulador normalizado  $\bar{m}(t)$  era igual a zero.

**Exemplo:** voltando ao sinal  $m(t)$  do exemplo anterior, calcular as potências  $P_{\bar{m}}$  e  $P_s$ .

Podemos por exemplo calcular para o sinal não normalizado  $m(t)$ ,

$$\begin{aligned}P_m &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} m^2(t) dt \\ &= \frac{3}{t_0} \int_0^{t_0/3} 1^2 dt + \frac{3}{t_0} \int_{t_0/3}^{2t_0/3} 2^2 dt \\ &= 5,\end{aligned}$$

de onde podemos deduzir

$$P_{\bar{m}} = \frac{P_m}{2^2} = \frac{5}{4}.$$

No que diz respeito à potência do sinal  $s(t)$  podemos escrever, utilizando (5-1.9), com  $A_c = 2$  e  $a = 0.8$

$$\begin{aligned} P_s &= \frac{A_c}{2} + \frac{A_c^2 a^2}{2} P_{\bar{m}} \\ &= 2 + \frac{4(0.8)^2 5}{2 \cdot 4} \\ &= 3.6. \end{aligned}$$

## 5.2 Modulação de amplitude com supressão de portadora (AM-CS)

Neste caso, dito AM-CS (*Amplitude Modulation - Carrier Suppressed*) temos o mesmo tipo de modulação que no caso anterior, a diferença consistindo apenas na supressão da moduladora. Assim, o sinal modulado escreve-se

$$s(t) = m(t)c(t), \quad (5-2.1)$$

onde, como anteriormente,  $m(t)$  é a mensagem ou sinal modulador e  $c(t)$  é a portadora. Com  $c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$  encontra-se facilmente o espectro de  $s(t)$  como sendo

$$S(f) = \frac{A_c}{2} M(f - f_c) + \frac{A_c}{2} M(f + f_c). \quad (5-2.2)$$

A principal vantagem deste tipo de modulação é o de a potência necessária no sinal modulado ser bastante inferior mantendo no entanto a mesma quantidade de informação transmitida. É por isso um sistema de modulação mais eficaz que o anterior. A potência em  $S(f)$  é

$$P_s = \frac{A_c^2}{2} P_m, \quad (5-2.3)$$

valor inferior de  $A_c/2$  em relação ao caso anterior.

A realização prática da modulação de amplitude (seja com ou sem portadora) pode ser efectuada através de um circuito de blocos conforme exemplificado na figura 5.1. Este circuito denominado “modulador multiplicador”, utiliza um multiplicador de alta frequência para efectuar a modulação da portadora gerada num oscilador local pelo sinal útil previamente limitado e amplificado pelo respectivo coeficiente de modulação. Assim o sinal modulado escreve-se

$$\begin{aligned} s(t) &= a\bar{m}(t)A_c \cos \omega_c t + A_c \cos \omega_c t \\ &= A_c [1 + a\bar{m}(t)] \cos \omega_c t. \end{aligned} \quad (5-2.4)$$

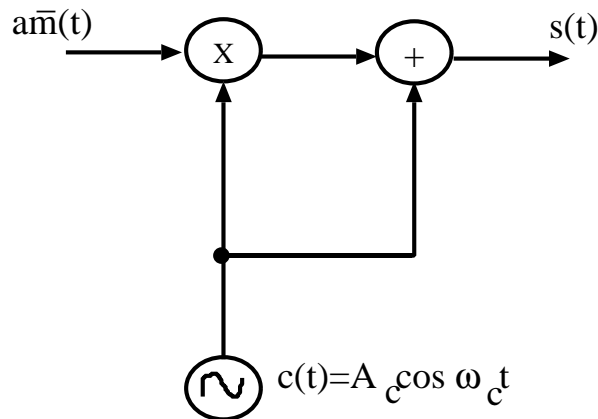


Figura 5.1: esquema de blocos para modulação de amplitude (AM).

A implementação da modulação AM-CS faz-se apenas com o multiplicador omitindo o somador. O problema prático em termos de linearidade e fidelidade na banda vem da necessidade de empregar um multiplicador de alta frequência. Existem várias estratégias para obviar, ou pelo menos atenuar, este problema (ver páginas 158 e seguintes de [11]).

### 5.3 Modulação de amplitude de banda lateral única (AM-SSB)

Nos dois exemplos de modulação descritos anteriormente a informação relativa à mensagem  $m(t)$  encontrava-se à frequência  $f_c$  e depois repetida em  $-f_c$ . Isto é redundante. Na modulação em banda lateral única (SSB - single side band) pretende-se acabar com esta redundância de forma a dividir por dois a potência necessária para transmitir a mesma quantidade de informação. A figura 5.2 mostra um sinal  $m(t)$  em banda base (figura 5.2(a)) e o seu espectro modulado em AM-DSB (figura 5.2(b)). Para transmitir a informação contida na figura 5.2(a) bastaria que o sinal modulado contivesse as partes superiores e inferiores do espectro de  $m(t)$  resultando da passagem do espectro da figura 5.2(b), por exemplo, por um filtro passa-alto de frequência de corte  $f_c$  (representado pela linha em ponteados) resultando no espectro indicado na figura 5.2(c). Obviamente um raciocínio idêntico poderia ser feito com uma filtragem passa-baixo de frequência de corte  $f_c$  e cujo resultado seria o de preservar no sinal modulado apenas a componente inferior da mensagem  $m(t)$ . A modulação exemplificada no primeiro caso é chamada USSB - upper SSB e no segundo é LSSB - lower SSB. Como já tivemos ocasião de ver no capítulo 2.2.2, um sinal apenas com a componente espectral positiva escreve-se



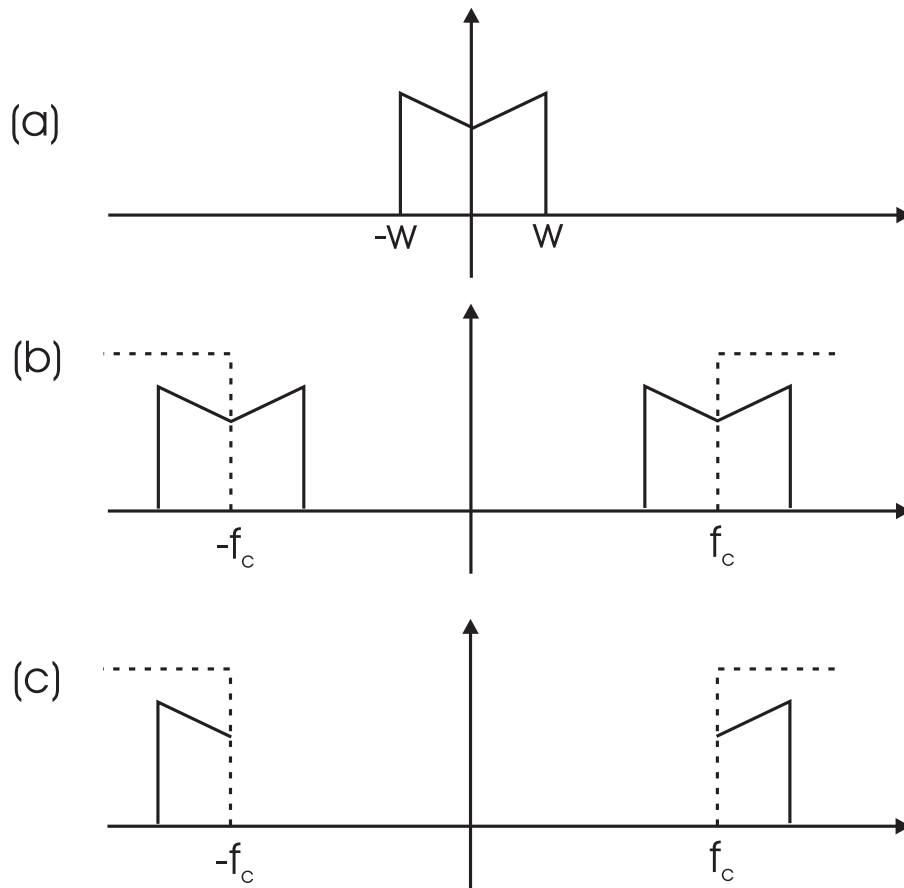


Figura 5.2: exemplificação da modulação AM-SSB.

$$m'(t) = \frac{1}{2}[m(t) + j\hat{m}(t)], \quad (5-3.1)$$

onde o  $1/2$  serve para manter uma energia constante e  $\hat{m}(t)$  é a transformada de Hilbert de  $m(t)$ . Neste caso o sinal modulado no domínio do tempo escreve-se

$$s'(t) = A_c m'(t) \cos(2\pi f_c t). \quad (5-3.2)$$

O espectro de  $s'(t)$  obtém-se sabendo que

$$\hat{M}(f) = \begin{cases} -jM(f) & f > 0 \\ 0 & f = 0 \\ jM(f) & f < 0, \end{cases} \quad (5-3.3)$$

e portanto

$$M'(f) = \frac{1}{2}M(f) + \frac{j}{2}\hat{M}(f) \quad (5-3.4)$$

e ainda

$$M'(f) = \begin{cases} M(f) & f > 0 \\ 1/2M(f) & f = 0 \\ 0 & f < 0. \end{cases} \quad (5-3.5)$$

Finalmente,

$$S'(f) = \begin{cases} \frac{A_c}{2}M(f + f_c) + \frac{A_c}{2}M(f - f_c), & f_c < |f| \\ \frac{A_c}{4}M(0), & f = f_c \\ 0, & \text{outro } f. \end{cases} \quad (5-3.6)$$

No caso agora exemplificado apenas foram retidas as frequências positivas e por isso trata-se do caso USSB. No caso LSSB teríamos

$$m'(t) = \frac{1}{2}[m(t) - j\hat{m}(t)], \quad (5-3.7)$$

e como resultado final para o espectro de  $s'(t)$ ,

$$S'(f) = \begin{cases} \frac{A_c}{2}M(f + f_c) + \frac{A_c}{2}M(f - f_c) & f_c \geq |f| \\ 0, & \text{outro } f. \end{cases} \quad (5-3.8)$$

A realização prática da modulação SSB é substancialmente mais complicada do que no caso da modulação AM, pois na maior parte das implementações serão necessários dois multiplicadores e pelo menos um filtro passa-banda, para além de outros somadores e osciladores locais. De uma forma muito básica um sinal SSB pode ser gerado pelo circuito conceptual da figura 5.3. Nesta figura podemos ver o sinal

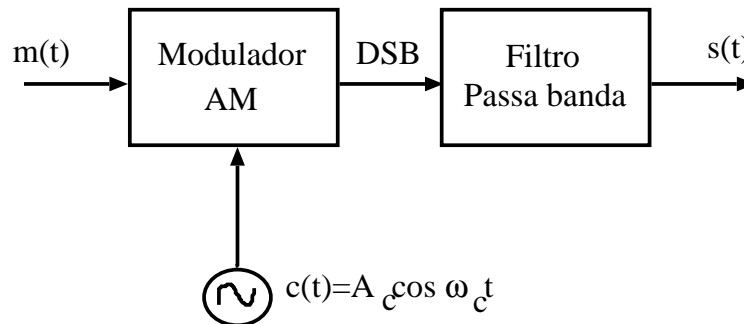


Figura 5.3: exemplo do circuito conceptual para modulação SSB.

modulador  $m(t)$ , o oscilador local e um circuito modulador DSB tradicional, agora seguido de um filtro passa banda para filtragem seja da banda lateral superior ou inferior do sinal DSB, conforme se trate de modulação USSB ou LSSB, respectivamente. Um circuito completo de modulação SSB encontra-se representado na figura 5.4. Esta implementação utiliza directamente a equação

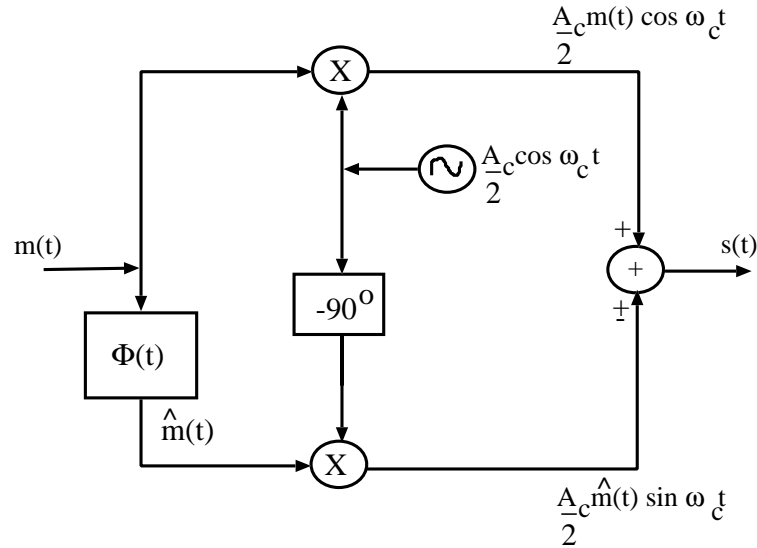


Figura 5.4: exemplo do circuito de translação de fase para modulação SSB.

$$s'(t) = \frac{1}{2} A_c [m(t) \cos \omega_c t \pm \hat{m}(t) \sin \omega_c t], \quad (5-3.9)$$

obtida pela substituição de (5-3.1) em (5-3.2) e onde o termo em  $\sin \omega_c t$  é obtido através de  $\cos(\omega_c t - 90^\circ)$ .

## 5.4 Modulação de amplitude vestigial (VSB)

A modulação vestigial<sup>4</sup> vem dar resposta a uma necessidade frequentemente encontrada em transmissão da informação, como por exemplo do sinal de televisão, fax e sinais de alta velocidade, que são sinais com um conteúdo espectral de baixa frequência muito significativo. Enquanto SSB é efectivo em termos de banda passante mas tem uma resposta em baixa frequência de fraca qualidade (termo  $1/2M(f)$  para  $f = 0$ ), DSB tem uma boa resposta em baixa frequência mas é ineficiente em termos de banda (duas vezes maior do que em SSB). Na modulação VSB o espectro em baixa frequência é privilegiado em relação às altas frequências, mantendo no entanto a eficiência da modulação SSB.

VSB é um derivado de DSB, na qual uma das bandas passa quase completamente e da outra apenas passa “um vestígio”, daí a noção de “vestigial”. Neste sentido VSB utiliza um filtro de banda lateral, do qual podem existir muitas versões mas cujo o aspecto típico se encontra representado na figura 5.5. A expressão do sinal modulado

<sup>4</sup>vestigial vem da palavra vestígio ou pequena quantidade de.

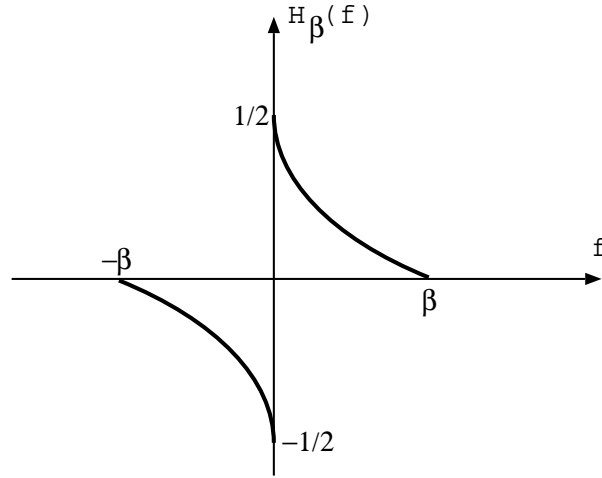


Figura 5.5: filtro vestigial.

obtem-se a partir de (5-3.2)

$$s'(t) = A_c m'(t) \cos \omega_c t, \quad (5-4.1)$$

mas agora com

$$m'(t) = \frac{1}{2} \{m(t) - j[\hat{m}(t) + m_\beta(t)]\}, \quad (5-4.2)$$

onde  $m(t)$  é o sinal mensagem modulador,  $\hat{m}(t)$  que já foi definido e  $m_\beta(t)$  é o sinal mensagem obtido à saída do filtro vestigial

$$m_\beta(t) = 2j \int_{-\beta}^{\beta} H_\beta(f) M(f) e^{j2\pi ft} df, \quad (5-4.3)$$

onde  $H_\beta(f)$  é o filtro vestigial tendo, a título de exemplo, a resposta em frequência da figura 5.5. Substituindo (5-4.3) em (5-4.2) obtemos

$$m'(t) = \frac{1}{2} [m(t) + 2 \int H_\beta(f) M(f) e^{j2\pi ft} df - j\hat{m}(t)], \quad (5-4.4)$$

o que se pode escrever no domínio da frequência

$$\begin{aligned} M'(f) &= \begin{cases} \frac{M(f)}{2} + H_\beta(f)M(f) - \frac{M(f)}{2} & f > 0 \\ \frac{M(f)}{2} + H_\beta(f)M(f) & f = 0 \\ \frac{M(f)}{2} + H_\beta(f)M(f) + \frac{M(f)}{2} & f < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} H_\beta(f)M(f) & f > 0 \\ \frac{M(0)}{2} + H_\beta(0)M(0) & f = 0 \\ M(f) + H_\beta(f)M(f) & f < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (5-4.5)$$

e dado que o filtro vestigial tem o valor  $1/2$  para  $f = 0$  temos que

$$M'(f) = \begin{cases} H_\beta(f)M(f) & f > 0 \\ M(0) & f = 0 \\ M(f) + H_\beta(f)M(f) & f < 0 \end{cases} \quad (5-4.6)$$

o que permite escrever o espectro do sinal modulado

$$S'(f) = \begin{cases} \frac{A_c}{2} \{ [1 + H_\beta(f + f_c)]M(f + f_c) + [1 + H_\beta(f - f_c)]M(f - f_c) \} & |f| < f_c \\ \frac{A_c}{2} [M(f_c) + M(-f_c)] & |f| = f_c \\ \frac{A_c}{2} [H_\beta(f + f_c)M(f + f_c) + H_\beta(f - f_c)M(f - f_c)] & |f| > f_c \end{cases} \quad (5-4.7)$$

onde podemos apreciar que o espectro do sinal modulador para  $f = \pm f_c$  é mantido e que para  $f > f_c$  e  $f < -f_c$  é não nulo e apresenta uma resposta “vestigial”  $H_\beta(f)M(f)$  de largura de banda  $\beta$ . Podemos ainda constatar que se  $\beta \ll W$  então VSB aproxima-se de SSB, enquanto que se  $\beta \gg W$ , VSB tende para DSB.

A potência transmitida  $P_s$  não é fácil de calcular mas encontra-se limitada por

$$\frac{1}{4}A_c^2P_m \leq P_s \leq \frac{1}{2}A_c^2P_m, \quad (5-4.8)$$

dependendo da largura de banda vestigial  $\beta$ .

## 5.5 Modulação de amplitude em quadratura (QAM)

A última técnica de modulação em amplitude é denominada *modulação de amplitude em quadratura* (QAM - quadrature amplitude modulation). Neste caso dois sinais temporais e reais  $a(t)$  e  $b(t)$  formam o sinal modulador  $m(t) = \frac{1}{2}[a(t) + jb(t)]$ . Assim o sinal modulado escreve-se

$$s(t) = A_c m(t) \cos(2\pi f_c t). \quad (5-5.1)$$

O sinal passa banda resultante não é nem analítico nem tem simetria complexo conjugada em torno a  $f = f_c$ . O sinal tem, em geral, bandas laterais superior e inferior sem simetria em torno à frequência da portadora. Escreve-se neste caso a partir de (5-5.1)

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{A_c}{2} \text{Re}\{ [a(t) + jb(t)] e^{j\omega_c t} \} \\ &= \frac{A_c}{2} a(t) \cos(\omega_c t) - \frac{A_c}{2} b(t) \sin(\omega_c t), \end{aligned} \quad (5-5.2)$$

de onde provém a denominação de modulação de amplitude em quadratura (QAM) visto tratarem-se de dois sinais modulados independentemente, à mesma frequência, mas com uma defasagem relativa de  $\pi/2$ . Em termos de banda passante, e para a mesma banda de base, a modulação QAM requer a mesma banda que AM-DSB e o dobro da de AM-SSB, porém permite enviar dois sinais reais portadores de informação. A sua eficácia é portanto equivalente à de AM-SSB porém sem a sua dificuldade de implementação prática. QAM tornou-se por isso uma das técnicas de modulação mais utilizadas em sistemas de comunicação analógica (e não só).

## 5.6 Modulação de ângulo

Modulação de ângulo é um termo genérico para designar um tipo de modulação na qual o ângulo da portadora sinusoidal varia em função do sinal modulador, *i.e.*,

$$s(t) = A_c \cos[\phi(t)], \quad (5-6.1)$$

onde a fase  $\phi(t) = f[m(t)]$ , sendo  $m(t)$  o sinal modulador. Dois casos são possíveis na modulação de ângulo, que são: a modulação de fase (phase modulation, PM) e a modulação de frequência (frequency modulation, FM). Em termos práticos a modulação de ângulo tem como vantagem a de a portadora manter uma amplitude constante, o que a torna mais eficiente em termos de potência transmitida no emissor, e também de ser mais imune ao ruído. É o caso bem conhecido da qualidade superior do rádio FM em relação a AM.

No caso da modulação de fase,  $\phi(t)$  escreve-se

$$\phi(t) = 2\pi f_c t + \beta_a m(t), \quad (5-6.2)$$

onde  $\beta_a$  é a constante de modulação de fase, que se encontra ligada ao índice de modulação  $k_a$  por

$$k_a = \beta_a \max |m(t)|. \quad (5-6.3)$$

No caso da modulação de frequência, que abordaremos mais em profundidade devido à sua importância prática,  $\phi(t)$  escreve-se

$$\phi(t) = 2\pi f_c t + 2\pi\beta_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau, \quad (5-6.4)$$

onde  $\beta_f$  é a constante de modulação e  $m(t)$  é sempre o sinal modulador. Podemos assim definir a frequência instantânea

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi}{dt} = f_c + \beta_f m(t), \quad (5-6.5)$$

e em geral define-se o índice de modulação como sendo

$$k_f = \frac{\beta_f \max |m(t)|}{W}, \quad (5-6.6)$$

onde  $W$  é a largura de banda de  $m(t)$ . Neste caso, se a mensagem  $m(t)$  for tal que  $|m(t)| < 1$ , então podemos dizer que a constante  $\beta_f$  corresponde à excursão máxima em frequência em torno à portadora  $f_c$ . Isto levaria a pensar que a largura de banda ocupada pelo sinal modulado em FM seria na ordem de  $2\beta_f$  o que, se fosse verdade, seria extraordinário, pois quereria dizer que a largura de banda do sinal modulado seria independente da largura de banda do sinal modulador !... O que obviamente é impossível. Vejamos o caso particular de um sinal modulador sinusoidal  $m(t) = \cos(\omega_m t)$ ,

$$s(t) = A_c \cos[\omega_c t + 2\pi\beta_f \int_0^t \cos(\omega\tau) d\tau], \quad (5-6.7)$$

e portanto

$$\begin{aligned} s(t) &= A_c \cos[\omega_c t + \frac{2\pi\beta_f}{\omega_m} \sin(\omega_m t)] \\ &= A_c \cos[\omega_c t + \alpha \sin(\omega_m t)], \end{aligned} \quad (5-6.8)$$

onde  $\alpha = \beta_f/f_m$  é o rácio entre o desvio máximo em frequência  $\beta_f$  e a frequência do sinal modulador. O sinal modulado pode ainda exprimir-se como

$$u(t) = \frac{A_c}{2} e^{j\omega_c t} e^{j\alpha \sin(\omega_m t)} + \frac{A_c}{2} e^{-j\omega_c t} e^{-j\alpha \sin(\omega_m t)}. \quad (5-6.9)$$

Considerando, por exemplo, apenas o termo de frequência positiva podemos dizer que, tratando-se de uma função periódica de pulsação  $\omega_m$ , este se pode escrever sob forma de uma expansão em série de Fourier do tipo

$$e^{j\alpha \sin(\omega_m t)} = \sum_n C_n e^{jn\omega_m t}, \quad (5-6.10)$$

onde os coeficientes  $C_n$  dependem do coeficiente  $\alpha$ . Esta relação entre  $C_n$  e  $\alpha$  não é simples, mas pode-se demonstrar que se escreve como

$$C_n = J_n(\alpha), \quad (5-6.11)$$

onde  $J_n(\alpha)$  é a função de Bessel de  $\alpha$  de ordem  $n$  (ver [4]). Na prática podemos dizer que o espectro do sinal modulado se encontra centrado em  $+f_c$  e  $-f_c$ . Em torno a cada um destes valores o espectro do sinal  $m(t)$  estende-se em linhas a frequências múltiplas e sub-múltiplas de  $f_m$  com amplitudes que dependem de (5-6.11). Em princípio a decomposição em série de Fourier (5-6.10) tem um número infinito de termos. Porém na prática  $|C_n|$  decresce rapidamente para  $|n| > \alpha$  e considerar

apenas uma banda  $\pm(1 + \alpha)f_m$  é suficiente em termos práticos. Assim a banda total do sinal modulado escreve-se

$$W = 2f_m(1 + \alpha) = 2f_m + 2\beta_f, \quad (5-6.12)$$

e por isso é igual a duas vezes a excursão máxima em frequência mais duas vezes a banda do sinal modulador. Apesar de não se tratar de uma demonstração rigorosa podemos deduzir que a banda útil de um sinal modulado em FM é aproximadamente

$$W = 2B + 2\alpha, \quad (5-6.13)$$

onde  $B$  é a banda do sinal modulador.

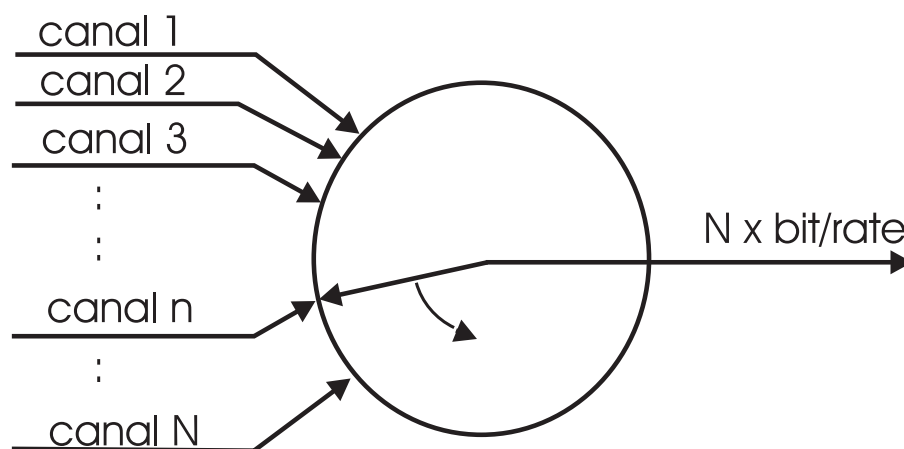


Figura 5.6: croquis de um sistema de multiplexagem temporal.

## 5.7 Multiplexagem no tempo e na frequência

A multiplexagem é uma técnica que permite enviar várias mensagens distintas através do mesmo canal de transmissão simultaneamente. A multiplexagem pode fazer-se seja no tempo seja na frequência. No tempo torna-se óbvio que o envio de  $N$  mensagens pelo mesmo canal requer um canal de transmissão cujo bit/rate é pelo menos  $N \times$  o bit rate de cada um dos canais. Na realidade o bit rate total será sempre superior a esse número pois torna-se necessária a inclusão de bits de controlo, de correcção de erros, de identificação dos canais, etc... Um dispositivo mecânico básico que exemplifica a multiplexagem temporal encontra-se representado na figura 5.2. Na prática a multiplexagem temporal é efectuada electronicamente por dispositivos de comutação. Mais importante, e mais utilizada, do que a multiplexagem temporal é a multiplexagem em frequência (*frequency division multiplexing*, FDM). A figura 5.7 exemplifica um tal sistema. Cada uma das mensagens é modulada em amplitude a



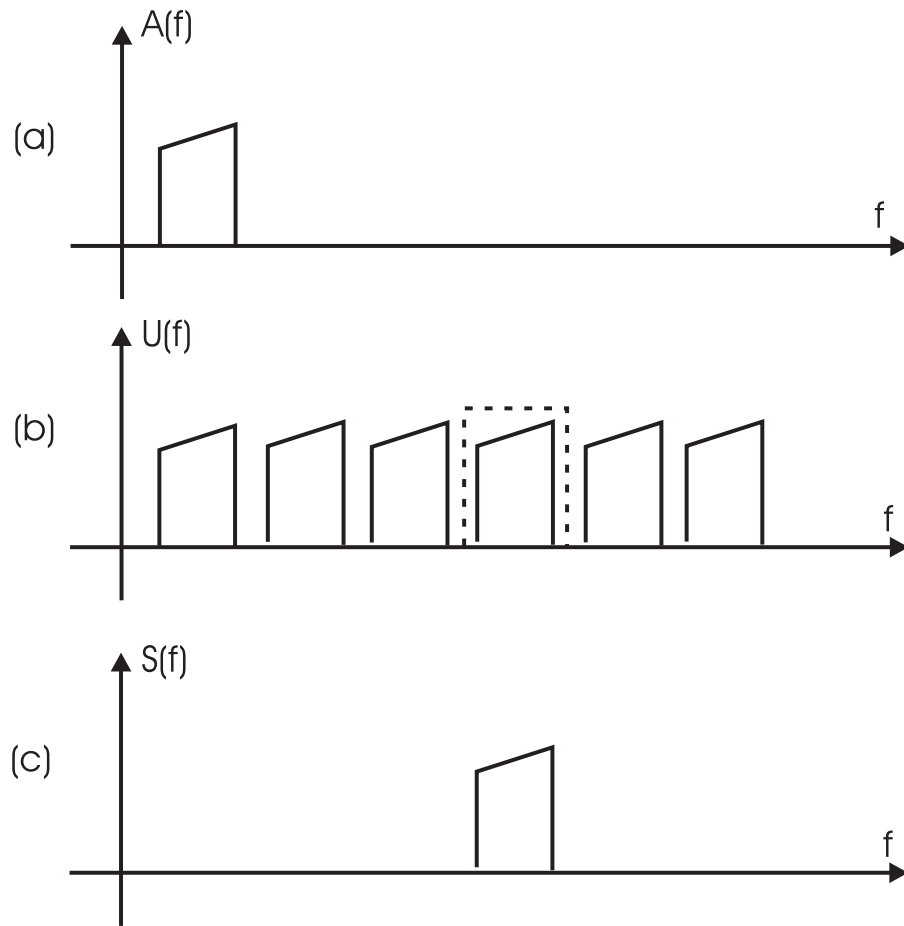


Figura 5.7: multiplexagem frequencial (FDM).

uma frequência portadora diferente. Em seguida os sinais de cada um dos canais são somados e enviados no canal de transmissão. Torna-se óbvio que, para cada uma das mensagens possa ser recuperada intacta no receptor (desmultiplexagem), será necessário que não exista sobreposição entre espectros contíguos, i.e., que a separação entre as frequências das portadoras de cada uma das mensagens seja superior ou igual à largura de banda das mesmas mensagens. Foram definidas normas para a transmissão de canais telefônicos que agrupam linhas em bandas de frequências conforme os números de canais desejados (tabela 5.2).

Frequentemente utiliza-se uma técnica de modulação eficiente, tipo AM-SSB, em cada um dos canais introduzidos no FDM e depois o sinal composto obtido é de novo modulado, utilizando por exemplo uma modulação FM, antes de transmissão intercontinental através de um canal de fibra óptica ou satélite.

### Resumo do capítulo 5:

Canal		1 canal (4kHz)
Grupo		12 canais (48 kHz)
Supergrupo	5 grupos	60 canais (240kHz)
Mastergrupo	5 supergrupos	300 canais (1.2 MHz)
Supermastergrupo	3 mastergrupos	900 canais (3.6 MHz)

Tabela 5.2: hierarquia de FDM publicada pela CCITT.

O último estágio do emissor que permite adaptar uma mensagem de tipo analógico ao canal de comunicação é abordado neste capítulo através dos seguintes aspectos:

- modulação de amplitude dupla banda e banda única, sendo que em ambos os casos são tratados vários sub-casos; os casos com portadora e sem portadora na banda dupla, os casos de banda superior, banda inferior e vestigial na banda lateral única. Para cada um dos casos é dada a expressão do sinal modulado no tempo e na frequência assim como a sua eficiência em termos de potência.
- depois em tratado com algum detalhe, devido à sua importância na prática, o caso da modulação de amplitude em quadratura (QAM) que faz aparecer desde logo a noção de separação da informação em amplitude e em fase (ou ângulo);
- aborda-se ainda o caso importante da modulação de ângulo seja para o caso da fase seja para o caso da modulação em frequência - esta última tratada com alguma atenção;
- finalmente aborda-se a multiplexagem no tempo e na frequência tomando como exemplo o caso do canal telefónico.

## 6 Receptores analógicos

Os métodos de modulação estudados no capítulo anterior distinguem-se através do tipo de modulação, frequência da portadora, meio de transmissão, potência utilizada, etc, mas tem em comum o facto de que em todos eles a amplitude ou a fase de uma onda sinusoidal varia com o tempo de modo a transmitir a mensagem útil.

Neste capítulo vamos abordar os circuitos de recepção que em grande medida são comuns aos vários métodos de modulação descritos anteriormente pois, em todos eles, de uma forma ou de outra vai ser necessária uma translação em frequência (agora no sentido contrário) e portanto vão ser utilizados também osciladores, misturadores e filtros passa-banda.

### 6.1 Desmodulação

A desmodulação de sinais modulados em AM faz-se através da extração do envelope do sinal passabanda, podendo ser efectuada de forma não coerente, i.e., sem conhecer de forma exacta a frequência do sinal modulador. Já o mesmo não acontece para a desmodulação de fase que necessita ser feita em modo coerente com o emissor, já que a informação é transmitida exactamente na fase do sinal recebido. Existe um grande número de técnicas para efectuar a desmodulação seja de amplitude seja da fase. Na prática esta tarefa encontra-se grandemente simplificada se as componentes em fase e quadratura forem previamente extraídas utilizando o envelope complexo.

#### 6.1.1 Extração do envelope complexo

A importância do envelope complexo é que a partir dele podem ser obtidas todas as características do sinal passa-banda ou dos seus equivalentes passa-baixo. A extração do envelope complexo passa pelo cálculo das componentes em fase e em quadratura. A figura 6.1 ilustra esta operação. O sinal passa-banda  $x(t)$  é simultaneamente multiplicado por  $2 \cos \omega_c t$  e por  $-2 \sin \omega_c t$ . O resultado é uma frequência de batimento duas vezes a portadora  $\omega_c$  que pode ser filtrada por um filtro passa-baixo. Com efeito o resultado do produto, por exemplo, para o  $\cos \omega_c t$ , é

$$\begin{aligned} 2x(t) \cos \omega_c t &= 2 \cos \omega_c t [x_c(t) \cos \omega_c t - x_s(t) \sin \omega_c t] \\ &= 2[x_c(t) \cos^2 \omega_c t - x_s(t) \sin \omega_c t \cos \omega_c t] \\ &= x_c(t) + x_c(t) \cos 2\omega_c t - x_s(t) \sin 2\omega_c t, \end{aligned} \quad (6-1.1)$$

que é filtrado no banda útil de  $x(t)$ . Por exemplo se a banda de  $x(t)$  em torno a  $f_c$  for  $[f_c - W/2, f_c + W/2]$  então o filtro passa-baixo deverá, para retirar correctamente

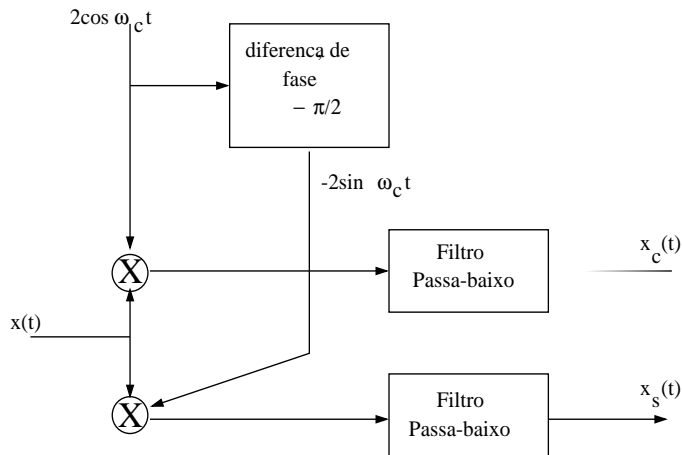


Figura 6.1: extração das componentes em fase e quadratura de um sinal passa-banda.

a componente em fase  $x_c(t)$ , ter uma frequência de corte  $f_a$  tal que  $W/2 < f_a < 2f_c - W/2$ . O mesmo raciocínio será aplicado para a componente em quadratura  $x_s(t)$ . O posicionamento das componentes espectrais do sinal e do batimento composto encontram-se exemplificadas na figura 6.2.

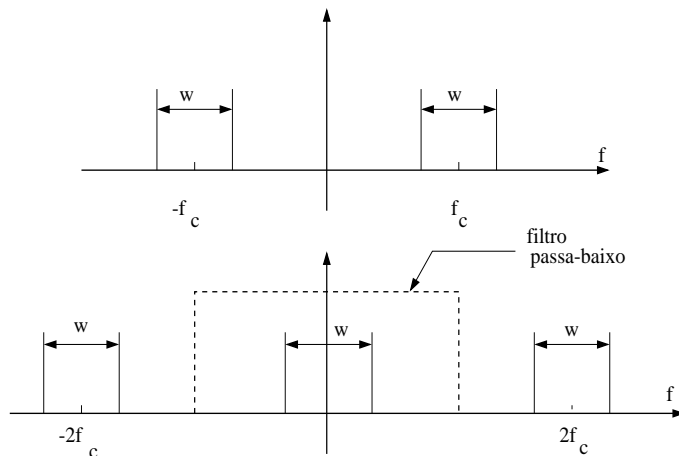


Figura 6.2: Espectros dos sinais durante a extração das componentes em fase e quadratura de um sinal passa-banda: sinal original e batimento.

A partir das duas componentes em fase e quadratura podemos calcular o envelope complexo

$$\tilde{x}(t) = x_c(t) + jx_s(t). \quad (6-1.2)$$

### 6.1.2 Extracção do envelope e da fase

Um detector de envelope tem a vantagem prática de não necessitar o conhecimento da fase da portadora o que simplifica enormemente o circuito necessário, que pode simplesmente ser constituído por um diodo em série com uma resistência em paralelo com um condensador. O envelope da portadora não é mais do que a amplitude da componente passa-baixo do sinal modulado, i.e., a amplitude do sinal modulador.

Qualquer sinal passa-banda se pode escrever a partir de  $x_c(t)$  e  $x_s(t)$ , e calcular

$$\begin{aligned} a(t) &= [x_c^2(t) + x_s^2(t)]^{1/2}, \\ \phi(t) &= \tan^{-1} \frac{x_s(t)}{x_c(t)}, \end{aligned}$$

onde  $\phi(t)$  é a modulação de fase e a sua derivada

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt}, \quad (6-1.3)$$

é a modulação em frequência.

Um desmodulador FM pode ser simplesmente um dispositivo que traduz a variação de frequência em variação de amplitude seguido de um detector de envelope, como explicado acima.

## 6.2 Receptores de onda sinusoidal

Os blocos típicos num receptor analógico são: o amplificador, o sintonizador e o desmodulador. O esquema de um receptor analógico encontra-se representado na figura 6.3. O sinal modulado  $s(t)$  captado na antena é primeiramente amplificado graças a um amplificador RF sintonizado na frequência da portadora  $f_c$ . Este amplificador passa não só a portadora mas também uma determinada banda em torno a esta. No misturador MX o sinal RF amplificado é misturado com uma frequência intermédia  $f_{IF} < f_c$  e em seguida todas as outras componentes são filtradas através do filtro e amplificador IF centrado em  $f_{IF}$  e com uma banda  $B_{IF}$ . Os últimos dois andares são o desmodulador que retira a mensagem útil e o amplificador em banda de base que permite obter o sinal mensagem final  $m(t)$ . Um dos blocos essenciais no sistema receptor é o oscilador local à frequência  $f_c \pm f_{IF}$  que permite passar da frequência da portadora para a frequência intermédia  $f_{IF}$ . A título de exemplo, para AM, a portadora encontra-se entre 540 e 1600 kHz, enquanto a frequência intermédia é de 455 kHz. O espaçamento entre portadoras é normalmente de 10 kHz e a banda intermédia é assim compreendida entre 6 e 10 kHz. Finalmente a banda audio útil é inferior a esta banda intermédia mínima, na ordem dos 5 kHz, máximo.

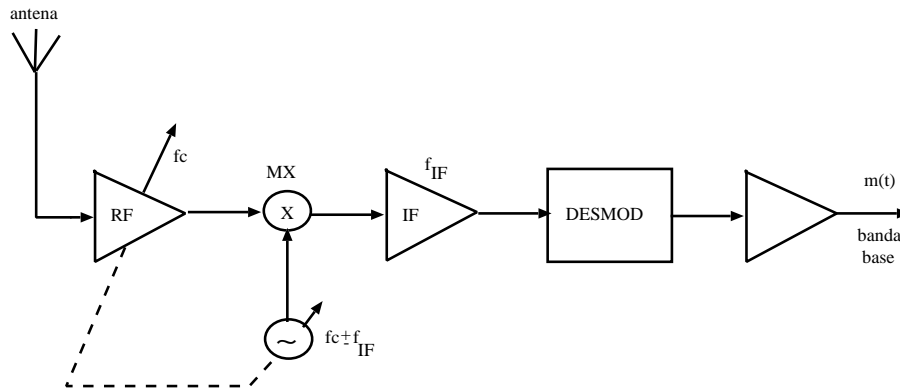


Figura 6.3: esquema de blocos do sistema receptor analógico típico.

Um dos problemas principais é o de dispôr de um oscilador local suficientemente estável para permitir a mistura e a passagem para a frequência intermédia. A frequência deste oscilador local é normalmente variável para permitir a sintonização das várias estações de emissão. Existem várias variantes do sistema de recepção proposto na figura 6.3, nomeadamente sistemas com duas frequências intermédias, cujo objectivo é de obter uma maior rejeição das outras bandas de frequências assim como sistemas de recepção para esquemas de modulação em banda lateral única com separação das componentes em fase e em quadratura semelhantes ao representado na figura 6.1. Outros sistemas mais complexos permitem a extração de portadoras em quadratura do tipo QAM.

Algumas das características mais importantes dos receptores são a sensibilidade, a dinâmica e a selectividade. A sensibilidade representa o valor de tensão mínima que colocada à entrada resulta num sinal à saída. Um valor típico será  $1 \mu\text{V}$ . A dinâmica não é mais do que a gama de variação possível à entrada que permite obter um sinal não distorcido à saída. Uma dinâmica de 100 dB é um valor normal, para um sistema de gama média. A selectividade por sua vez é a capacidade de separar duas frequências próximas com um grau de rejeição aceitável de, digamos, 50 dB.

### 6.3 Sincronização

Como já foi referido acima, um dos problemas frequentemente encontrados na prática traduz-se pela impossibilidade de obter um oscilador suficientemente estável à frequência da portadora ou uma frequência intermédia ligada a essa. O problema é na realidade mais complexo porque não só a frequência do oscilador local deve acompanhar a da portadora mas também a fase deve ser mesma. Ou seja, trata-se de ter um oscilador que acompanhe exactamente a portadora do sinal gerada no emissor, por vezes, a muitos kilometros de distância. Este é um problema prático que, durante

muitos anos, foi resolvido graças aos sistemas de modulação com portadora que, como já tivemos oportunidade de dizer, é pouco eficiente em termos energéticos.

A solução passa por um sistema de seguimento de fase muito engenhoso que se chama “Phase-Lock Loop”, ou PLL. O princípio de funcionamento do PLL pode ser explicado tendo como base a figura 6.4. Nesta figura o sinal de entrada é multiplicado com o da saída do oscilador controlado por tensão (Voltage Controlled Oscillator - VCO). Este dispositivo gera uma onda sinusoidal à sua saída cuja frequência é proporcional à amplitude do sinal de entrada. Esse sinal de entrada é por sua vez o sinal de saída do filtro passa baixo do sinal resultante do “batimento” entre o sinal de entrada e a saída do VCO, fechando assim a malha. O objectivo é que o sinal de saída do VCO deverá seguir de forma exacta a fase do sinal de entrada. Na prática

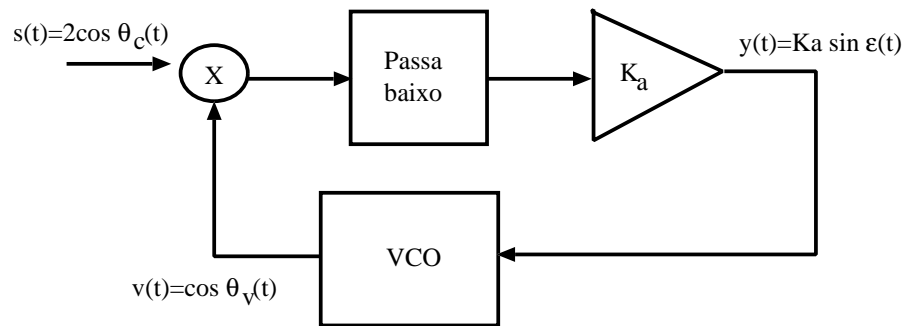


Figura 6.4: esquema de blocos do Phase-lock loop (PLL).

o sinal  $y(t)$  escreve-se

$$y(t) = K_a \sin \epsilon(t), \quad (6-3.1)$$

onde  $\epsilon(t)$  é o termo de diferença de frequência resultante da filtragem passa-baixo do produto entre o sinal de entrada  $x(t)$  e o sinal de comparação  $v(t)$ . O sinal á entrada do filtro passa-baixo escreve-se

$$\begin{aligned} s(t)v(t) &= 2 \cos \theta_c(t) \cos \theta_v(t) \\ &= \cos[\theta_c(t) + \theta_v(t)] + \cos[\theta_c(t) - \theta_v(t)], \end{aligned} \quad (6-3.2)$$

e portanto temos que  $\epsilon(t) = \theta_c(t) - \theta_v(t) + 90^\circ$ , onde o atraso de 90 graus serve para assegurar que  $y(t)$  venha a ser igual ao sin e não o cos de  $\epsilon(t)$  de forma a que  $\epsilon(t) = 0 \rightarrow y(t) = 0$ . O sinal  $y(t)$  serve então como entrada do oscilador controlado por tensão (VCO) de tal forma que a sua frequência (ou fase)  $\theta_v(t)$  seja o mais próxima possível daquela do sinal de entrada  $\theta_c(t)$ . Quando o PLL se encontra em posição de convergência (locked) a fase do oscilador segue de forma exacta a fase do sinal de entrada, o que nos permite dispôr localmente de um sinal perfeitamente síncrono com a portadora do sinal RF recebido e poder assim efectuar uma extração perfeita e coerente do sinal útil por desmodulação e filtragem. O PLL é regido através de uma equação diferencial na fase do sinal e cuja solução e correcta inicialização garantem

a convergência do sistema. As equações de funcionamento encontram-se em [11] e deverão ser abordadas nas disciplinas de Electrónica.

Na prática o PLL é a pedra de base para várias aplicações como sejam os sintetizadores de frequência, os detectores síncronos e os receptores FM (ver páginas 281 a 284 de [11]).

## 6.4 Detecção FM com PLL

Tornou-se óbvio a partir da leitura dos sub-capítulos anteriores que o PLL é a pedra de toque na sincronização de osciladores locais para qualquer receptor de onda sinusoidal, quer ele seja AM ou PM. Para além disso, e dado que o PLL tem como função essencial a de seguir a fase do sinal de entrada, ele pode, por si só, constituir um desmodulador de fase (ou de frequência). Considerando de novo a figura 6.4 e assumindo que o PLL se encontra em posição de seguimento linear com  $f_v = f_c$ , i.e., com  $\Delta f = 0$  e com um erro de fase  $\epsilon(t)$  pequeno, tal que,  $\theta_c(t) \approx \theta_v(t)$ . Nesse caso podemos agora considerar não as variações dos sinais ao longo do tempo mas sim das respectivas fases e escrever que a fase à saída do VCO se escreve

$$\phi_v(t) = 2\pi K_v \int_{-\infty}^t y(\tau) d\tau, \quad (6-4.3)$$

que pode ser comparada com a fase do sinal de entrada  $\phi_c(t)$ . O circuito de blocos encontra-se representado na figura 6.5 onde o filtro passa-baixo se encontra representado pela sua resposta impulsiva  $h(t)$ . As equações do sistema são,

$$y(t) = K_a h(t) * [\phi_c(t) - \phi_v(t)] \quad (6-4.4)$$

$$\phi_v(t) = 2\pi K_v \int_{-\infty}^t y(\tau) d\tau, \quad (6-4.5)$$

de onde passando para o domínio da frequência de forma a reduzir o integral a uma simples divisão por  $jf$  e o produto de convolução a um produto simples,

$$Y(f) = K_a H(f) [\Phi_c(f) - \Phi_v(f)] \quad (6-4.6)$$

$$\Phi_v(f) = \frac{K_v}{jf} Y(f), \quad (6-4.7)$$

e substituindo (6-4.7) em (6-4.6),

$$\begin{aligned} Y(f) &= K_a H(f) \left[ \Phi_c(f) - \frac{K_v}{jf} Y(f) \right] \\ &= \frac{K_a H(f)}{1 + K_v K_a H(f) / jf} \Phi_c(f) \\ &= \frac{jf K_a H(f)}{jf + K_v K_a H(f)} \Phi_c(f). \end{aligned} \quad (6-4.8)$$



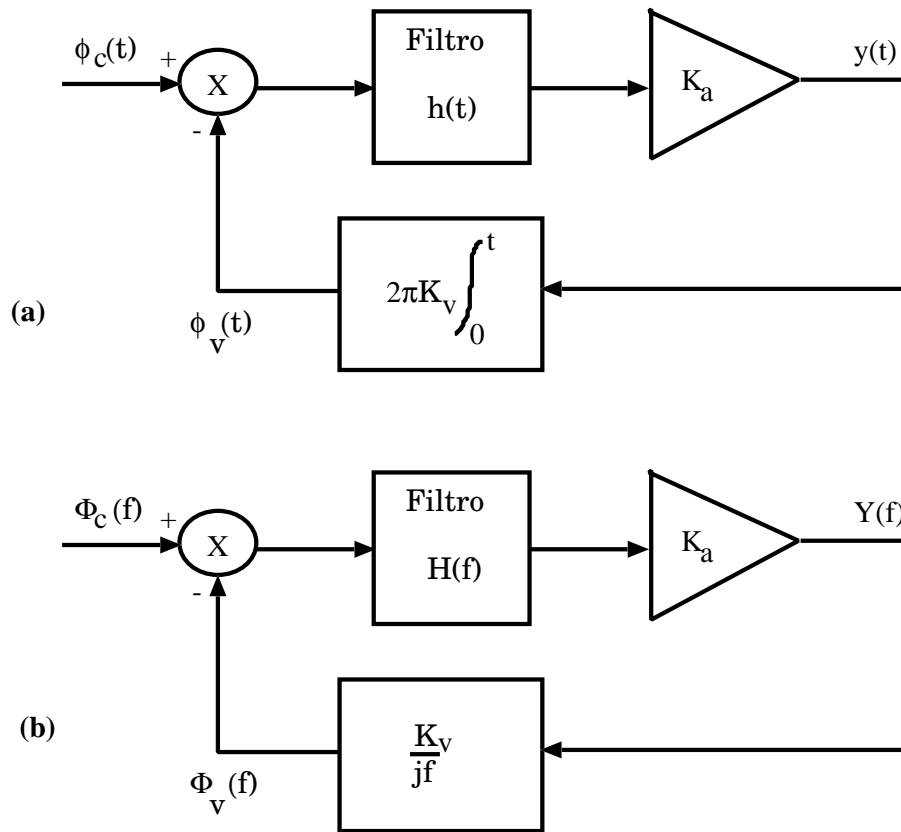


Figura 6.5: esquema de blocos do Phase-lock loop (PLL) utilizado como detector FM no tempo (a) e na frequência (b).

Se o sinal de entrada  $s(t)$  for um sinal modulado em frequência tal que

$$\frac{d\phi_c(t)}{dt} = 2\pi\beta_f m(t), \quad (6-4.9)$$

temos que a sua fase no domínio da frequência se escreve

$$\begin{aligned} \Phi_c(f) &= \frac{2\pi\beta_f M(f)}{j2\pi f} \\ &= \frac{\beta_f}{jf} M(f), \end{aligned} \quad (6-4.10)$$

de onde a substituição de (6-4.10) em (6-4.8) permite obter finalmente

$$Y(f) = \frac{\beta_f}{K_v} H_L(f) X(f), \quad (6-4.11)$$

onde  $H_L(f)$  é a função de transferência em malha fechada

$$H_L(f) = \frac{H(f)}{H(f) + jf/K_a K_v}. \quad (6-4.12)$$

Se o filtro passa baixo  $H(f)$  tiver um ganho ideal unitário para na banda útil de  $m(t)$ ,  $|f| < W$  então teremos que nessa mesma banda o ganho em malha fechada

$$H_L(f) = \frac{1}{1 + jf/K_a K_v}, \quad (6-4.13)$$

é um filtro passa-baixo com uma resposta de -3 dB para uma frequência de corte  $K = K_a K_v$ , portanto se  $K \geq W$  teremos que  $H_L(f)$  se comporta com um ganho aproximadamente unitário na banda útil do sinal  $m(t)$  e

$$y(t) \approx \frac{\beta_f}{K_v} m(t), \quad (6-4.14)$$

ou seja o sinal  $y(t)$  é proporcional ao sinal modulador  $m(t)$ , o que significa que o PLL pode ser utilizado como um detector FM desde que a banda do filtro passa baixo seja superior a  $W$  e que também o ganho  $K_a K_v \geq W$ .

### Resumo do capítulo 1:

São abordados os vários tipos de receptores analógicos para modulação de amplitude e fase baseados na extração de envelope complexo através um circuito clássico de batimento com um oscilador local à mesma frequência da portadora. A estrutura clássica do andar receptor é detalhada e realçada a sua dificuldade relativamente à detecção coerente.

Outra secção deste capítulo é dedicada ao problema da sincronização e detalhado o funcionamento do Phase Locked Loop (PLL) como seguidor de fase e depois como detector em modulação de frequência

## 7 Modulação de impulsos

### 7.1 Introdução

Hoje em dia a maior parte da informação encontra-se sob forma discreta, apesar de parte dessa informação ser na origem analógica ela é discretizada e quantificada na fonte. Como exemplos podemos citar a voz no caso do telefone, a música, a imagem, etc...O mais curioso é que quer a informação já discreta na origem quer a analógica discretizada devem ser adaptadas ao canal de transmissão que, ele, é essencialmente analógico por natureza. Este processo de adaptação ao canal de transmissão é chamado *modulação*. Já vimos exemplos de modulação analógica no capítulo 5.

Começaremos por descrever a técnica de base, de longe a mais utilizada hoje em dia, que é a modulação de impulsos (*pulse modulation -PM*). Nesta técnica uma série de impulsos emitidos a uma determinada cadência modulam uma sequência de símbolos que constituem "uma imagem" da mensagem a transmitir. De uma forma geral trata-se de associar os  $k$  dígitos binários à saída do codificador a  $M = 2^k$  sinais (ou níveis) possíveis. Esta é chamada a fase de sinalização, na qual cada um dos  $M$  níveis se encontra associado a um sinal  $s_m(t)$  de um conjunto de  $\{s_m(t); m = 1, \dots, M\}$  sinais possíveis. Apesar de, teoricamente, cada um dos sinais  $s_m(t)$  poder ter qualquer forma, na prática, e por questões de facilidade de implementação, a família de sinais é escolhida como uma variante de uma forma de base, que é normalmente chamada "forma de pulso" ou *pulse shape*. A escolha da "forma de pulso" depende essencialmente de dois factores:

1. do espectro desejado para o sinal a emitir no meio físico, porque é ele que vai ser determinante na ocupação do espectro de frequências disponíveis para uma dada transmissão;
2. da capacidade de ser distinguido no receptor minimizando assim a probabilidade de erro no decisor.

A técnica de PM será primeiramente descrita em banda base, *i.e.*, numa banda de frequências que inclui a componente contínua (zero Hz). Em seguida falaremos do caso em banda passante onde o sinal PM ele próprio modulará uma portadora sinusoidal (caso análogo ao caso da modulação analógica).

### 7.2 Generalidades

Retomemos o esquema de blocos de um sistema de comunicações da figura 1.1, mas com um maior detalhe interno de cada um dos três grandes blocos - figura 7.1. Nos

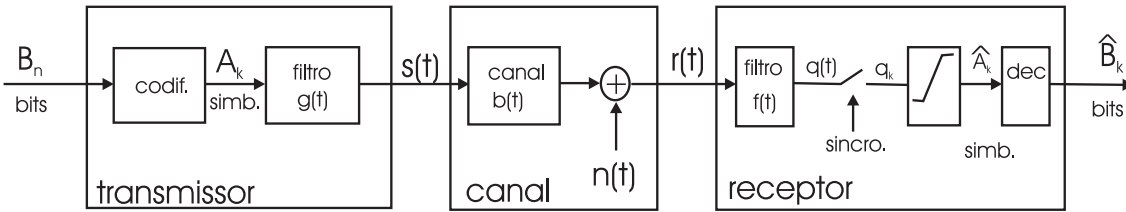


Figura 7.1: sistema de transmissão em banda base.

dois sub-blocos do **transmissor** - o codificador e o filtro de transmissão - encontra-se agora a sequência de bits de entrada  $B_n$  que é aplicada ao codificador e onde é, por sua vez, transformada numa sequência de símbolos  $A_k$  de saída. A sequência de bits pode assumir os valores ‘0’ ou ‘1’ enquanto a sequência de símbolos pode tomar qualquer valor de um *alfabeto* escolhido. Uma das características principais do codificador é de que a relação entre  $B_n$  e  $A_k$  pode não ser de um para um. Isto significa que dois bits diferentes podem ser representados pelo mesmo símbolo e inversamente podem existir símbolos que não correspondem a nenhum dos bits de entrada. É por essa razão que a taxa de transmissão da sequência de bits é simbolizada pelo índice  $n$  e chamada taxa de bit (ou *bit rate*)  $R_b = 1/T_b$  ( $T_b$  é o intervalo de amostragem da sequência de bits) e a taxa de transmissão dos símbolos é simbolizada pelo índice  $k$  e é chamada taxa de símbolo (ou *symbol rate*)  $R_s = 1/T_s$  (onde  $T_s$  é o intervalo de amostragem da sequência de símbolos). Na prática os dois casos  $1/T_b > 1/T_s$  ou  $1/T_b < 1/T_s$  são possíveis. Normalmente se a taxa de bit for superior à taxa de símbolo dizemos que há compressão, no caso contrário dizemos que existe redundância. Neste capítulo assumiremos que não existe nem redundância nem compressão, que  $R_b = R_s$  e que os símbolos saídos do codificador são independentes e idênticamente distribuídos formando um processo aleatório branco.

O segundo sub-bloco do transmissor é o filtro de transmissão ou modulador que tem por papel o de receber à entrada uma sequência de símbolos discretos e gerar à saída um sinal analógico - sinal modulado. A primeira etapa da modulação consiste em atribuir um nível  $\{A_m; m = 1, \dots, M\}$  a cada símbolo do alfabeto de dimensão  $M$ . Em seguida, cada um dos símbolos possíveis é colocado à entrada do filtro de saída do modulador e encontra-se à saída convoluido pela resposta impulsiva deste, seja  $g(t)$ ,

$$s(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m g(t - mT_s), \quad (7-2.1)$$

onde  $T_s$  é o período de símbolo e  $g(t)$  é a “forma de pulso”. Finalmente, a última etapa consiste em deslocar o sinal resultante na frequência portadora do canal de transmissão, seja  $f_c$  Hz (não representado na figura 7.1). Todo este processo pode ser visto como o de atribuir um sinal  $s_m(t)$  em banda, a cada símbolo do alfabeto e é por isso chamada etapa de sinalização.

Como já foi referido no capítulo 3, **o canal de transmissão** pode ser considerado em muitos casos práticos, como sendo representado por um filtro linear invariante, cuja resposta impulsiva é  $b(t)$  e o ruído de observação  $n(t)$  é considerado do tipo aditivo. Assim o sinal à saída do canal, ou à entrada do receptor, é dado por

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} b(\tau) \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m g(t - mT_s - \tau) d\tau + n(t). \quad (7-2.2)$$

Esta equação pode ser rescrita como

$$r(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m h(t - mT_s) + n(t), \quad (7-2.3)$$

onde

$$h(t) = b(t) * g(t), \quad (7-2.4)$$

é chamado o impulso recebido, *i.e.*, a “forma de pulso” depois de filtrada pelo canal de transmissão.

O terceiro bloco da figura 7.1 é **o receptor**. O receptor recebe à entrada um sinal contínuo  $r(t)$  que é, num sistema real, antes do mais colocado em banda base (não representado na figura). O primeiro sub-bloco do receptor é o filtro de recepção, designado pela sua resposta impulsiva  $f(t)$ . Este filtro de recepção é um dos componentes mais importantes e também, frequentemente, um dos mais complexos de todo o sistema de comunicações. É importante que este filtro esteja perfeitamente sintonizado com o filtro do emissor por um lado e com o tipo de canal de transmissão por outro. O sinal  $q(t)$  à saída do filtro receptor escreve-se,

$$\begin{aligned} q(t) &= f(t) * r(t) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m p(t - mT_s) + u(t), \end{aligned} \quad (7-2.5)$$

onde  $p(t) = f(t) * b(t) * g(t)$  e o ruído  $u(t) = f(t) * n(t)$ . Não é difícil perceber que para que o sinal  $q(t)$  tome o valor do símbolo  $A_k$  no instante  $t = kT_s$  é preciso que

$$q(kT_s) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} A_l p[(k - l)T_s] + u(kT_s) \quad (7-2.6)$$

seja igual a  $A_k$ , que só é possível se: 1)  $p[(k - m)T_s] = \delta(k - m)$  e 2) que  $u(kT_s) = 0$ . A escolha dos vários blocos do sistema de forma a respeitar estas duas condições é o tema do capítulo 7.4. A seguir ao sub-bloco do filtro receptor encontra-se um amostrador que deve ser pilotado a uma cadência síncrona com o intervalo de símbolo  $T_s$ , o que por vezes coloca algumas dificuldades na prática quando o emissor e o receptor se encontram a grande distância um do outro e/ou são muito diferentes entre si. O

sub-bloco a seguir é o decisor que na prática identifica o valor  $q_k$  à sua entrada com o símbolo estimado correspondente  $\hat{A}_k$  entre os possíveis  $\{A_m; m = 1, \dots, M\}$  à sua saída. Finalmente, o último sub-bloco é o decodificador que, através da operação inversa realizada no emissor, recebe à entrada o *stream* de símbolos estimados  $\hat{A}_k$  e produz à saída o *stream* de bits estimado  $\hat{B}_n$ .

### 7.3 Medidas de desempenho

Como já tivemos a ocasião de referir uma das medidas de desempenho de um determinado sistema de comunicação é a taxa de bit (ou *bit rate*) que permite realizar num determinado canal de transmissão. Assim é, por exemplo, frequente referir que um determinado modem tem uma taxa de transmissão de 1200, 2400 ou 9600 bits/s. Obviamente quando mais elevada é a bit rate, maior é o desempenho, apesar de não ser referida a taxa de erro obtida para este desempenho. Pressupõe-se que esta seja suficientemente baixa, o que é subjectivo. Os erros de detecção podem ser tornados arbitrariamente baixos aumentando a complexidade do emissor/receptor. Evitaremos entrar neste campo de compromisso entre bit rate versus complexidade.

Outra medida de desempenho normalmente aceite é definida pela bit rate por largura de banda. Noutras palavras, uma bit rate mais alta requer uma banda mais larga, portanto um sistema será tanto mais eficiente quanto maior for a sua, chamada, eficiência espectral dada por

$$\nu = \frac{\text{bit rate}}{\text{largura de banda}}, \quad (7-3.1)$$

que se mede em bits/s/Hz.

Por exemplo, um sistema com um alfabeto  $\{\Omega_A\}$  de dimensão,  $|\Omega_A|$  admite uma taxa de transmissão de  $\log_2 |\Omega_A|$  bits por cada símbolo, no caso simples em que existe uma relação um para um entre grupos de bits e cada símbolo. Assim, a bit rate será, neste caso, dada por  $\log_2 |\Omega_A|/T_s$  ( $1/T_s$  é a symbol rate) e por isso a eficiência espectral escreve-se

$$\nu = \frac{\log_2 |\Omega_A|}{BT_s},$$

onde  $B$  é a largura de banda em Hz.

Portanto, e em resumo, a symbol rate encontra-se limitada na prática pela largura de banda do canal de transmissão. Como demonstraremos mais adiante, se quisermos evitar completamente a interferência intersimbólica a symbol rate poderá ser no máximo o dobro da largura de banda do canal. Por outro lado, a dimensão do alfabeto encontra-se limitada pela potência máxima transmissível e pelo nível de ruído no canal. Estas duas limitações, na *symbol rate* e na dimensão do alfabeto, é que

restringem efectivamente a bit rate alcançavel num determinado sistema de transmissão.

## 7.4 Escolha da forma de pulso

### 7.4.1 Densidade espectral do sinal emitido

No capítulo 7.2 falámos, quando da equação (7-2.1), na função  $g(t)$  à qual chamámos forma de pulso (pulse shape). A escolha da forma de pulso permite uma melhor adaptação às características do canal de transmissão. Como já tivemos a ocasião de referir, a sequência de símbolos  $A_k$  pode ser, numa primeira aproximação, considerada branca, estacionária de média nula e de variância  $\sigma_A^2 = E[|A|^2]$ . Assim o seu espectro de potência é,

$$P_A(\omega) = \sigma_A^2. \quad (7-4.1)$$

Comecemos por notar que podemos designar um sinal de tipo passabanda modulado em torno à frequência  $f_c$  como

$$s(t) = \text{Re}[s_{bb}(t)e^{j2\pi f_c t}], \quad (7-4.2)$$

onde  $s_{bb}(t)$  é o sinal passa-baixo de  $s(t)$  que, para as modulações lineares introduzidas acima, se escreve

$$s_{bb}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m g(t - mT). \quad (7-4.3)$$

onde  $T$  é o intervalo de símbolo. De notar que para este tipo de modulações  $A_m$  é real e contém a informação da mensagem no caso ASK, e é complexo no caso PSK, QAM, e ASK-PSK (ver mais à frente). Em qualquer dos casos a sequência  $\{A_m, m = 1, \dots, M\}$  é aleatória e portanto  $s_{bb}(t)$  e  $s(t)$  são eles mesmos processos aleatórios. O primeiro passo no cálculo da densidade espectral de potência é estimar a função de autocorrelação, que para o caso do sinal (7-4.2) se escreve

$$\phi_s(\tau) = \text{Re}[\phi_{sbb}(\tau)e^{j2\pi f_c \tau}], \quad (7-4.4)$$

onde  $\phi_{sbb}(\tau)$  é a função de autocorrelação do componente passa-baixo  $s_{bb}(t)$ . A TF de (7-4.4) permite obter a densidade espectral de potência

$$\begin{aligned} P_s(f) &= \text{TF}[\phi_s(\tau)], \\ &= \frac{1}{2}[P_{sbb}(f - f_c) + P_{sbb}(f + f_c)], \end{aligned} \quad (7-4.5)$$

onde se utilizou explicitamente a expressão (2-2.43). Trata-se agora de determinar a expressão da densidade espectral de potência da componente passa-baixo  $P_{sbb}(f)$ . A função de autocorrelação de  $s_{bb}(t)$  escreve-se

$$\phi_{sbb}(t + \tau, t) = E[s_{bb}(t + \tau)s_{bb}^*(t)], \quad (7-4.6)$$

e por substituição de (7-4.3) em (7-4.6) obtemos

$$\phi_{sbb}(t + \tau, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E[A_m A_n^*] g(t + \tau - mT) g^*(t - nT). \quad (7-4.7)$$

Assumindo que a mensagem é uma sequência de bits/símbolos estacionária de média  $\mu_A$  e de função de autocorrelação

$$\phi_A(m - n) = E[A_m A_n^*], \quad (7-4.8)$$

então podemos escrever (7-4.7) como

$$\phi_{sbb}(t + \tau, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_A(m - n) g(t + \tau - mT) g^*(t - nT), \quad (7-4.9)$$

e fazendo uma mudança de variável  $i = m - n$ , obtemos

$$\phi_{sbb}(t + \tau, t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \phi_A(i) \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t + \tau - iT - nT) g^*(t - nT), \quad (7-4.10)$$

a partir da qual é agora fácil determinar que

$$\phi_{sbb}(t + \tau, t) = \phi_{sbb}(t + T + \tau, t + T), \quad (7-4.11)$$

o que simplesmente significa que se trata de uma função periódica, de período igual ao intervalo de bit  $T$ . Dado que a média de do processo  $s(t)$  é dada por

$$E[s(t)] = \mu_A \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t - nT) \quad (7-4.12)$$

também periódica de mesmo período  $T$  chegamos à conclusão que o processo estocástico  $s(t)$  se enquadra na definição de um processo periodicamente estacionário no sentido lato ou cicloestacionário definida no capítulo 2.4. Como tivemos ocasião de referir, o cálculo do espectro dos sinais cicloestacionários faz-se através da TF da média temporal da função de autocorrelação do processo num período. Essa média temporal escreve-se neste caso como

$$\bar{\phi}_{sbb}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \phi_{sbb}(t + \tau, t) dt, \quad (7-4.13)$$

e por isso substituindo (7-4.10) em (7-4.13) com a mudança de variável  $u = t - nT$ , o que implica que quando  $t = 0$ ,  $u = -nT$  e para  $t = T$ ,  $u = -(n - 1)T$  temos

$$\bar{\phi}_{sbb}(\tau) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \phi_A(i) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-nT}^{-(n-1)T} g(u + \tau - iT) g^*(u) du, \quad (7-4.14)$$



de onde, combinando o somatório em  $n$  e o integral num intervalo  $T$ , podemos escrever

$$\bar{\phi}_{sbb}(\tau) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \phi_A(i) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} g(u + \tau - iT) g^*(u) du, \quad (7-4.15)$$

e finalmente

$$\bar{\phi}_{sbb}(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \phi_A(i) \phi_g(\tau - iT), \quad (7-4.16)$$

onde

$$\phi_g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t + \tau) g^*(t) dt. \quad (7-4.17)$$

Escrevendo finalmente o espectro de potência de  $s_{bb}(t)$  como a TF de  $\bar{\phi}_{sbb}(\tau)$ , *i.e.*,

$$P_{sbb}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\phi}_{sbb}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau, \quad (7-4.18)$$

e notando que (7-4.16) representa apenas a convolução das autocorrelações de  $A_k$  e da função de pulso  $g(t)$ , permite chegar a

$$P_{sbb}(f) = \frac{1}{T} |G(f)|^2 P_A(f). \quad (7-4.19)$$

Na prática somos levados a determinar  $g(t)$  de forma a que o seu espectro se adapte ao canal de transmissão ou, alternativamente, tendo em conta (7-4.19), controlando as propriedades da função de autocorrelação  $\phi_A(i)$  da sequência de bits transmitida. Com efeito dado que  $\phi_A(i)$  é uma função periódica podemos determinar a sua densidade espectral através da série complexa de Fourier

$$P_A(f) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \phi_A(i) e^{-j2\pi f iT}, \quad (7-4.20)$$

e inversamente

$$\phi_A(i) = T \int_{-1/2T}^{1/2T} P_A(f) e^{j2\pi f iT} df, \quad (7-4.21)$$

Considerando, por exemplo, que os bits/símbolos de informação são reais de média  $E[A_m] = \mu_A$  e descorrelacionados com variância  $\sigma_A^2$  teremos que a função de autocorrelação se escreve

$$\phi_A(i) = \begin{cases} \sigma_A^2 + \mu_A^2, & i = 0 \\ \mu_A^2, & i \neq 0 \end{cases} \quad (7-4.22)$$

Substituindo (7-4.22) em (7-4.20) obtemos

$$P_A(f) = \sigma_A^2 + \mu_A^2 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f iT}, \quad (7-4.23)$$

onde o somatório do segundo termo pode ser visto como a expansão em série de Fourier de um trem de Diracs de amplitude  $1/T$ ,

$$P_A(f) = \sigma_A^2 + \frac{\mu_A^2}{T} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta(f - i/T), \quad (7-4.24)$$

e finalmente a substituição da densidade espectral da sequência de informação  $P_A(f)$  na expressão da densidade espectral do sinal passa-baixo (7-4.19) permite escrever

$$P_{sbb}(f) = \frac{\sigma_A^2}{T} |G(f)|^2 + \frac{\mu_A^2}{T^2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |G(i/T)|^2 \delta(f - i/T). \quad (7-4.25)$$

É interessante constatar que os dois termos desta expressão põem em relevo dois tipos de componentes espectrais: 1) o primeiro termo é um espectro contínuo e depende unicamente do espectro da “forma do pulso”  $g(t)$  e 2) o segundo termo é formado por uma série infinita de componentes espectrais espaçadas de  $1/T$  cuja amplitude é igual ao espectro da função de pulso  $G(f)$  nos pontos  $i/T$ . De notar que no caso  $\mu_A = 0$  temos apenas

$$P_{sbb}(f) = \frac{\sigma_A^2}{T} |G(f)|^2, \quad (7-4.26)$$

de onde podemos concluir que, neste caso, o espectro do sinal a transmitir se torna independente da mensagem dependendo apenas do espectro da função de pulso  $g(t)$ .

**Exemplo 1:** considere a “forma de pulso” representada na figura 7.2a, e definida por

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t \in [-\infty, 0[ \\ A & t \in [0, T] \\ 0 & t \in ]T, \infty[ \end{cases}$$

Calcule o seu espectro de potência  $|G(f)|^2$ .

Trata-se de um cálculo clássico, que se pode fazer como exercício de revisão da TF,

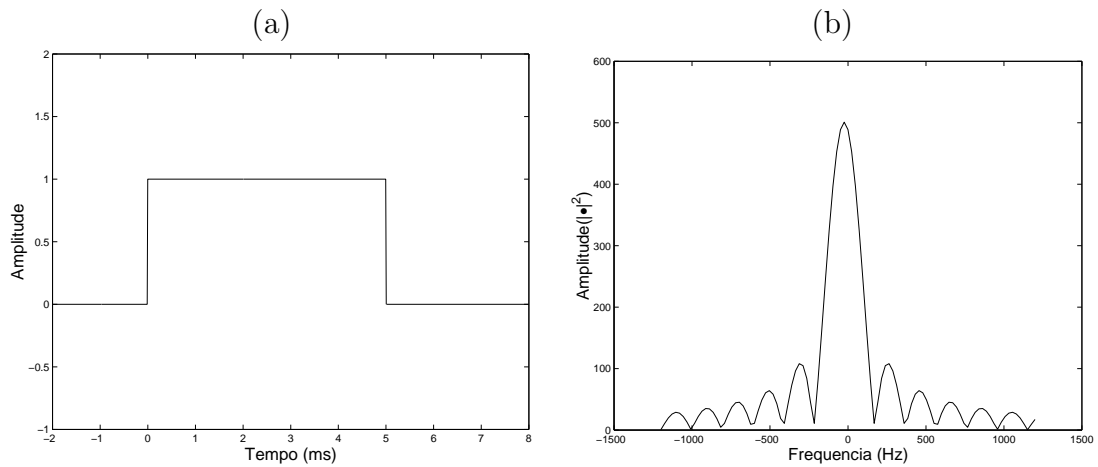


Figura 7.2: “forma de pulso” rectangular causal de duração  $T = 5$  ms (a) e respectivo espectro de potência  $|G(f)|^2$  (b).

assim temos que

$$\begin{aligned}
 G(f) &= \int_0^T Ae^{-j2\pi ft} dt, \\
 &= A \left[ \frac{e^{-j2\pi ft}}{-j2\pi f} \right]_0^T \\
 &= A \left[ \frac{e^{-j2\pi fT} - 1}{-j2\pi f} \right] \\
 &= Ae^{-j\pi fT} \left[ \frac{e^{-j\pi fT} - e^{j\pi fT}}{-j2\pi f} \right] \\
 &= Ae^{-j\pi fT} \frac{\sin(\pi fT)}{\pi f},
 \end{aligned}$$

ou ainda

$$G(f) = AT \frac{\sin \pi fT}{\pi fT} e^{-j\pi fT},$$

e finalmente

$$|G(f)|^2 = (AT)^2 \left( \frac{\sin \pi fT}{\pi fT} \right)^2,$$

espectro que se encontra representado na figura 7.2b.

**Exemplo 2:** outra “forma de pulso” tipicamente utilizada em comunicações é o

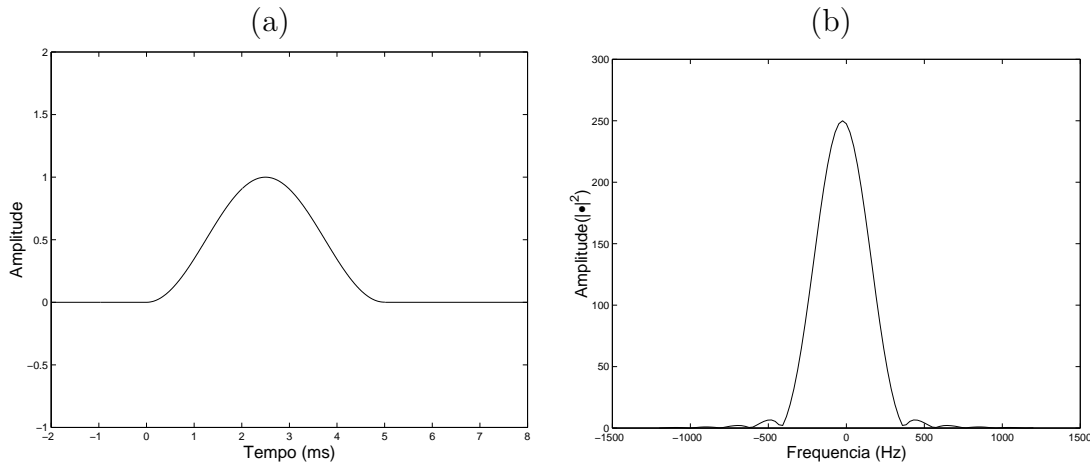


Figura 7.3: “forma de pulso” *raised cosine* de duração  $T = 5$  ms (a) e respectivo espectro de potência  $|G(f)|^2$  (b).

coseno elevado (*raised cosine*) dado pela expressão

$$g(t) = \begin{cases} \frac{A}{2} \left[ 1 + \cos \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{T}{2} \right) \right], & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t \notin [0, T], \end{cases}$$

e representada na figura 7.3a. O cálculo do seu espectro de potência passa obviamente pela TF de  $g(t)$ . O cálculo é algo semelhante ao do exemplo anterior porém muito mais trabalhoso. Após algumas páginas de cálculo podemos chegar ao resultado notável

$$G(f) = \frac{AT}{2} \frac{\sin \pi f T}{\pi f T (1 - f^2 T^2)} e^{-j\pi f T},$$

sendo o seu espectro de potência

$$|G(f)|^2 = \left( \frac{AT}{2} \right)^2 \left( \frac{\sin \pi f T}{\pi f T (1 - f^2 T^2)} \right)^2,$$

que se encontra representado na figura 7.3b. Comparando com o espectro de potência da “forma de pulso” rectangular pode-se notar que também aqui os nulos são obtidos para múltiplos do inverso da duração do pulso  $n/T$ , porém contrariamente ao caso do pulso rectangular o primeiro zero não se obtém para  $n = 1$  mas só a partir de  $n = 2$ , indiciando uma largura do lóbulo principal muito maior do que no caso do pulso rectangular. Em compensação, a curva de decaimento do lóbulo central do espectro de potência é muito mais rápida do que no caso do pulso rectangular. Em comunicações este facto é apreciável dado que permite obter uma menor interferência entre pulsos.

Como exemplo de escola podemos referir que se o canal de transmissão for um canal passa-baixo ideal, dado por

$$B(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| \geq W, \end{cases} \quad (7-4.27)$$

então o espectro da função de pulso é

$$G(\omega) = \begin{cases} \pi/W, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| \geq W, \end{cases} \quad (7-4.28)$$

que no domínio do tempo é uma função sinc,

$$g(t) = \frac{\sin(Wt)}{Wt}. \quad (7-4.29)$$

Dado que esta função tem as suas passagens por zero para múltiplos de  $\pi/W$  poderemos escolher a duração de cada símbolo como  $T_s = \pi/W$ . Esta taxa de símbolo de  $1/T_s$  é o valor máximo (e por isso óptimo) que pode ser obtido para um canal de largura de banda  $W$ . Infelizmente, sinais de banda limitada como o descrito em (7-4.28) não são realizáveis na prática e somos por isso relegados para o problema do desenho de uma forma de pulso que seja por um lado realizável e por outro que maximize a taxa de símbolo para uma dada banda  $W$ .

#### 7.4.2 Interferência intersimbólica

Na prática o valor mínimo da largura de banda  $W = \pi/T$  do “pulso” é sempre excedido de forma a simplificar a implementação. Este aumento da largura de banda da forma do impulso é chamado excesso de banda e varia geralmente entre 10 e 100%. Por exemplo um excesso de banda de 100% corresponde a uma largura de banda de  $2\pi/T$ . Para obter um excesso de banda igual a zero e uma interferência intersimbólica (*Intersymbol Interference - ISI*) também igual a zero, a forma do impulso é única e é dada pelo sinc, porém para um excesso de banda não nulo existem várias formas de pulso possíveis e por isso trata-se agora de seleccionar aquelas que tem ISI nula. O critério de seleção que permite determinar as formas de pulso com ISI nula chama-se *critério de Nyquist*.

O sinal de saída do filtro de recepção é dado por (7-2.5) e o sinal amostrado dado no instante  $kT_s$  por (7-2.6). Podemos assim escrever

$$Q_k = A_k p(0) + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq k}}^{\infty} A_m p(kT - mT) + u(kT), \quad (7-4.30)$$

Olhando atentamente para esta expressão podemos notar que uma recepção sem erros implicaria simplesmente  $Q_k = A_k$ . Todo o resto desta expressão significa uma parte indesejável no resultado. É obviamente o caso do ruído  $u(t)$  e do segundo termo da expressão (7-4.30). Este segundo termo é chamado interferência intersimbólica ou ISI. Uma forma de anular a ISI seria fazer com que o sinal  $p(t)$  passasse em zero para todos os valores de  $t$  múltiplos de  $T$ , *i.e.*,

$$p(kT) = \delta_k, \quad (7-4.31)$$

e portanto (7-4.30) se escrevesse

$$Q_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \delta_{k-m} + u_k = A_k + u_k. \quad (7-4.32)$$

A esta forma de anular a ISI chama-se critério de "zero-forcing". Este critério não é de forma nenhuma ótimo pois é puramente determinístico e não tem em conta o ruído. O problema agora é de, a partir do critério de "zero-forcing", estabelecer uma relação que permita desenhar a forma de pulso  $g(t)$ . Tomando a TF de (7-4.31)

$$\text{TF}[p(kT)] = \text{TF}[p(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)] = 1, \quad (7-4.33)$$

que deverá ser igual a 1, pois é simplesmente a TF de um Dirac no tempo. Sabendo que a TF do produto é a convolução das TF's e que a TF de um pente de Diracs no tempo é um pente de Diracs na frequência,

$$\frac{1}{2\pi} P(\omega) * \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\frac{2\pi}{T}) = 1, \quad (7-4.34)$$

e finalmente resolvendo o produto de convolução

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} P(\omega - k\frac{2\pi}{T}) = T. \quad (7-4.35)$$

A equação (7-4.35) é chamada critério de Nyquist para ISI igual a zero<sup>5</sup>. Vamos agora supôr que o canal de transmissão  $B(\omega)$  é tal que  $B(\omega) = 0$  para  $|\omega| > W$ . Temos assim três casos possíveis:

- 1)  $T < 1/2W$  ou de forma equivalente  $1/T > 2W$ . Neste caso o sinal somatório do lado esquerdo da expressão (7-4.35) é uma sequência de espectros disjuntos e não sobrepostos. Neste caso torna-se impossível verificar a equação (7-4.35) dado que há zonas do espectro 'vazias' de tal forma que não existe nenhum sinal  $p(t)$  tal que a soma do seu espectro  $P(\omega)$  possa fazer uma constante  $T$ .

---

<sup>5</sup>a não confundir com o Teorema de Nyquist da teoria da amostragem, apesar de ter inegáveis relações com este.

- 2)  $T = 1/2W$  ou  $1/T = 2W$ . Neste segundo caso, chamado caso limite já é possível determinar um  $p(t)$  que verifique a (7-4.35). Porém existe um só um sinal possível que é

$$P(\omega) = \begin{cases} T & |\omega| < W \\ 0, & \text{outro } \omega \end{cases} \quad (7-4.36)$$

cuja forma temporal se escreve

$$p(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}. \quad (7-4.37)$$

Isto significa que o menor valor do intervalo de símbolo para o qual é possível ter ISI igual a zero é  $T = 1/2W$  onde  $W$  é a banda do canal de transmissão. Para este valor de  $T$  e para que a ISI seja zero, a resposta impulsiva combinada do conjunto filtro emissor, canal, receptor deverá ser igual a uma função sinc dada por (7-4.37). Ora neste caso limite é difícil implementar  $p(t)$  dado que é uma função não causal ( $\neq 0$  para  $t < 0$ ) e portanto não realizável. Um atraso de  $t_0$  em  $p(t)$  pode torná-la causal mas impõe sempre uma limitação na forma da sinc, o que acaba por introduzir termos de ISI. Este valor de  $T$  não é portanto uma solução na prática apesar de corresponder à mais alta taxa de transmissão que pode ser obtida (mínimo valor de  $T$ ).

- 3)  $T > 1/2W$  ou seja  $1/T < 2W$ . Neste último caso os espectros do sinal  $p(t)$  sobrepoem-se e existe assim uma infinidade de possibilidades para a escolha de  $p(t)$  que verificam a equação (7-4.35). Devido às razões de realização prática já apontadas anteriormente, as formas de pulso mais utilizadas, e que verificam o critério de Nyquist de ISI igual a zero, pertencem à família dos cosenos elevados (*raised cosine*) e são dadas por

$$p(t) = \left[ \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} \right] \left[ \frac{\cos(\alpha \pi t/T)}{1 - (2\alpha t/T)^2} \right], \quad (7-4.38)$$

que tem como transformada de Fourier

$$P(\omega) = \begin{cases} T, & 0 \leq |\omega| \leq (1 - \alpha)\pi/T \\ \frac{T}{2} [1 - \sin[\frac{T}{2\alpha}(|\omega| - \frac{\pi}{T})]], & (1 - \alpha)\frac{\pi}{T} \leq |\omega| \leq (1 + \alpha)\frac{\pi}{T} \\ 0, & |\omega| > (1 + \alpha)\pi/T \end{cases} \quad (7-4.39)$$

onde  $\alpha$  é o factor de *rolloff* tal que  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Para  $\alpha = 0$ , a função coseno elevado toma a forma de uma função porta no domínio da frequência, por isso corresponde ao caso óptimo do excesso de banda mínimo. Um aumento progressivo de  $\alpha$  tem como efeito um aumento correspondente da largura de banda com uma passagem cada vez mais gradual do valor máximo para zero conforme representado na figura 7.4. O coeficiente  $\alpha$  variando entre 0 e 1 faz com que o excesso de banda varie entre 0 e 100%.

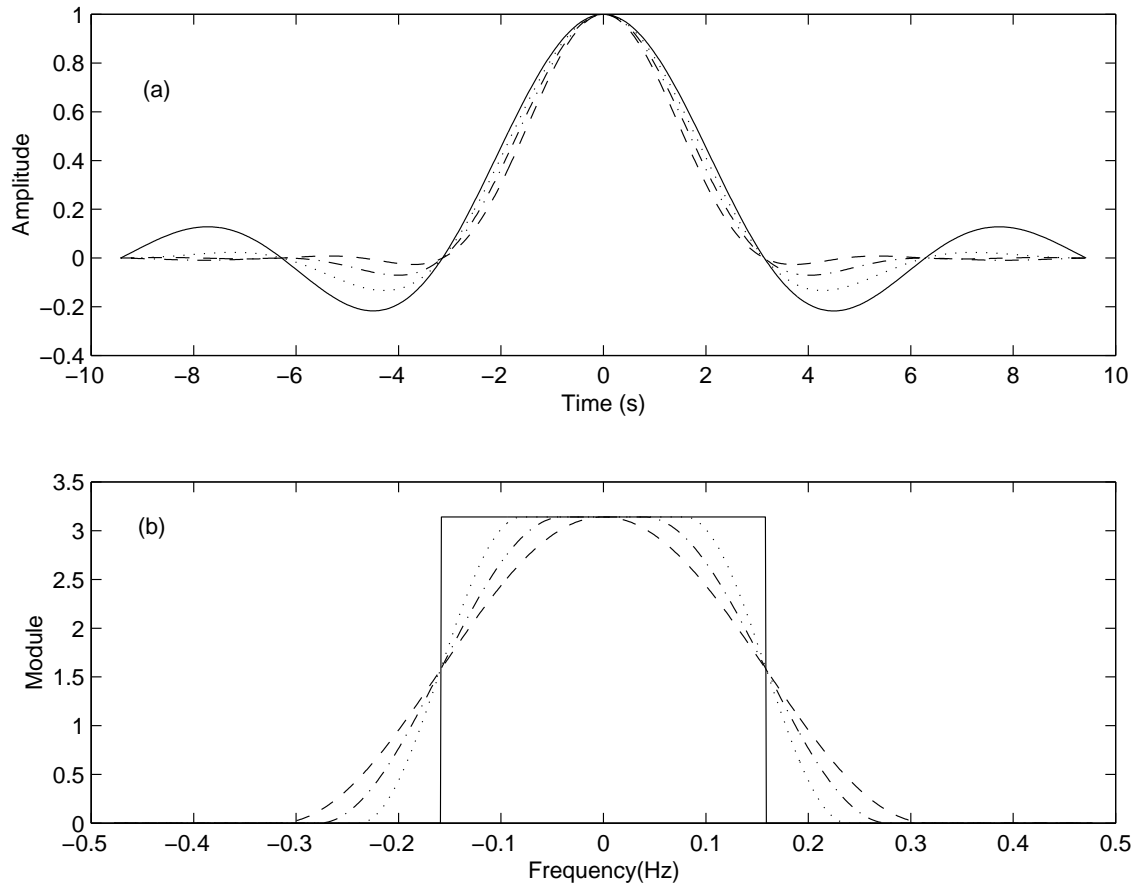


Figura 7.4: função coseno elevado (*raised cosine*) (a) no tempo e (b) na frequência, para diferentes valores do factor de 'root-off':  $\alpha=0$  (-),  $\alpha = 0.5$  (...),  $\alpha = 0.75$  (- .) e  $\alpha = 1$  (- -).

Aparentemente a escolha judiciosa da forma do sinal  $p(t)$  permite obter uma condição ideal com ISI nula. Porém não devemos esquecer que  $p(t) = g(t) * f(t) * b(t)$  e, na prática, mesmo se  $g(t)$  e  $f(t)$  podem ser determinados arbitrariamente pelo utilizador, o mesmo não acontece com  $b(t)$  que é a resposta impulsiva do canal de transmissão sobre o qual o utilizador tem pouco, ou mesmo nenhum, controlo. O que quer dizer que não existe uma forma fechada para  $f(t)$  e  $g(t)$  de forma a que  $p(t)$  tenha a forma desejada. Mesmo quando  $b(t)$  é conhecido, obter uma ISI nula pode ser extremamente dispendioso em termos de complexidade dos filtros  $g(t)$  e/ou  $f(t)$ .

### 7.4.3 Diagrama de olho

Uma das formas tradicionais de determinar o grau de ISI de um sistema de comunicação é através do chamado diagrama de olho. O nome vem do facto de que a



sua forma é semelhante à do olho humano. Esta é a forma tradicional de teste do grau de ISI porque pode ser facilmente implementada através da observação num osciloscópio do sinal de saída do filtro de recepção no qual a entrada de trigger é o sinal de sincronismo dos símbolos.

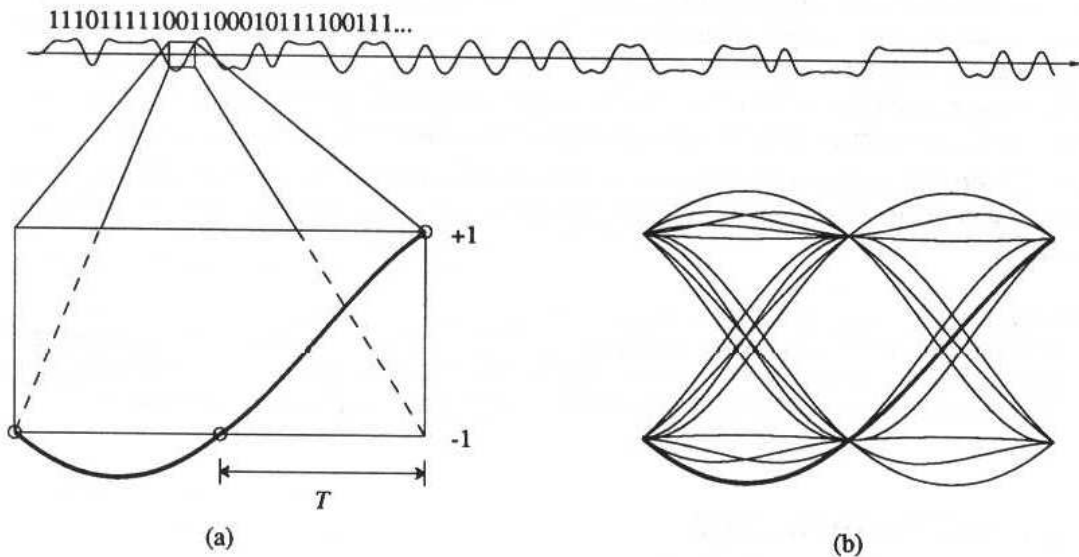


Figura 7.5: um sinal PAM binário com impulsos do tipo coseno elevado e excesso de banda 50% (topo), zoom de uma transição (a) e diagrama de olho(b).

A figura 7.5 mostra um exemplo de uma sequência de símbolos (topo) e um zoom de uma transição (a) e uma sobreposição de símbolos como poderia ser observada no écran de um osciloscópio (b). Quando existe ISI e o critério de Nyquist não é verificado, o símbolo 0 e 1 tendem a confundir-se fechando o centro do 'olho' verticalmente. O facto do olho estar aberto verticalmente significa igualmente que a quantidade de ruído necessário para produzir erros de identificação é maior e dessa forma compreendemos que quanto maior a abertura vertical maior a imunidade ao ruído. Por outro lado o ponto de cruzamento dos diferentes traços determina a abertura horizontal do olho e depende directamente do sincronismo temporal da taxa de símbolo. No seu geral a forma do olho depende da forma de pulso e do excesso de banda utilizado no coseno elevado. Por exemplo a figura 7.6 mostra dois diagramas de olho, em (a) com 25% de excesso de banda e em (b) com 100% de excesso de banda. Assim podemos ver o benefício de aumentar o excesso de banda obtendo um 'olho' mais aberto e portanto uma maior imunidade ao ruído e uma diminuição dos erros de sincronismo. O preço a pagar foi uma maior largura de banda e no limite uma menor taxa de transmissão na mesma banda e portanto uma diminuição da eficiência espectral do sistema.

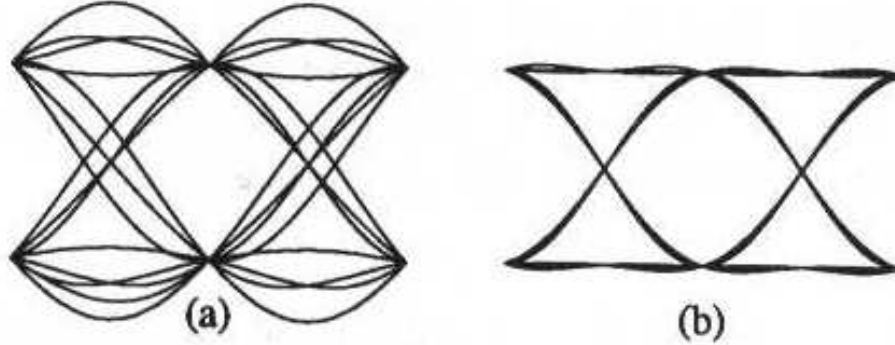


Figura 7.6: diagrama de olho com 25% de excesso de banda (a) e com 100% de excesso de banda (b).

## 7.5 Sinalização por modulação de impulsos

Como foi referido anteriormente, uma das tarefas mais importantes do emissor é assegurar-se de que cada símbolo do alfabeto se encontra representado por um e só um sinal a transmitir - esta é a etapa de sinalização. Há obviamente um grande número de possibilidades na escolha do conjunto de sinais a utilizar. Neste subcapítulo vamos detalhar e caracterizar algumas delas. Antes disso vamos apenas definir o sinal  $s(t)$  em banda base como sendo dado por

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m g(t - mT), \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} s_m(t).
 \end{aligned}
 \tag{7-5.1}$$

### 7.5.1 Modelação por amplitude de impulsos

*Amplitude Shift Keying - ASK*

Nesta técnica uma série de impulsos de base são modulados por uma sequência de símbolos que constituem “uma imagem” da mensagem a transmitir. Os sinais da família de impulsos são dados por

$$s_m(t) = A_m g(t), \quad m = 1, \dots, M, \quad 0 \leq t \leq T
 \tag{7-5.2}$$

onde  $\{A_m; m = 1, \dots, M\}$  representa a sequência de bits a transmitir e que forma a amplitude de cada um dos sinais  $s_m(t)$ . As amplitudes  $A_m$  encontram-se distribuídas

no intervalo  $[(1 - M)d, (M - 1)d]$  sendo que cada nível será dado por

$$A_m = (2m - 1 - M)d, \quad m = 1, \dots, M \quad (7-5.3)$$

e portanto a diferença entre dois níveis sucessivos é de  $2d$ . Dado que a informação se encontra na amplitude dos impulsos, este tipo de modulação é chamado *Amplitude Shift Keying - ASK*. O sinal  $g(t)$  é a “forma de pulso” ou *pulse shape* da qual já falamos anteriormente. Se a taxa de envio de bits à entrada do modulador, também chamada *bit rate*, de  $R_b$  bits por segundo, o intervalo entre dois bits será de  $T_b = 1/R_b$ . À saída do modulador teremos uma taxa de símbolo (*symbol rate*) de  $R_b/k$  símbolos por segundo, e portanto o intervalo entre cada símbolo será  $T_s = k/R_b = kT_b$ . Começemos por definir a energia contida em cada uma das funções de base, utilizando (2-2.59)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m &= \int_{-\infty}^{+\infty} |s_m(t)|^2 dt, \\ &= \int_0^T A_m^2 g^2(t) dt, \\ &= A_m^2 \int_0^T g^2(t) dt, \\ &= A_m^2 \mathcal{E}_g, \end{aligned} \quad (7-5.4)$$

onde  $\mathcal{E}_g$  é a energia do sinal  $g(t)$ . Para simplificar os cálculos que seguem é conveniente exprimir os impulsos de base como

$$s_m(t) = s_m f(t), \quad (7-5.5)$$

onde  $f(t)$  é uma função normalizada em energia

$$f(t) = \sqrt{\frac{1}{\mathcal{E}_g}} g(t), \quad (7-5.6)$$

e assim temos que a amplitude  $s_m = A_m \sqrt{\mathcal{E}_g}$ . Claramente a possibilidade de confundir o nível  $m$  com o nível  $n$  depende da distância entre  $s_m(t)$  e  $s_n(t)$ . Dado que cada um dos impulsos só difere pela sua amplitude a distância euclidiana mede-se ao longo da recta, o que nos permite escrever

$$\begin{aligned} d_{mn} &= \sqrt{(s_m - s_n)^2} \\ &= |A_m - A_n| \sqrt{\mathcal{E}_g}. \end{aligned} \quad (7-5.7)$$

Visto que dois níveis sucessivos se encontram separados por  $2d$ , a distância mínima entre os sinais correspondentes é

$$d_{min} = d \sqrt{1 \mathcal{E}_g}. \quad (7-5.8)$$

### 7.5.2 Modulação por fase de impulsos (Phase Shift Keying - PSK)

Neste caso e, como o seu nome indica, será a fase e não a amplitude do impulso que variará de acordo com a sequência digital a transmitir. Assim o impulso de base escreve-se

$$\begin{aligned} s_m(t) &= g(t)e^{j2\pi(m-1)/M}, \\ &= g(t) \cos \frac{2\pi}{M}(m-1) + jg(t) \sin \frac{2\pi}{M}(m-1). \end{aligned} \quad (7-5.9)$$

Assim a fase  $\theta_m$  da portadora pode tomar os  $M$  valores,  $\{\theta_m = 2\pi(m-1)/M; m = 1, \dots, M\}$ . Podemos notar, fazendo um cálculo análogo ao efectuado no caso da ASK, que cada um dos impulsos utilizados em PSK têm uma energia constante

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m &= \int_{-\infty}^{\infty} |s_m(t)|^2 dt, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t), \\ &= \mathcal{E}_g. \end{aligned} \quad (7-5.10)$$

Utilizando (7-5.9) podemos notar que cada função de base pode ser representada como uma combinação linear de duas funções ortogonais  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$ , tais que

$$s_m(t) = s_{m1}f_1(t) + s_{m2}f_2(t), \quad (7-5.11)$$

onde

$$f_1(t) = \sqrt{\frac{1}{\mathcal{E}_g}}g(t), \quad (7-5.12)$$

$$f_2(t) = j\sqrt{\frac{1}{\mathcal{E}_g}}g(t), \quad (7-5.13)$$

e finalmente, tomando como coordenadas as funções  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  podemos representar o sinal  $s_m(t)$  como um vector  $\mathbf{s}_m$  de coordenadas

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_m &= \left[ \sqrt{\mathcal{E}_g} \cos \frac{2\pi}{M}(m-1), \sqrt{\mathcal{E}_g} \sin \frac{2\pi}{M}(m-1) \right] \\ &= [s_{m1}, s_{m2}], \end{aligned} \quad (7-5.14)$$

Torna-se assim fácil compreender a representação dos impulsos de base num referencial ortonormado de acordo com a figura 7.7 para  $M=2, 4$  e  $8$ . Note-se que os símbolos atribuídos a cada ponto do espaço encontram-se distribuídos de tal forma a só mudar

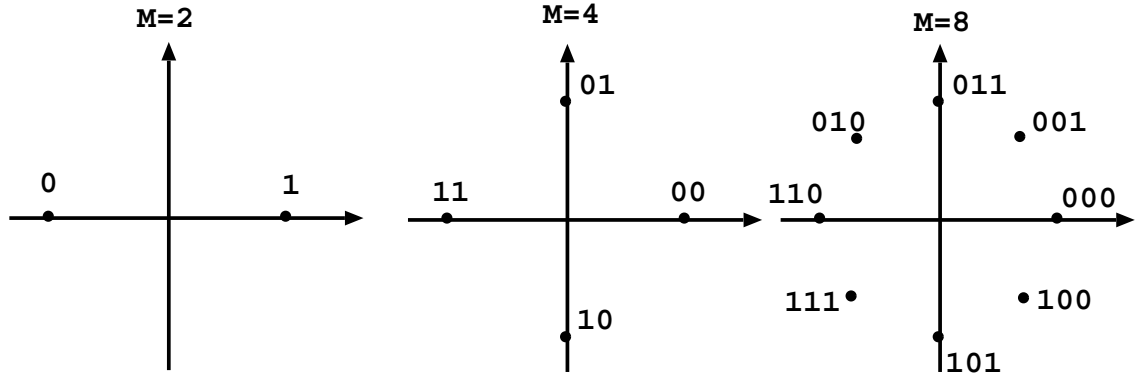


Figura 7.7: diagrama de espaço de sinais para a modulação PSK.

um bit entre pontos contíguos, com a intenção de minimizar o erro cometido. Da mesma forma que com ASK, em PSK, o erro entre dois níveis sucessivos depende da distância euclidiana entre dois pontos no plano, dada por

$$\begin{aligned}
 d_{mn} &= |\mathbf{s}_m - \mathbf{s}_n| \\
 &= \sqrt{(s_{m1} - s_{n1})^2 + (s_{m2} - s_{n2})^2}, \\
 &= \sqrt{\mathcal{E}_g \left[ 1 - \cos \frac{2\pi}{M}(m - n) \right]}, \tag{7-5.15}
 \end{aligned}$$

onde o seu valor mínimo é obtido para  $m = n + 1$  de onde

$$d_{min} = \sqrt{\mathcal{E}_g \left( 1 - \cos \frac{2\pi}{M} \right)}. \tag{7-5.16}$$

### 7.5.3 Modulação de amplitude em quadratura (*Quadrature Amplitude Modulation - QAM*)

A modulação de amplitude em quadratura (QAM) permite obter a mesma eficiência da modulação ASK-SSB utilizando dois bits de informação em duas portadoras em quadratura (90 graus) uma da outra. É um pouco como se fosse ASK em PSK com  $M = 2$ . Neste caso os sinais de base escrevem-se

$$\begin{aligned}
 s_m(t) &= (A_{mc} + jA_{ms})g(t), \quad m = 1, \dots, M, \quad 0 \leq t \leq T, \\
 &= A_{mc}g(t) - jA_{ms}g(t). \tag{7-5.17}
 \end{aligned}$$

Deste modo cada impulso leva o dobro da informação através da codificação de  $A_{mc}$  e  $A_{ms}$ , amplitudes das componentes em fase e em quadratura da portadora, respectivamente. Outra forma de ver a relação entre QAM, ASK e PSK é de escrever o sinal

da equação (7-5.17) como

$$\begin{aligned} s_m(t) &= V_m g(t) e^{j\theta_m}, \\ &= V_m g(t) \cos \theta_m + j V_m g(t) \sin \theta_m, \end{aligned} \quad (7-5.18)$$

onde  $V_m = \sqrt{A_{mc}^2 + A_{ms}^2}$  e  $\theta_m = \arctan(A_{ms}/A_{mc})$ , o que demonstra que QAM pode ser visto como uma combinação de modulação de amplitude e modulação de fase. Como no caso PSK, também em QAM os sinais de base  $s_m(t)$  podem ser representados em forma vectorial a partir de um conjunto das funções de base (7-5.13) com as coordenadas

$$\mathbf{s}_m = [A_{mc} \sqrt{\mathcal{E}_g}, A_{ms} \sqrt{\mathcal{E}_g}] \quad (7-5.19)$$

onde, como habitualmente  $\mathcal{E}_g$  é a energia do “pulso” de base  $g(t)$ . A distância euclidiana entre dois pontos  $m, n$  é neste caso dada por

$$\begin{aligned} d_{mn} &= |\mathbf{s}_m - \mathbf{s}_n|, \\ &= \sqrt{\mathcal{E}_g [(A_{mc} - A_{nc})^2 + \mathcal{E}_g (A_{ms} - A_{ns})^2]}, \end{aligned} \quad (7-5.20)$$

A distância mínima entre dois pontos contíguos no espaço de sinais QAM depende da forma da disposição da grelha de pontos. No caso em que as amplitudes discretas variam de acordo com  $\{(2m-1)d; m=1, \dots, M\}$  a grelha toma uma forma rectangular e nesse caso a distância mínima é dada por

$$d_{min} = d \sqrt{1 \mathcal{E}_g}. \quad (7-5.21)$$

Podemos agora generalizar a ideia introduzida com QAM a ordens superiores de ASK e PSK, combinando sempre os dois tipos de modulação. Assim, se notarmos  $M_1$  o número de níveis de ASK, e  $M_2$  o número de níveis de PSK, temos que o número de níveis total obtido pela combinação ASK-PSK, é  $M = M_1 M_2$ . Isto significa que se podem representar  $k = m_1 + m_2$  símbolos onde  $M_1 = 2^{m_1}$  e  $M_2 = 2^{m_2}$ . A taxa de transmissão de símbolos encontra-se então reduzida a  $1/T_s = R/(m_1 + m_2)$ . A título de exemplo, a figura 7.8 representa os diagramas de espaço de sinais para a modulação combinada ASK-PSK, para  $M = 8$  e  $M = 16$ .

#### 7.5.4 Modulação de impulsos em frequência

(*Frequency Shift Keying - FSK*)

Neste último caso que consideraremos aqui, a separação entre níveis faz-se através de variações em frequência. Assim, a família de sinais de base escreve-se

$$s_m(t) = \sqrt{\frac{1 \mathcal{E}_g}{T}} e^{j2\pi m \Delta f t}, \quad m = 1, \dots, M, \quad 0 \leq t \leq T,$$

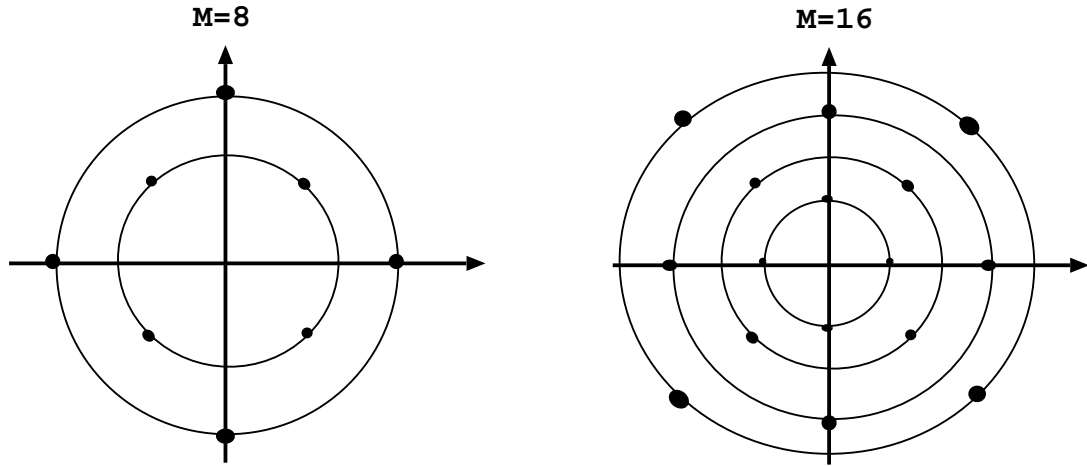


Figura 7.8: diagrama de espaço de sinais para a modulação ASK-PSK,  $M=8$  e  $M=16$ .

Para o caso em que  $\Delta f = 1/2T$  os  $M$  sinais FSK podem ser representados como outros tantos vectores de dimensão  $M$ , dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1 &= [\sqrt{\mathcal{E}_g}, 0, 0, \dots, 0] \\ \mathbf{s}_2 &= [0, \sqrt{\mathcal{E}_g}, 0, \dots, 0] \\ &\vdots = \vdots \\ \mathbf{s}_M &= [0, 0, 0, \dots, 0, \sqrt{\mathcal{E}_g}], \end{aligned} \tag{7-5.22}$$

$$\tag{7-5.23}$$

A distância no espaço de sinais é dada por

$$d_{mn} = \sqrt{2\mathcal{E}_g}, \tag{7-5.24}$$

e que sendo independente de  $m$  e  $n$  é também a distância mínima.

## 7.6 Modulação de impulsos em banda passante

Na prática a maioria dos canais de transmissão não são compatíveis com a transmissão de um sinal em banda base e por isso é necessário modular o sinal em banda passante. Quem diz modulação diz também desmodulação do mesmo sinal ao nível do receptor. O princípio, geralmente verificado na prática, é que o processo de modulação e desmodulação deverá ser transparente para o utilizador tanto do ponto de vista do tratamento matemático como do desempenho do sistema.

Como já tivemos ocasião de ver a passagem de um sinal complexo  $s(t)$  em banda base para um sinal  $x(t)$  em banda passante traduz-se por

$$x(t) = \sqrt{2}\text{Re}\{s(t)e^{j2\pi f_c t}\}, \quad (7-6.1)$$

onde, se  $s(t)$  for em banda base,  $x(t)$  será em banda passante. Anteriormente discutimos vários métodos de modulação / sinalização, entre os quais ASK, PSK, FSK e QAM. Tomaremos aqui o caso mais eficiente que é a modulação QAM. A grande vantagem deste tipo de modulação é de que permite a transmissão de sinais em banda base complexos onde a parte real e a parte imaginária podem não ter forçosamente nenhuma ligação entre si, *i.e.*, ambas podem conter informação. Na prática, isto significa que se

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k g(t - kT), \quad (7-6.2)$$

os coeficientes  $a_k$  ou a “função de pulso”  $g(t)$ , ou ambos, podem ser complexos. Em particular, quase nunca acontece que  $g(t)$  seja complexo, porém, a possibilidade que  $a_k$  tome valores complexos é altamente interessante porque duplica a quantidade de informação que pode ser contida no mesmo alfabeto. O esquema blocos de um tal modulador (transmissor) encontra-se representado na figura 7.9.

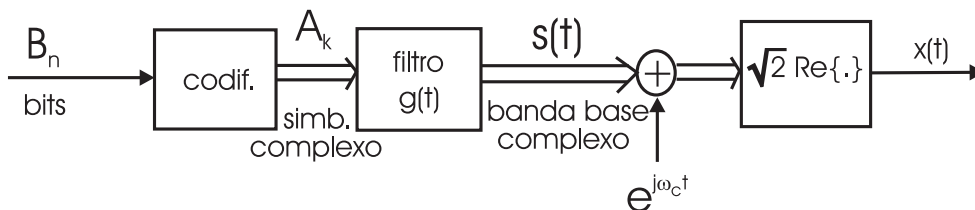


Figura 7.9: um sistema modulador de impulsos passa banda

Substituindo (7-6.2) em (7-6.1) podemos escrever,

$$x(t) = \sqrt{2}\text{Re} \left[ e^{j2\pi f_c t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k g(t - kT) \right], \quad (7-6.3)$$

que é efectivamente uma forma de representar um sinal modulado em impulsos passa banda. Alternativamente, podemos escrever

$$x(t) = \sqrt{2} \left[ \cos(2\pi f_c t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Re}\{a_k\} g(t - kT) \right] - \sqrt{2} \left[ \sin(2\pi f_c t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Im}\{a_k\} g(t - kT) \right], \quad (7-6.4)$$

tendo em conta que  $g(t)$  é real. A representação (7-6.4) é equivalente à modulação de dois sinais reais que se encontram desfasados de  $\pi/2$ , *i.e.*, que se encontram em quadratura e portanto adapta-se perfeitamente ao caso da modulação QAM.



Uma terceira representação possível para o sinal PM em banda passante é dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_m e^{j(2\pi f_c t + \theta_m)} g(t - kT) \right] \\ &= \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_m \cos(2\pi f_c t + \theta_m) g(t - kT), \end{aligned} \quad (7-6.5)$$

onde se utilizou a definição polar para  $a_m = c_m e^{j\theta_m}$ . Aqui, trata-se de uma representação interessante pois vê-se que a “função de pulso” multiplica uma portadora cuja amplitude e fase dependem da informação enviada  $a_m$ . Esta é por vezes denominada modulação ASK - PSK (*amplitude/phase - modulation*). Esta representação sugere igualmente que PSK é um caso especial de PM em banda passante, o que é verdade.

### Resumo do capítulo 7:

A utilização de impulsos para a transmissão de informação é a técnica mais moderna e actualmente mais usada para a transmissão de informação. A informação pode estar contida seja na amplitude seja na fase de cada impulso ou seja nos duas em simultâneo. De uma forma geral diz-se que se faz modulação de impulsos (*pulse modulation - PM*). São duas as questões fundamentais abordadas relativamente a PM que são: a escolha da forma de pulso e do tipo de modulação. A escolha da forma de pulso é feita a partir do desempenho espectral do sinal PM a partir da relação

$$P_{sbb}(f) = \frac{\sigma_A^2}{T} |G(f)|^2$$

estabelecida neste capítulo, segundo a qual o espectro de uma sequência aleatória de bits/símbolos branca e de média nula dependem unicamente do espectro da função de pulso  $G(f)$ . O dado mais importante na escolha da forma de pulso é sem dúvida o seu a sua largura de banda relativamente à taxa de transmissão  $R = 1/T$  onde  $T$  é a duração do pulso, de forma a minimizar/anular a interferência intersimbólica (ISI) - critério de *zero forcing*. É introduzida a função *raised cosine* como uma forma possível para a forma de pulso e com propriedades espectrais interessante.

O segundo problema fundamental é o do tipo de modulação e em particular a associação de um símbolo de  $k$  bits a um sinal que pode tomar  $M = 2^k$  níveis diferentes. A este processo é chamado sinalização e depende da modulação escolhida e que por sua vez depende do canal de transmissão, do desempenho esperado e do grau de complexidade disponível no emissor/receptor. Assim são passados em revista os métodos de modulação de amplitude e de fase (ASK e PSK), os métodos que misturam amplitude e fase (QAM e ASK-PSK) e o método de modulação de frequência (FSK). Na última secção do capítulo descrevem-se os passos que o sinal já modulado em banda base para ser colocado em banda passante e as respectivas representações possíveis.

## 8 Receptor óptimo em presença de ruído aditivo

Como já tivemos oportunidade de referir o filtro desmodulador no bloco receptor, constitui o elemento central do sistema de comunicações pois ele permite realizar, para além da colocação em banda base através de uma deslocação em frequência do sinal à saída do canal de transmissão, duas tarefas essenciais:

- eliminar ou pelo menos diminuir a ISI à entrada do amostrador e do decisor trabalhando em conjunto com o filtro emissor e a definição da “função de pulso”.
- aumentar a relação sinal ruído à entrada do decisor e assim diminuir a probabilidade da escolha de um símbolo errado.

Já vimos igualmente que estas duas tarefas, apesar de não serem completamente contraditórias, necessitam o estabelecimento de um compromisso tendo em conta a complexidade prática dos sistema a implementar. O estudo aprofundado da igualização do canal de transmissão para a diminuição da ISI em canais de banda limitada vai ser deixado para a cadeira de Fundamentos de Telecomunicações II. Após a colocação do sinal em banda base, vamos abordar a questão da maximização da probabilidade de detecção à entrada do decisor assumindo que não existe ISI e que o canal é do tipo ruído aditivo Gaussiano e, nesse caso, vamos determinar qual o receptor óptimo. Veremos então que esse receptor óptimo pode ser implementado através do receptor-correlacionador ou filtro adaptado (*matched filter*).

### 8.1 Receptor - desmodulador

O funcionamento de um sistema desmodulador já foi referido anteriormente. É essencialmente constituído por dois blocos: um primeiro bloco que elimina as frequências negativas do sinal passa banda (este bloco é frequentemente chamado 'phase splitter) e um segundo bloco que realiza uma translação em frequência da banda da portadora para a banda base. Este sistema representa uma visão muito simplista do problema pois ignora, por um lado, o ruído de transmissão, e por outro, ignora também que na prática podem existir vários sinais que se encontrem multiplexados em frequência a outras portadoras. Por estas razões o primeiro bloco encontrado no receptor é um filtro de resposta impulsiva  $f(t)$  que, em banda, se escreve  $2f(t) \cos(2\pi f_c t)$ . Três estruturas possíveis para o sistema receptor/desmodulador encontram-se representadas na figura 8.1. A figura 8.1a mostra um sistema desmodulador no qual o sinal recebido em banda  $y(t)$  é primeiro filtrado por um filtro  $f(t)$  passa-banda, depois a sua componente negativa é eliminada no phase splitter e finalmente a componente em banda restante é transferida em banda base através de uma translação em frequência

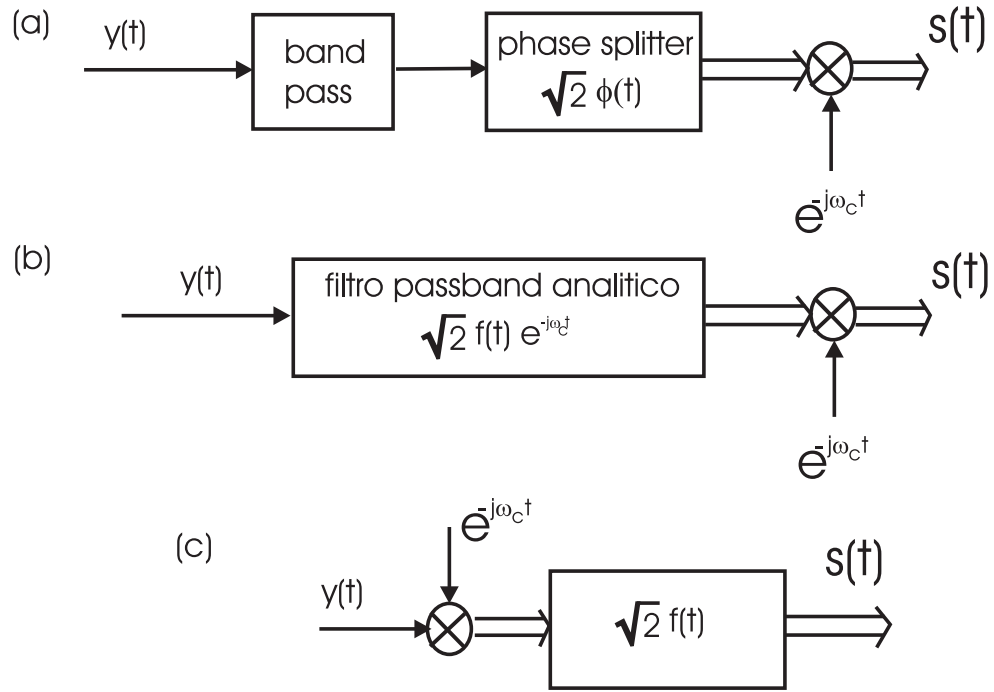


Figura 8.1: um sistema desmodulador PM: filtro-splitter-desmodulador (a), filtro/-splitter-desmodulador (b) e desmodulador-filtro passa baixo (c).

de  $-f_c$ . Na figura 8.1b o filtro passa banda e o phase splitter são agrupados num só bloco resultando num filtro passa banda de resposta impulsiva

$$\sqrt{2}f(t)e^{-j2\pi f_c t} \quad (8-1.1)$$

que só deixa passar as frequências positivas seguido sempre da passagem em banda de base. Este é chamado filtro passabanda analítico. Por último na figura 8.1c, o sinal é primeiramente colocado em banda de base e depois filtrado por um filtro passa baixo. Esta operação, de translação frequencial e filtragem passa-baixo encontra-se representada esquematicamente na figura 8.2. Pode-se facilmente provar que esta terceira estrutura é equivalente às precedentes notando que

$$\begin{aligned} e^{-j\omega_c t} \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) \sqrt{2}f(t-\tau) e^{j2\pi f_c(t-\tau)} d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) e^{-j2\pi f_c \tau} \sqrt{2}f(t-\tau) d\tau \\ &= (e^{-j\omega_c t} y(t)) * (\sqrt{2}f(t)). \end{aligned} \quad (8-1.2)$$

Até agora apenas temos focado o problema da desmodulação. O sinal obtido depois de passagem em banda base necessita igualmente de filtragem obtendo-se sempre um sinal em banda base. Assume-se que a partir daqui teremos um sistema como o da figura 7.1., composto de um amostrador, de um decisor e de um decodificador até recuperar uma estimativa da trama de bits transmitida. Porém existe uma

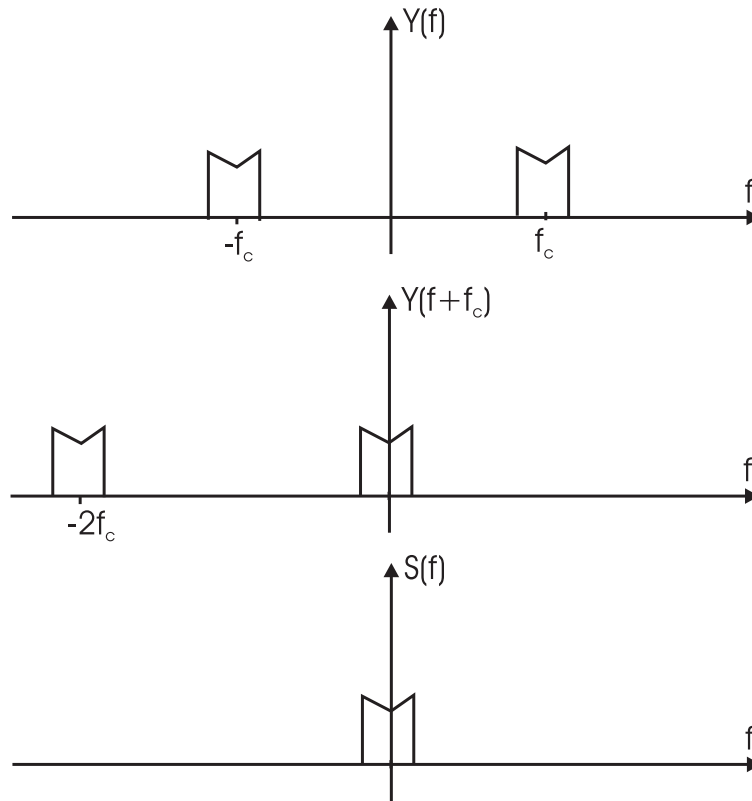


Figura 8.2: operação de desmodulação de um sinal PM com translação em banda base seguida de filtragem passa-baixo.

diferença fundamental decorrente do sistema de modulação/desmodulação que é o facto de que o sinal em banda de base que sai do desmodulador é agora complexo enquanto à partida (no emissor) era real. Este facto irá necessitar no mínimo um amostrador/decisor/descodificador complexo ou então uma separação em quadratura para implementar separadamente a parte real e a parte imaginária.

Para além desta existe uma outra questão que é a do ruído. Vejamos o que se passa à saída  $Z(t)$  de um filtro/desmodulador se aplicarmos à entrada um ruído branco e Gaussiano de densidade espectral  $S_N(\omega) = N_0/2$ . Consideremos, a título de exemplo, a estrutura da figura 8.1b. A densidade espectral da saída do filtro analítico passa banda é

$$S_M(\omega) = N_0 |F(\omega - \omega_c)|^2 \quad (8-1.3)$$

e em seguida a passagem em banda base implica que

$$S_Z(\omega) = S_M(\omega + \omega_c) = N_0 |F(\omega)|^2, \quad (8-1.4)$$

expressão que mais uma vez sugere a diminuição da largura de banda do filtro de recepção para minimizar a potência do ruído na saída.

## 8.2 Equivalente em banda base

Finalmente poderemos dar uma representação equivalente em banda base do transmissor/canal/receptor incluindo a parte de modulação/desmodulação. Este canal

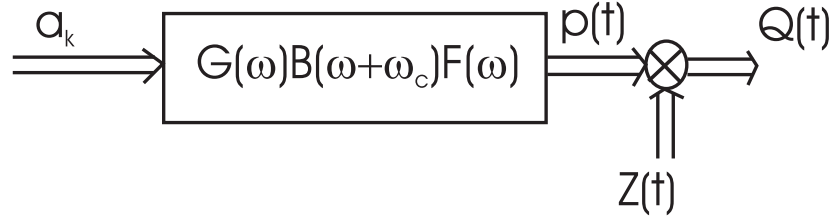


Figura 8.3: esquema bloco do sistema equivalente em banda base.  $Z(t)$  é o ruído  $n(t)$  depois de filtrado pelo receptor e colocado em banda base.

equivalente encontra-se representado na figura 8.3 onde  $a_k$  é a trama de símbolos (complexa) e  $p(t)$  é o sinal à saída do filtro de recepção sendo todo o bloco emissor/canal/receptor representado por

$$P(\omega) = G(\omega)B(\omega + \omega_c)F(\omega), \quad (8-2.1)$$

que é uma expressão semelhante ao equivalente banda de base já encontrado anteriormente, só com a diferença que agora temos  $B(\omega + \omega_c)$  em vez de  $B(\omega)$  para indicar que se trata das propriedades do canal em torno a  $\omega_c$  e não em banda base e também é preciso notar que as  $TF^{-1}$  das quantidades aqui representadas não são necessariamente funções reais e até na grande maioria dos casos serão mesmo complexas. Como anteriormente, de forma a evitar/eliminar a ISI, deveremos escolher o filtro de recepção  $F(\omega)$  tal que

$$F(\omega) = \begin{cases} \frac{P(\omega)}{B(\omega+\omega_c)G(\omega)}, & \forall \omega, \text{ quando } B(\omega + \omega_c)G(\omega) \neq 0 \\ 0, & \forall \omega, \text{ quando } B(\omega + \omega_c)G(\omega) = 0. \end{cases} \quad (8-2.2)$$

como anteriormente  $F(\omega)$  terá um ganho elevado para frequências com fracos valores de  $B(\omega + \omega_c)G(\omega)$ , amplificando o ruído.

Será útil determinar a representação discreta equivalente ao total do sistema de comunicação PM em banda passante, eventualmente utilizando a representação em banda base equivalente ao bloco transmissor/canal/receptor (figura 8.3). Esta representação discreta equivalente encontra-se na figura 8.4 que se abstrai de toda a parte modulação/desmodulação incluindo-a num único bloco de entrada  $A_k$  e saída  $p_k = p(kT)$

Um receptor simples amostra o sinal à taxa de transmissão (assumida síncrona com o emissor, para simplificar) e compara as amostras obtidas com um nível e, a

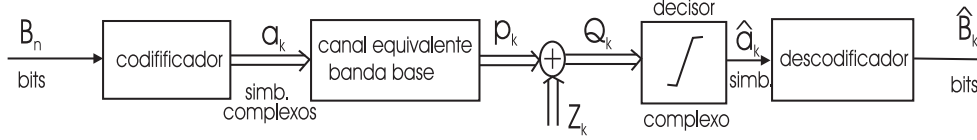


Figura 8.4: sistema PAM em banda passante: equivalente discreto.

partir daí, decide qual dos símbolos se encontra presente. Este receptor simples é geralmente longe do óptimo porque ignora o filtro  $f(t)$ , que deverá ser usado para filtrar as componentes fora da banda do canal de transmissão de forma a minimizar o ruído à entrada do amostrador/decisor. Assim  $f(t)$  (e de alguma forma também  $g(t)$ ) tem um duplo objectivo: por um lado deverá assegurar uma forma de  $p(t)$  que satisfaça "razoavelmente" o critério de Nyquist e que assegure uma ISI nula (ou baixa) e por outro lado que minimize a taxa de ruído. Estes dois objectivos nem sempre (ou quase nunca) podem ser atingidos a 100% e por vezes o tentar manter uma complexidade aceitável limita o desempenho de  $f(t)$  de forma a tornar-se necessário encontrar um compromisso entre ISI e relação sinal/ruído à entrada do decisor. O problema coloca-se frequentemente em termos da dupla minimização do ruído e da ISI ou, alternativamente, na minimização do ruído mantendo uma ISI a um nível aceitável.

Podemos então escrever para o sinal  $p(t)$  à saída do filtro receptor

$$P(\omega) = F(\omega)B(\omega)G(\omega), \quad (8-2.3)$$

e portanto temos que para o filtro  $F(\omega)$

$$F(\omega) = \begin{cases} \frac{P(\omega)}{B(\omega)G(\omega)}, & \forall \omega, \text{ quando } B(\omega)G(\omega) \neq 0 \\ 0, & \forall \omega, \text{ quando } B(\omega)G(\omega) = 0. \end{cases} \quad (8-2.4)$$

O facto de forçar  $F(\omega)$  a zero para toda uma gama de frequências não é restritivo pois nessa mesma gama de frequências  $B(\omega)G(\omega) = 0$  o que quer dizer que o sinal à saída seria zero de qualquer forma. Geralmente a forma de  $G(\omega)$  é determinada por questões de custo e por isso  $F(\omega)$  desempenhará todo o papel na filtragem do ruído e na minimização da ISI. Mais à frente estudaremos quais as implicações do ruído na taxa de erro do decisor, por enquanto não ficaremos surpreendidos se admitirmos que a taxa de erro cresce monotonamente com a diminuição da relação sinal/ruído. Retomando a expressão (7-4.30) do sinal  $q(t)$  à saída do filtro temos que no caso com ISI nula no qual

$$Q_k = A_k + u_k, \quad (8-2.5)$$

onde  $A_k$  é a amostra desejada e  $u_k$  é o ruído  $u(t) = f(t) * n(t)$  filtrado e discretizado, de variância  $\sigma_u^2$ . Assim podemos escrever a SNR à saída do filtro

$$\text{SNR} = \frac{E[|A_k|^2]}{\sigma_u^2}. \quad (8-2.6)$$

É corrente assumir que os símbolos se encontram normalizados, de tal forma que  $E[|A_k|^2] = 1$  e por isso temos que

$$\text{SNR} = \frac{1}{\sigma_u^2}. \quad (8-2.7)$$

Em resumo, podemos dizer que, tendo fixado a forma do pulso  $G(\omega)$ , por um lado  $F(\omega)$  terá que compensar (igualizar) o canal  $B(\omega)$ , segundo (8-2.4), e por outro terá que diminuir a variância do ruído à sua saída, segundo (8-2.7), de forma a aumentar a relação SNR e assim diminuir a taxa de erro. Como já dissemos estes dois objectivos podem ser contraditórios, o que se pode facilmente perceber, por exemplo, para valores de  $\omega$  nos quais  $B(\omega)G(\omega)$  tenha valores próximos de 0, e assim  $F(\omega)$  tome valores muito elevados para os quais o ruído se encontrará fortemente amplificado à saída aumentando assim a probabilidade de erro. O compromisso ISI vs. SNR é um eterno quebra-cabeças no desenho de equalizadores. Em FTEL II estudaremos um tipo de equalizadores chamado equalizador de Viterbi, para o qual se demonstra que permite minimizar, ou por vezes eliminar, esta amplificação do ruído. Este tipo de equalizadores são altamente não lineares.

Tendo em conta o que foi dito nos últimos capítulos poderemos agora introduzir um novo modelo equivalente ao sistema da figura 7.1 no qual o filtro de transmissão, canal e filtro de recepção se encontram juntos num único bloco caracterizado através da sua entrada, a sequência de símbolos  $A_k$  e da sua saída  $p_k$ . Este novo modelo equivalente encontra-se representado na figura 8.5. De notar que visto que tanto a entrada como a saída deste novo filtro são discretos, todo o modelo passa a ser completamente discreto, tanto que

$$p_k = p(kT) = [g(t) * b(t) * f(t)]_{t=kT}, \quad (8-2.8)$$

e a sequência de ruído filtrado (não branco)

$$u_k = u(kT) = [n(t) * f(t)]_{t=kT}. \quad (8-2.9)$$

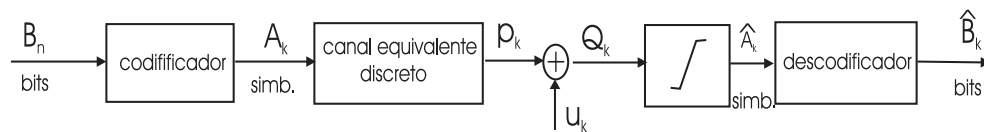


Figura 8.5: sistema discreto equivalente ao sistema PAM em banda base.

### 8.3 O receptor óptimo

Como já foi dito acima, supôr que o sistema não tem ISI é equivalente a supôr que cada pulso (por exemplo num sistema de modulação PAM) é recebido isoladamente e

não tem relação com o seguintes, numa palavra, trata-se de um sistema sem memória. De um modo geral o que se pretende é que dado um determinado sinal recebido

$$r(t) = s_m(t) + w(t), \quad (8-3.1)$$

cujas versão discreta num determinado intervalo de tempo pode ser escrita sob forma vectorial  $\mathbf{r} = \mathbf{s}_m + \mathbf{w}$ , a probabilidade que seja tomada a decisão correcta de que o sinal  $s_m(t)$  se encontra presente seja tomada. Vamos notar essa probabilidade como  $P[\mathbf{s}_m|\mathbf{r}]$ , que por palavras é a probabilidade para que o sinal  $\mathbf{s}_m$  seja escolhido quando o sinal  $\mathbf{r}$  é observado sabendo que  $\mathbf{s}_m$  foi emitido. Esta probabilidade é normalmente designada por probabilidade à posteriori. O critério que consiste em maximizar a probabilidade à posteriori (e que veremos corresponde a minimizar a probabilidade de erro) é denominado o *maximum a posteriori probability (MAP) criterium*. Utilizando a lei de Bayes podemos escrever

$$P[\mathbf{s}_m|\mathbf{r}] = \frac{P[\mathbf{r}|\mathbf{s}_m]P[\mathbf{s}_m]}{P[\mathbf{r}]}, \quad (8-3.2)$$

onde  $P[\mathbf{r}|\mathbf{s}_m]$  é a probabilidade de receber a sequência  $\mathbf{r}$  condicionada no sinal  $\mathbf{s}_m$ . Por oposição  $P[\mathbf{s}_m]$  é normalmente denominada probabilidade à priori. A resolução do problema requer o conhecimento da probabilidade à priori  $P[\mathbf{s}_m]$ . No caso de sinais equiprováveis (frequente na prática), onde  $P[\mathbf{s}_m] = 1/M; m = 1, \dots, M$ , substituindo em (8-3.2) permite obter

$$P[\mathbf{s}_m|\mathbf{r}] = \frac{1}{M} \frac{P[\mathbf{r}|\mathbf{s}_m]}{P[\mathbf{r}]}, \quad (8-3.3)$$

de onde se vê que o problema de encontrar  $\mathbf{s}_m$  que maximiza a probabilidade à posteriori é idêntico ao de maximizar a densidade de probabilidade condicional  $P[\mathbf{r}|\mathbf{s}_m]$ , dado que  $P[\mathbf{r}]$  não depende de  $\mathbf{s}_m$ . É interessante verificar que o critério MAP conduz à maximização da mesma densidade de probabilidade do máximo de verosimilhança, neste sentido  $P[\mathbf{r}|\mathbf{s}_m]$  é denominada função de verosimilhança (ou *likelihood function*). A maximização da função de verosimilhança conduz ao critério de máxima verosimilhança (*maximum likelihood (ML) criterion*). Neste caso, no qual os sinais  $\mathbf{s}_m$  são equiprováveis, os critérios MAP e ML conduzem ao mesmo resultado. Considerando que o ruído aditivo introduzido pelo canal segue uma distribuição gaussiana, podemos notar que cada amostra  $r_k$  do sinal  $r(t)$  tem média  $s_{mk}$  dado que o ruído é de média nula. Assim

$$P[r_k] = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2}} \exp \left[ -\frac{(r_k - s_{mk})^2}{\sigma^2} \right], \quad m = 1, \dots, M \quad (8-3.4)$$

onde  $\sigma^2$  é a variância do ruído e, por conseqüente, a variância de  $r_k$ <sup>6</sup> dado que  $s_{mk}$  é assumido determinístico. Notando que  $\mathbf{r}$  é formado por  $N$  amostras não correlacionadas, podemos escrever a densidade de probabilidade conjunta do vector  $\mathbf{r}$  como

---

<sup>6</sup>nesse caso temos que  $\sigma^2 = N_o/2$ .



o produto das densidades marginais,

$$\begin{aligned} P[\mathbf{r}|\mathbf{s}_m] &= \prod_{k=1}^N P[r_k] \\ &= \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp \left[ -\sum_{k=1}^N \frac{(r_k - s_{mk})^2}{\sigma^2} \right], \quad m = 1, \dots, M \end{aligned} \quad (8-3.5)$$

A partir deste ponto torna-se conveniente escrever a função de verosimilhança utilizando uma função monótona da densidade de probabilidade como por exemplo o logaritmo de (8-3.5) (frequentemente chamada *log-likelihood function*). A partir da equação precedente temos que o log da função de verosimilhança se pode escrever

$$\begin{aligned} \log P[\mathbf{r}|\mathbf{s}_m] &= -\frac{N}{2}(\pi\sigma^2) - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^N (r_k - s_{mk})^2, \quad m = 1, \dots, M \\ &= -\frac{N}{2}(\pi\sigma^2) - \frac{1}{\sigma^2} \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_m\|^2, \quad m = 1, \dots, M \end{aligned} \quad (8-3.6)$$

onde se nota que o primeiro termo é constante e independente de  $\mathbf{s}_m$  e onde a maximização da expressão é equivalente à minimização do segundo termo (por causa do sinal - antes do somatório) em relação a  $\mathbf{s}_m$ . Este segundo termo escreve-se (deprezando a constante multiplicativa),

$$\begin{aligned} C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) &= \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_m\|^2 \quad m = 1, \dots, M \\ &= |\mathbf{r}|^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_m + |\mathbf{s}_m|^2, \quad m = 1, \dots, M \end{aligned} \quad (8-3.7)$$

sendo que o primeiro termo da expressão à direita não depende de  $\mathbf{s}_m$  podemos notar que a minimização de  $C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m)$  é equivalente à maximização de  $C'(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m)$  dada por

$$C'(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) = 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_m - |\mathbf{s}_m|^2, \quad m = 1, \dots, M \quad (8-3.8)$$

onde  $\{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_m; m = 1, \dots, M\}$  é o produto escalar entre os dois vectores  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{s}_m$  para todos os valores de  $m$  ou, por outras palavras, a projecção de  $\mathbf{r}$  no sub espaço vectorial gerado pelos vectores  $\{\mathbf{s}_m; m = 1, \dots, M\}$  e onde o segundo termo  $|\mathbf{s}_m|^2$  representa a energia contida em cada um dos sinais  $s_m(t)$ . O valor de cada uma destas projecções pode ser visto como a correlação entre o sinal recebido  $r(t)$  e cada um dos possíveis sinais emitidos  $s_m(t)$ , e assim  $C'$  pode ser dado por um (chamado) receptor-correlacionador

$$C'(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) = 2 \int_0^T r(t)s_m(t)dt - \mathcal{E}_m \quad m = 1, \dots, M \quad (8-3.9)$$

onde a função de correlação é calculada para o ponto  $\tau = 0$  e em seguida é seleccionado o sinal  $s_m$  para o qual  $C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m)$  é máximo. O receptor óptimo correspondente encontra-se representado na figura 8.6.

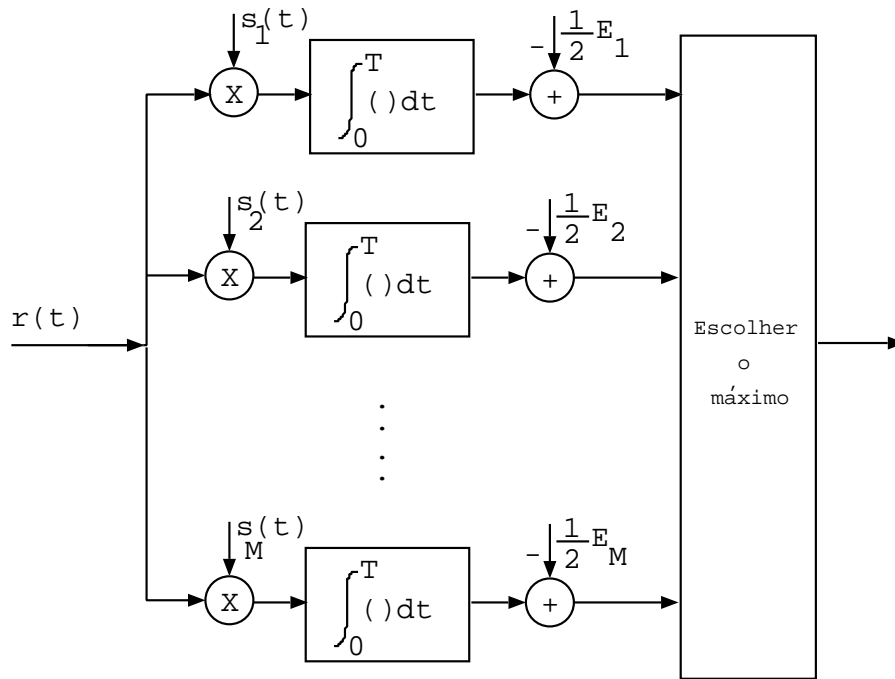


Figura 8.6: receptor correlacionador para  $M$  sinais.

## 8.4 O filtro adaptado como receptor óptimo

A maximização da relação sinal/ruído à saída de um filtro é um problema clássico em teoria do sinal e pode ser transposto para o caso da recepção de mensagens num sistema de comunicação considerando primeiramente que: o sistema se encontra em banda base (ou seu equivalente) e que apenas um símbolo é transmitido, o que significa que não existe ISI. O sinal recebido pode ser então

$$y(t) = A_0 h(t) + n(t), \quad (8-4.1)$$

onde  $A_0$  é o símbolo transmitido,  $h(t)$  é a forma de pulso depois de passada no canal e  $n(t)$  é o ruído suposto aditivo branco e Gaussiano. Neste caso o sinal à saída do filtro de recepção de resposta impulsiva  $f(t)$  escreve-se

$$q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) f(t - \tau) d\tau. \quad (8-4.2)$$

O sinal  $q(t)$  encontra-se depois amostrado ao instante  $t = 0$  (para retirar o símbolo  $A_0$ ) e então

$$Q_0 = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) f(-\tau) d\tau. \quad (8-4.3)$$

Substituindo agora (8-4.1) em (8-4.3) temos

$$Q_0 = A_0 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)f(-\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} n(\tau)f(-\tau)d\tau, \quad (8-4.4)$$

na qual o primeiro termo corresponde ao sinal e o segundo corresponde ao ruído. Intuitivamente o desempenho do nosso decisor será tanto melhor quanto maior for o primeiro termo em relação ao segundo, *i.e.*, quanto maior for a relação SNR à saída do filtro<sup>7</sup>. Esta relação SNR escreve-se

$$\begin{aligned} \text{SNR}_{\text{out}} &= \frac{\text{energia sinal}}{\text{energia ruído}}, \\ &= \frac{E_s}{E_{n_o}}, \end{aligned} \quad (8-4.5)$$

onde ambas as energias são medidas à saída do filtro. A energia do sinal  $E_s$  é dada pela  $E[\cdot]$  do primeiro termo de (8-4.4), *i.e.*,

$$E_s = \sigma_A^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)f(-\tau)d\tau \right|^2, \quad (8-4.6)$$

enquanto a energia do ruído (suposto estacionário e ergódico),  $E_n$ , à saída do filtro é dada por

$$E_n = E[n_0^2] = \langle n_0^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |F(f)|^2 P_n(f) df, \quad (8-4.7)$$

onde  $\langle \cdot \rangle$  indica média temporal e onde o ruído branco  $P_n(f) = \text{cte} = N_0$  e por isso, utilizando de novo o teorema de Parseval

$$E_n = N_0 \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\tau) d\tau. \quad (8-4.8)$$

O problema agora é de determinar de forma única o filtro  $f(t)$  que maximize

$$\text{SNR}_{\text{out}} = \frac{\sigma_A^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)f(-\tau)d\tau \right|^2}{N_0 \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\tau) d\tau}. \quad (8-4.9)$$

A demonstração mais simples passa pela utilização da desigualdade de Schwartz que diz que

$$\left| \int_a^b g_1(x)g_2(x)dx \right|^2 \leq \left[ \int_a^b |g_1(x)|^2 dx \right] \left[ \int_a^b |g_2(x)|^2 dx \right], \quad (8-4.10)$$

---

<sup>7</sup>prova-se com efeito que a probabilidade de detecção é uma função monótona da relação sinal ruído.

onde a igualdade só é verificada quando  $g_2(x) = Kg_1(x)$ ,  $K$  constante. Portanto, utilizando (8-4.10) no numerador de (8-4.9) chegamos à conclusão que o valor máximo do SNR é obtido quando

$$f(t) = Kh(-t). \quad (8-4.11)$$

Este valor do filtro  $f(t)$  é chamado filtro adaptado ou *matched filter*. Mais, quando  $f(t)$  é o *matched filter* então obtemos o valor máximo do SNR que é

$$\text{SNR}_{\max} = \frac{\sigma_A^2 \sigma_h^2}{N_0}, \quad (8-4.12)$$

onde  $\sigma_h^2$  é a energia na função de pulso recebida

$$\sigma_h^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt. \quad (8-4.13)$$

O *matched filter* tem como resposta impulsiva a forma do sinal de entrada revertida no tempo (time-reversal),  $h(-t)$  e a sua TF é  $H^*(\omega)$  isto é o conjugado da forma do sinal de entrada. Podemos assim perceber que a resposta do filtro adaptado igualiza (ou compensa) exactamente a fase do sinal de entrada resultando numa saída que é real e igual a  $|H(\omega)|^2$ . O valor do sinal de saída do filtro adaptado escreve-se a partir de (8-4.3) como

$$Q_0 = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)h(\tau)d\tau, \quad (8-4.14)$$

o que não é mais do que o valor da função de correlação entre a entrada e a forma de pulso esperada para o instante  $t = 0$ . Por isso filtro adaptado é por vezes também chamado receptor-correlador.

Demonstrámos que o filtro adaptado constitui o receptor óptimo de um único impulso em ruído branco e Gaussiano. Este resultado pode ser facilmente generalizado ao caso de uma sucessão de impulsos desde que não exista ISI. Para que tal não aconteça é necessário e suficiente que cada impulso  $h(t)$  do sinal recebido esteja contido num e só num intervalo de símbolo.

## 8.5 O receptor óptimo em banda base

### 8.5.1 Sinalização em banda base

A transmissão de uma trama de bits requer, a escolha dos sinais representativos dos símbolos '0' e '1' - chama-se a isto o processo de sinalização. Vamos supôr que é feita a seguinte sinalização

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow s_0(t) \\ 1 &\rightarrow s_1(t) \end{aligned}$$

no intervalo  $0 \leq t \leq T_b$  onde  $T_b$  é o intervalo de amostragem da trama de bits, i.e.,  $T_b = 1/f_b$ , onde  $f_b$  é a cadência de amostragem da trama de bits. A sequência temporal obtida é modulada, transmitida e na recepção deverá ser efectuada uma detecção, de cada sinal  $s_i(t)$  enviado e a ele associado um bit  $i$ . Vamos supôr que o canal de transmissão é de tipo aditivo e que o ruído pode ser representado por uma sequência aleatória branca e Gaussiana. Assim, o sinal recebido  $y(t)$  pode-se escrever

$$y(t) = s_i(t) + n(t), \quad (8-5.1)$$

O problema no receptor consiste em, com o mínimo erro possível, e partindo de  $\{y(t), 0 \leq t \leq T_b\}$  determinar se um bit '0' ou um bit '1' foi emitido.

### 8.5.2 O receptor óptimo

No caso do problema exposto acima, o receptor óptimo é o receptor-correlacionador ou 'matched-filter'. O receptor-correlacionador é constituído por dois blocos: um multiplicador e um integrador. O receptor-correlacionador (que no caso binário é constituído por dois correlacionadores) implementa a seguinte operação no sinal de entrada

$$r_i(t) = \int_0^t y(\tau) s_i(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq T_b \quad (8-5.2)$$

Quando o sinal  $s_0(t)$  é transmitido obtém-se

$$\begin{aligned} r_0(t) &= A + n_0 \\ r_1(t) &= A_{12} + n_1, \end{aligned} \quad (8-5.3)$$

e quando  $s_1(t)$  é transmitido

$$\begin{aligned} r_0(t) &= A_{12} + n_0 \\ r_1(t) &= A + n_1, \end{aligned} \quad (8-5.4)$$

onde se supõe

$$A = \int_0^{T_b} s_0^2(t) dt = \int_0^{T_b} s_1^2(t) dt \quad \text{e} \quad A_{12} = \int_0^{T_b} s_1(t) s_0(t) dt, \quad (8-5.5)$$

e ainda que

$$n_i = \int_0^{T_b} n(t) s_i(t) dt. \quad (8-5.6)$$

Dado que  $n(t)$  é uma sequência aleatória, branca, Gaussiana de média nula e de variância  $\sigma^2$ , temos que  $n_i$  será também branca e Gaussiana com média

$$E[n_i] = \int_0^{T_b} s_i(t) E[n(t)] dt = 0, \quad (8-5.7)$$

e variância

$$\begin{aligned}
 \sigma_i^2 &= E[n_i^2] \\
 &= \int_0^{T_b} \int_0^{T_b} s_i(t)s_i(\tau)E[n(t)n(\tau)]dtd\tau \\
 &= \sigma^2 \int_0^{T_b} \int_0^{T_b} s_i(t)s_i(\tau)\delta(t-\tau)dtd\tau \\
 &= \sigma^2 \int_0^{T_b} s_i^2(t)dt \\
 &= \sigma^2 A,
 \end{aligned} \tag{8-5.8}$$

e assim, temos que as densidades de probabilidade de  $r_0$  e  $r_1$  quando, por exemplo  $s_0(t)$  é transmitido, se escrevem

$$\begin{aligned}
 p(r_0/s_0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi A}\sigma} \exp[-(r_0 - A)^2/2\sigma^2 A] \\
 p(r_1/s_0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi A}\sigma} \exp[-(r_1 - A_{12})^2/2\sigma^2 A],
 \end{aligned}$$

respectivamente, e que estão representadas na figura 8.7. Obviamente no caso contrário,

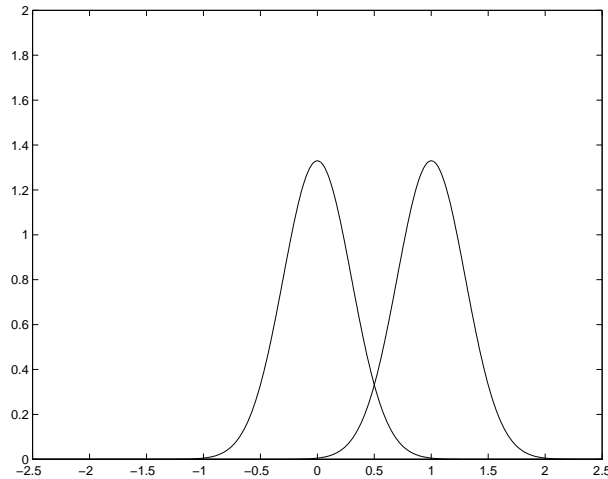


Figura 8.7: densidades de probabilidade para  $r_0$  e  $r_1$  quando  $s_0(t)$  é transmitido.

em que  $s_1(t)$  é transmitido, temos que  $r_0$  terá média  $A_{12}$  e  $r_1$  de média  $A$ , sendo ambas as distribuições de variância  $\sigma^2 A$ .

### 8.5.3 O filtro adaptado (*matched-filter*)

O filtro adaptado do sinal  $\{s(t), 0 \leq t \leq T_b\}$  é um sistema cuja resposta impulsiva é  $s(T_b - t)$ . Assim, a resposta do filtro adaptado ao sinal  $s(t)$  é a convolução de  $s(t)$

com  $s(T_b - t)$ , i.e.,

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t s(\tau)h(t - \tau)d\tau \\ &= \int_0^t s(\tau)s(T_b - t + \tau)d\tau. \end{aligned} \quad (8-5.9)$$

Se a saída de  $x(t)$  for amostrada no instante  $T_b$ , temos que

$$x(T_b) = \int_0^{T_b} s^2(\tau)d\tau = A, \quad (8-5.10)$$

podendo-se concluir que a saída do filtro adaptado amostrado à cadência da trama de bits é igual à saída do receptor-correlacionador.

#### 8.5.4 O detector

O detector é um dispositivo que observa a saída do receptor-correlacionador ou filtro adaptado e decide qual dos dois símbolos, '0' ou '1', foi transmitido. Pretende-se, obviamente, que este processo de decisão tenha o menor erro possível. A probabilidade de erro,  $P_e$ , quando p.ex.  $s_0$  é transmitido, escreve-se como sendo a probabilidade de decidir que  $r_1$  foi recebido quando na realidade foi  $r_0$ , assim podemos dizer que

$$P_e = Prob(r_1 > r_0) = Prob(n_1 + A_{12} > A + n_0) = Prob(n_1 - n_0 > A - A_{12}), \quad (8-5.11)$$

e como  $n_1$  e  $n_0$  são variáveis aleatórias Gaussianas, de média nula, a sua diferença,  $x = n_1 - n_0$  também é Gaussiana de média nula. A variância de  $x$  pode-se calcular através de

$$E[x^2] = E[(n_1 - n_0)^2] = E[n_1^2] + E[n_2^2] - 2E[n_1n_0], \quad (8-5.12)$$

onde  $E[n_i^2] = A\sigma^2$  e

$$\begin{aligned} E[n_1n_0] &= \int_0^{T_b} \int_0^{T_b} s_0(t)s_1(\tau)E[n(t)n(\tau)]dtd\tau \\ &= \sigma^2 \int_0^{T_b} \int_0^{T_b} s_0(t)s_1(\tau)\delta(t - \tau)dtd\tau \\ &= \sigma^2 \int_0^{T_b} s_0(t)s_1(t)dt \\ &= \sigma^2 A_{12}. \end{aligned} \quad (8-5.13)$$

Finalmente

$$E[x^2] = \sigma_x^2 = 2\sigma^2(A - A_{12}), \quad (8-5.14)$$

de onde, utilizando (8-5.11), podemos escrever a probabilidade de erro como

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \int_{A-A_{12}}^{+\infty} e^{-x^2/2\sigma_x^2} dx, \quad (8-5.15)$$

fazendo uma mudança de variável  $u = x/\sigma_x$  obtemos

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{\frac{A-A_{12}}{2\sigma^2}}}^{+\infty} e^{-u^2/2} du = Q\left(\sqrt{\frac{A-A_{12}}{2\sigma^2}}\right). \quad (8-5.16)$$

### 8.5.5 Sinais ortogonais, antipodais e on-off

No processo de sinalização vários conjuntos de sinais podem ser utilizados e as características dos receptor-correlacionador/*matched-filter* serão em cada caso diferentes. Dois sinais  $s_0(t)$  e  $s_1(t)$  são ditos ortogonais no intervalo  $[0, T]$  se

$$\int_0^T s_0(t)s_1(t)dt = 0.$$

Dois sinais são ditos antipodais se

$$s_0(t) = -s_1(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

O tipo de codificação on-off é tal que, p.ex., sejam associados os seguintes sinais

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \text{sem sinal} \\ 1 &\rightarrow s(t), \end{aligned}$$

o que significa que o sinal recebido é do tipo

$$y(t) = \begin{cases} n(t) & \text{um 0 foi transmitido} \\ s(t) + n(t) & \text{um 1 foi transmitido.} \end{cases} \quad (8-5.17)$$

Se um sistema de transmissão utilizar sinais ortogonais temos que  $A_{12} = 0$  o que implica que as médias das densidades de probabilidade  $p(r_1/s_0)$  e  $p(r_0/s_1)$  são ambas nulas. No caso dos sinais antipodais temos que essas mesmas densidades são de média  $-A$  e por isso a diferença média entre as duas densidades é aumentada. As funções de erro são modificadas da mesma forma.

Se em vez disso utilizarmos uma sinalização on-off, temos que as distribuições são semelhantes às do caso dos sinais ortogonais, a probabilidade de erro é portanto mais elevada do que no caso antipodal mas temos a considerar que existe um ganho de 2 na potência a transmitir, visto que só é transmitido um sinal em cada 2 bits, em média se um bit '0' tiver a mesma probabilidade que um bit '1'.



### 8.5.6 Sinalização multinível

A técnica mais utilizada em transmissão de informação através de modulação de impulsos (PM), é chamada sinalização multinível e tem como particularidade utilizar uma única forma de impulso que toma um nível diferente (dentro de um número de níveis finito possíveis) para cada símbolo a transmitir. No caso geral temos um sinal do tipo

$$s_m(t) = A_m g(t), \quad 0 \leq t \leq T_s, \quad m = 0, 1, \dots, M - 1 \quad (8-5.18)$$

onde as amplitudes  $A_m$  são dadas por

$$A_m = (2m - M + 1)d, \quad m = 0, 1, \dots, M - 1$$

$g(t)$  é um impulso rectangular e o número de níveis  $M$  é dado por  $M = 2^k$ ,  $k$  inteiro. O período  $T_s$  é geralmente chamado taxa de símbolo (ou *symbol rate*) enquanto a taxa de bit (ou *bit rate*)  $T_b$  é dada por  $T_b = T/k$ , i.e., a sinalização multiníveis permite enviar  $k$  vezes mais informação que um método de sinalização simples. O que nos interessa aqui porém, é a forma do sistema detector óptimo, se ele existe. Na verdade existe, pelo menos para o caso de ruído branco e Gaussiano, e é dado pelo receptor-correlacionador tal como no caso do nível simples. É fácil de provar que a saída do receptor-correlacionador para o sinal de nível  $s_i(t)$  é

$$r(t) = A_i + n(t), \quad (8-5.19)$$

enquanto a densidade de probabilidade se escreve

$$p(r|s_i(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp -[(r - A_i)^2/2\sigma^2], \quad (8-5.20)$$

onde  $A_i$  é um dos valores de entre os  $M$  possíveis. Prova-se neste caso que a probabilidade de erro do detector PM óptimo de  $M$  níveis se escreve

$$P_e = \frac{2(M - 1)}{M} Q \left[ \sqrt{\frac{(6 \log_2 M) A_{avg}}{(M^2 - 1)\sigma^2}} \right], \quad (8-5.21)$$

onde  $A_{avg}$  é a energia média de um bit de informação.

### Resumo do capítulo 8:

O receptor é abordado do ponto de vista do seu carácter óptimo, começando pelo desmodulador, depois pela representação em banda base. A derivação formal do receptor óptimo a partir da maximização da probabilidade à posteriori (MAP) de obter um determinado sinal em ruído Gaussiano aditivo, sabendo que ele foi emitido, leva directamente ao receptor - correlacionador. Desmonstra-se ainda que o

resultado é idêntico aquele obtido pelo critério de máxima verosimilhança (ML) - no caso Gaussiano. Por último demonstra-se que o mesmo resultado pode ser obtido / implementado por um filtro adaptado que ele é independente da distribuição do ruído. Finalmente estabelece-se um caso de aplicação simples (depois revisto em TP) a partir da sinalização - ortogonal, antipodal e on-off - o receptor óptimo, densidade de probabilidade de detecção e de erro para cada caso.

# A Tabelas e relações particulares

## A.1 Transformada de Fourier

- 67 -  
Table III : Paires de Transformées de Fourier

	Fonctions du Temps, $f(t)$		Fonctions de Fréquence, $F(\omega)$
1	$\frac{1}{\tau} p_{1/2}(t) = \frac{1}{\tau} [u_1(t + \frac{\tau}{2}) - u_1(t - \frac{\tau}{2})]$ $= \frac{1}{\tau} \text{rect}(\frac{t}{\tau})$		 $\frac{\sin(\frac{\tau\omega}{2})}{(\frac{\tau\omega}{2})} = \frac{\sin \tau\pi f}{\tau\pi f}$ $= \text{sinc}(\tau f)$
2	$\frac{1}{\tau} \text{sinc}(\frac{t}{\tau}) = \frac{1}{\tau} \frac{\sin(\pi \frac{t}{\tau})}{(\pi \frac{t}{\tau})}$		 $p_{1/\tau}(\omega) = \text{rect}(\frac{\omega}{2\pi/\tau})$ $= \text{rect}(\tau f)$
3	$q_{\tau}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau} - \frac{ t }{\tau^2}, &  t  < \tau \\ 0, &  t  > \tau \end{cases}$		 $\frac{\sin^2(\frac{\tau\omega}{2})}{(\frac{\tau\omega}{2})^2}$
4	$\frac{1}{\tau} \frac{\sin^2(\frac{\pi t}{\tau})}{(\frac{\pi t}{\tau})^2}$		 $q_{1/2\tau}(\omega) = \begin{cases} 1 - \frac{ \omega }{2\pi/\tau}, &  \omega  < \frac{2\pi}{\tau} \\ 0, &  \omega  > \frac{2\pi}{\tau} \end{cases}$
5	$\frac{1}{\tau\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t}{\tau})^2}$		 $e^{-\frac{1}{2}(\tau\omega)^2}$
6	$\frac{2}{\pi\tau} \sqrt{1 - (\frac{t}{\tau})^2},  t  < \tau$ $0,  t  > \tau$		 $\frac{2 J_1(\omega\tau)}{(\omega\tau)}$
7	$\alpha e^{-\alpha t} u_1(t)$		 $\frac{\alpha}{\alpha + j\omega}$
8	$\frac{\alpha}{2} e^{-\alpha t }$		 $\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \omega^2}$
9	$\frac{(\alpha/\pi)}{1 + \alpha^2 t^2}$		 $e^{-\frac{ \omega }{\alpha}}$
10	$\alpha^2 t e^{-\alpha t} u_1(t)$		 $\frac{\alpha^2}{(\alpha + j\omega)^2}$
11	$e^{-\alpha t} \sin \beta t \cdot u_1(t)$		 $\frac{\beta}{(\alpha^2 + \beta^2) - \omega^2 + j 2\alpha\omega}$
12	$e^{-\alpha t} [\cos \beta t - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t] u_1(t)$		 $\frac{j\omega}{(\alpha^2 + \beta^2) - \omega^2 + j 2\alpha\omega}$

Table III (Suite)

	Fonctions du Temps, $f(t)$	Fonctions de Fréquence, $F(\omega)$		
13.	$\text{sgn } t = \frac{t}{ t }$			$\frac{2}{j\omega}$
14.	$\frac{1}{jt}$			$-\pi \text{sgn } \omega$
15.	$u_1(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn } t$			$\pi u_0(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
16.	$u_0(t)$ $u_0^{(n)}(t) \triangleq \frac{d^n u_0(t)}{dt^n}$			$\frac{1}{(j\omega)^n}$
17.	$\frac{t}{t^n}$			$\frac{2\pi u_0(\omega)}{2\pi j^n u_0^{(n)}(\omega)}$
18.	$u_1(t) * \frac{1}{T} P_{T/2}(t)$			$\pi u_0(\omega) + \frac{2 \sin(\omega T/2)}{j T \omega^2}$
19.	$\cos \omega_0 t$			$\pi [u_0(\omega + \omega_0) + u_0(\omega - \omega_0)]$
20.	$\sin \omega_0 t$			$j\pi [u_0(\omega + \omega_0) - u_0(\omega - \omega_0)]$
21.	$[\cos \omega_0 t] \cdot u_1(t)$			$\frac{\pi}{2} [u_0(\omega + \omega_0) + u_0(\omega - \omega_0)] + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$
22.	$[\sin \omega_0 t] \cdot u_1(t)$			$j\frac{\pi}{2} [u_0(\omega + \omega_0) - u_0(\omega - \omega_0)] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$
23.	$\sum_{-\infty}^{\infty} u_0(t - nT)$			$\omega_0 \sum_{-\infty}^{\infty} u_0(\omega - n\omega_0)$ ( $\omega_0 T = 2\pi$ )
24.	Fonction Périodique $f(t) = f(t + T) = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{jn\omega_0 t}$ $\alpha_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$			$2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n u_0(\omega - n\omega_0)$

## A.2 Relações Trigonométricas Usuais

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 & \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2} & \sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} \\ \sin x &= \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} & \cos x &= \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} & \tan x &= \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{j(e^{jx} + e^{-jx})} \end{aligned}$$

### Adição

$$\begin{aligned} \sin(a + b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a & \sin(a - b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a \\ \cos(a + b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b & \cos(a - b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \tan(a + b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} & \tan(a - b) &= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \end{aligned}$$

**Multiplicação:** com  $\tan a = t$

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} = \frac{2t}{1 - t^2}$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)] \quad \sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p + q}{2} \cos \frac{p - q}{2} \quad \cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p + q}{2} \sin \frac{p - q}{2}$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p + q}{2} \cos \frac{p - q}{2} \quad \sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p - q}{2} \cos \frac{p + q}{2}$$

$$\tan p + \tan q = \frac{\sin(p + q)}{\cos p \cos q} \quad \tan p - \tan q = \frac{\sin(p - q)}{\cos p \cos q}$$

### Trigonometria Hiperbólica

$$\cosh x + \sinh x = \exp(x) \quad \cosh x - \sinh x = \exp(-x) \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\begin{aligned}
\sinh(a+b) &= \sinh a \cosh b + \sinh b \cosh a & \sinh(a-b) &= \sinh a \cosh b - \sinh b \cosh a \\
\cosh(a+b) &= \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b & \cosh(a-b) &= \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \\
\sinh 2a &= 2 \sinh a \cosh a & \cosh 2a &= \cosh^2 a - \sinh^2 a = 1 + 2 \sinh^2 a = 2 \cosh^2 a - 1 \\
\cosh^2 a &= \frac{1 + \cosh 2a}{2} & \sinh^2 a &= \frac{\cosh 2a - 1}{2} & \tanh^2 a &= \frac{\cosh 2a - 1}{\cosh 2a + 1} \\
& & \tanh 2a &= \frac{2 \tanh a}{1 + \tanh^2 a} \\
\sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} & \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} & \tanh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\
\cosh jx &= \cos x & \sinh jx &= j \sin x & \tanh jx &= j \tan x
\end{aligned}$$

### A.3 Desenvolvimentos em série

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1} \epsilon(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n} \epsilon(x)$$

$$\tan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5 \epsilon(x)$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n-1} \epsilon(x)$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n} \epsilon(x)$$

$$\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5 \epsilon(x)$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{1.3.5 \dots (2n+1)}{2.4.6 \dots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - x^{2n+1} \epsilon(x)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1} \epsilon(x)$$

$$\sinh^{-1} x = x - \frac{x^3}{6} + \dots + (-1)^n \frac{1.3.5 \dots (2n+1)}{2.4.6 \dots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1} \epsilon(x)$$

$$\tanh^{-1} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1} \epsilon(x)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \epsilon(x)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^n \epsilon(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1) \frac{x^2}{2} + \dots + \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1) \frac{x^n}{n} + x^n \epsilon(x)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + x^n \epsilon(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + x^n \epsilon(x)$$

## A.4 Algumas relações úteis

### A.4.1 Integrais

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_0^\infty x e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a}$$

$$\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^{3/2}}$$

$$\int_0^\infty x^3 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a^2}$$

$$\int_0^\infty x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{3}{8a^2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

### A.4.2 Séries

Geométrica:  $u_1 + qu_1 + q^2u_1 + \dots + q^{n-1}u_1 = u_1 \frac{1-q^n}{1-q}$

Aritmética:  $u_1 + qu_1 + 2qu_1 + \dots + (n-1)qu_1 =$

### A.4.3 Derivadas

$$[a^{f(x)}]' = \log a a^{f(x)} f'(x)$$

### A.4.4 Trigonometria do círculo

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan x$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$\infty$
$\cot x$	$\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0

## B Estimação espectral

### B.1 Caracterização de estimadores

Importa aqui fazer uma pausa para fazer uma breve introdução à teoria da estimação definindo alguns termos usualmente utilizados nessa área da teoria do sinal. Um estimador é em geral uma função determinística de processos aleatórios e por isso é ele mesmo um processo aleatório. Assim a caracterização de um estimador só pode ser feita de forma estatística. Em particular é habitual definir-se a esperança matemática ou viés, a variância e/ou o erro quadrático médio de um estimador.

**B.1.0.1 Viés:** o valor esperado de um estimador  $\hat{\theta}$  de uma variável  $\theta$  é dado por  $E[\hat{\theta}]$ . Um estimador para o qual  $E[\hat{\theta}] = \theta$ , ou seja, para o qual o valor médio é igual ao valor verdadeiro, é dito não enviesado. Se, pelo contrário,  $E[\hat{\theta}] = \theta + b$ ,  $b$  é chamado o viés do estimador  $\hat{\theta}$ . Se o estimador depender de um número de amostras  $N$  e se tivermos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E[\hat{\theta}] = 0,$$

diz-se que o estimador é assintoticamente não enviesado.

**B.1.0.2 Variância:** a variância de um estimador é dada por  $V[\hat{\theta}] = E[(\hat{\theta} - E[\hat{\theta}])^2]$ . Se o estimador for não enviesado, então temos que  $V[\hat{\theta}] = E[(\hat{\theta} - \theta)^2]$ .

**B.1.0.3 Erro quadrático médio (*MSE* - *mean square error*):** o erro quadrático médio é dado por  $\text{MSE}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2]$ , de onde se depreende que para um estimador não enviesado temos que  $V[\hat{\theta}] = \text{MSE}[\hat{\theta}]$ .

### B.2 Estimadores para a correlação

Na prática, muito raramente poderemos calcular a DEP usando (2-3.10), pois esta necessita o conhecimento prévio de  $r_{xx}(\tau)$  que é a função de autocorrelação dada por

$$r_{xx}(\tau) = E[x(t + \tau)x^*(t)]. \quad (\text{B-2.1})$$

O cálculo do valor esperado necessitaria, em princípio, um número infinito de realizações do processo  $x(t)$ , o que na prática é irrealizável. Em vez disso, tenta-se substituir a média estatística de conjunto, por uma média temporal mediante a hipótese de ergodicidade. Para poder substituir a autocorrelação por uma função calculada a



partir da média temporal, será necessário também que o sinal seja estacionário até ao quarto momento. Assim um primeiro estimador óbvio para a autocorrelação num intervalo finito  $T$  pode ser

$$\hat{r}_{xx}^{(1)}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^{T-\tau} x(t+\tau)x^*(t)dt, \quad 0 \leq \tau \leq T_m, \text{ com } T_m \leq T. \quad (\text{B-2.2})$$

Devido às propriedades de paridade da função de correlação, a expressão (B-2.2) pode ser estendida para valores  $-T \leq \tau \leq 0$ , fazendo  $r_{xx}^{(1)}(-\tau) = r_{xx}^{(1)}(\tau)$ , e portanto o estimador é forçosamente uma função limitada no intervalo  $[-T, T]$ , quando  $T$  é o intervalo de observação do sinal  $x(t)$ . No intuito de calcular o viés deste estimador, prova-se facilmente que

$$\begin{aligned} E[\hat{r}_{xx}^{(1)}(\tau)] &= \frac{1}{T} \int_0^{T-\tau} E[x(t+\tau)x^*(t)]dt, & 0 \leq \tau \leq T \\ &= \frac{T-\tau}{T} r_{xx}(\tau), & 0 \leq \tau \leq T \\ &= r_{xx}(\tau)q_{2T}(\tau), & 0 \leq \tau \leq T \end{aligned} \quad (\text{B-2.3})$$

onde  $q_{2T}(\tau)$  é a função triangular

$$q_{2T}(\tau) = \frac{T-|\tau|}{T}, \quad -T \leq \tau \leq T \quad (\text{B-2.4})$$

de amplitude unitária, abrangendo o intervalo  $[-T, T]$  e resultante da correlação entre as funções de observação rectangulares  $[0, T]$  do sinal  $x(t)$ . Podemos portanto dizer que  $\hat{r}_{xx}^{(1)}(\tau)$  é um estimador enviesado de  $r_{xx}(\tau)$ . No entanto, torna-se fácil ver que se trata de um estimador assintoticamente não enviesado (consistente) em relação à média já que

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} E[\hat{r}_{xx}^{(1)}(\tau)] &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) r_{xx}(\tau) \\ &= r_{xx}(\tau). \end{aligned}$$

Prova-se ainda que para muitos sinais utilizados na prática este estimador apresenta um erro médio quadrático (*mean square error* ou MSE) inferior a um segundo estimador não enviesado e também muito utilizado que é

$$\hat{r}_{xx}^{(2)}(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} x(t+\tau)x^*(t)dt, \quad 0 \leq \tau \leq T_m, \text{ com } T_m \leq T \quad (\text{B-2.5})$$

da mesma forma que em (B-2.3) pode-se provar que a esperança matemática deste estimador se escreve

$$E[\hat{r}_{xx}^{(2)}(\tau)] = r_{xx}(\tau)p_{2T}(\tau), \quad (\text{B-2.6})$$

onde  $p_{2T}(\tau)$  é uma função porta de amplitude unitária abrangendo o intervalo  $[-T, T]$ . Podemos dizer, neste caso, que  $\hat{r}_{xx}^{(2)}(\tau)$  é um estimador não enviesado de  $r_{xx}(\tau)$  no

intervalo  $[-T, T]$ . Neste caso, visto que o estimador é não enviesado,  $MSE[\hat{r}_{xx}^{(2)}(\tau)] = V[\hat{r}_{xx}^{(2)}(\tau)]$ . No entanto o cálculo de  $V[\hat{r}_{xx}^{(2)}(\tau)]$  é bastante complexo pois envolve o cálculo de momentos de  $x(t)$  até à ordem 4. Trata-se de um estimador consistente, no que diz respeito à média, pois

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E[\hat{r}_{xx}^{(2)}(\tau)] = r_{xx}(\tau). \quad (\text{B-2.7})$$

### Caso discreto

No caso discreto a expressão da função de autocorrelação equivalente a (B-2.1) escreve-se

$$r_{xx}[m] = E\{x[k+m]x^*[k]\}, \quad (\text{B-2.8})$$

sendo que a sequência discreta  $x[k]$  é considerada estacionária e ergódica. Esta relação pode-se escrever

$$r_{xx}[m] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-m} x[n+m]x^*[n]. \quad (\text{B-2.9})$$

Visto que na prática não dispomos de um intervalo de observação infinito, para nos libertarmos do limite teremos de nos contentar com uma estimativa  $\hat{r}_{xx}[m]$  de  $r_{xx}[m]$ . As duas formas clássicas de estimar a função de autocorrelação correspondentes à forma enviesada (B-2.2) e à forma não enviesada (B-2.5) são no caso discreto, respectivamente

$$\hat{r}_{xx}^{(1)}[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-m} x[n+m]x^*[n], \quad m = 0, \dots, N-1 \quad (\text{B-2.10})$$

enquanto que a forma não enviesada é dada por

$$\hat{r}_{xx}^{(2)}[m] = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} x[n+m]x^*[n], \quad m = 0, \dots, N-1. \quad (\text{B-2.11})$$

Como a forma enviesada não garante uma DEP definida positiva, i.e., podem-se obter estimativas negativas da DEP, a forma não enviesada é em geral preferida. Como no caso contínuo, ambas as formas são simétricas em relação a  $m = 0$ . Sem estarmos a repetir o que já foi dito anteriormente podemos resumidamente lembrar que (B-2.10) tem um viés dado pela função triangular  $q_{2N}[m]$ , de base  $2N$

$$q_{2N}[m] = \frac{N - |m|}{N}, \quad (\text{B-2.12})$$

mas esse viés desaparece assintoticamente pois  $E\{\hat{r}_{xx}^{(1)}[m]\} \rightarrow r_{xx}[m]$  quando  $N \rightarrow \infty$ ; é também um estimador consistente pois que a variância diminui quando o número

de amostras aumenta. Para o estimador não enviesado dado por (B-2.11), nota-se que também é consistente, pois a sua variância diminui quando o número de amostras aumenta. Porém demonstra-se que

$$V\{\hat{r}_{xx}^{(1)}[m]\} = q_{2N}[m]V\{\hat{r}_{xx}^{(2)}[m]\}, \quad (\text{B-2.13})$$

o que indica que o erro quadrático médio de  $\hat{r}_{xx}^{(2)}[m]$  (dado que é um estimador sem viés) tende a ser superior ao de  $\hat{r}_{xx}^{(1)}[m]$ , sobretudo quando  $m \rightarrow N$ . Por esta última razão e, apesar do viés, muitos autores preferem utilizar (B-2.10) do que (B-2.11).

## B.3 Estimadores espectrais

### B.3.1 Método do correlograma

Visto que, em presença de sequências finitas de sinais aleatórios, só é possível obter um estimador da função de autocorrelação, só podemos também obter uma estimativa da DEP de um sinal por aplicação directa do teorema de Wiener-Khintchine. Este tipo de estimador espectral é chamado *correlograma* pois baseia-se na TF de uma estimativa da função de correlação [6]. Baseando-nos nos dois estimadores da função de autocorrelação propostos no capítulo anterior podemos escrever

$$\hat{P}_{xx}^{(1)}(f) = \int_0^{T_m} \hat{r}_{xx}^{(1)}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau, \quad (\text{B-3.1})$$

e que

$$\hat{P}_{xx}^{(2)}(f) = \int_0^{T_m} \hat{r}_{xx}^{(2)}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau. \quad (\text{B-3.2})$$

No intuito de determinar o viés destes estimadores espectrais e, usando (B-2.3) e (B-2.6), respectivamente, em (B-3.1) e em (B-3.2), podemos facilmente escrever

$$E[\hat{P}_{xx}^{(1)}(f)] = P_{xx}(f) * \text{TF}[q_{2T}(\tau)] \quad (\text{B-3.3})$$

$$E[\hat{P}_{xx}^{(2)}(f)] = P_{xx}(f) * \text{TF}[p_{2T}(\tau)], \quad (\text{B-3.4})$$

onde as TF's da função porta e triangular já foram calculadas anteriormente. A partir de (B-3.3) e (B-3.4) podemos deduzir que ambos estimadores  $\hat{P}_{xx}^{(1)}(f)$  e  $\hat{P}_{xx}^{(2)}(f)$  são enviesados apesar de só uma das autocorrelações o ser. No entanto, tendo em conta as formas em  $\sin x/x$  das TF's de  $p_{2T}(\tau)$  e  $q_{2T}(\tau)$ , podemos dizer que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E[\hat{P}_{xx}^{(1)}(f)] = P_{xx}(f), \quad (\text{B-3.5})$$

e que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E[\hat{P}_{xx}^{(2)}(f)] = P_{xx}(f), \quad (\text{B-3.6})$$

o que significa, que para um intervalo de observação suficientemente longo, os dois estimadores produzem resultados sensivelmente iguais e consistentes em relação à média. Pode-se provar ainda que a variância não diminui quando  $T$  aumenta e portanto ambos estimadores são inconsistentes em relação à variância. Assim, por exemplo, prova-se que para qualquer  $T$

$$V[P_{xx}^{(2)}(f)] \geq E[P_{xx}^{(2)}(f)]^2. \quad (\text{B-3.7})$$

A razão deste facto é que os valores de  $r_{xx}(\tau)$  tem uma grande variância para  $\tau$  próximo de 0 e de  $T$ . Isto não depende do valor de  $T$ , e a única alternativa para reduzir a variância dos estimadores é de incluir janelas (*windows*) de observação, com formas particulares, destinadas a diminuir o impacto das amostras junto aos extremos do intervalo de observação.

### Caso discreto

No caso discreto basta calcular a TF da função de autocorrelação discreta que se escreve então

$$\hat{P}_{xx}^{(1)}(\omega) = \sum_{m=-M}^M \hat{r}_{xx}^{(1)}[m] e^{-j\omega m}, \quad (\text{B-3.8})$$

para o estimador enviesado (B-2.10). Como no caso contínuo podemos escrever

$$E[\hat{P}_{xx}^{(1)}(\omega)] = Q_{2N}(\omega) * P_{xx}(\omega), \quad (\text{B-3.9})$$

onde  $Q_{2N}(\omega)$  é a TF da função triangular (B-2.12), o que indica que este estimador do correlograma é também enviesado. Mais interessante é que se utilizarmos o estimador não enviesado da função de autocorrelação (B-2.11) então obtemos

$$\hat{P}_{xx}^{(2)}(\omega) = \sum_{m=-M}^M \hat{r}_{xx}^{(2)}(m) e^{-j\omega m}, \quad M \leq N \quad (\text{B-3.10})$$

de onde se demonstra facilmente que

$$E[\hat{P}_{xx}^{(2)}(\omega)] = P_{2M}(\omega) * P_{xx}(\omega), \quad (\text{B-3.11})$$

onde  $P_{2M}(\omega)$  é a TF da função porta implicitamente utilizada na observação da série temporal num intervalo finito. Quando  $N \rightarrow \infty$  as TF de  $q_{2N}$  e de  $p_{2N}$  ambas tendem para um Dirac (ver sebenta de SS), o que significa que nesse caso temos que a estimativa da DEP tende para o verdadeiro valor e podemos dizer que apesar de enviesadas ambos estimadores são assintoticamente não enviesados. Porém, existe uma grande diferença entre (B-3.8) e (B-3.10) que é o facto da TF de  $q_{2N}$  ser sempre  $\geq 0$  enquanto a de  $p_N$  poder ser negativa, resultando a primeira numa DEP sempre positiva enquanto a segunda pode resultar nalguns pontos numa DEP negativa o que é bastante inconsistente com a definição de potência. Na prática costuma-se utilizar valores de  $M$  bastante inferiores a  $N$  de modo a evitar as fortes oscilações devidas a um aumento do erro quadrático médio como já foi referido. Apesar de a estimada da função de autocorrelação ser assintoticamente não enviesada e consistente isso não significa que a DEP o seja.

### B.3.2 Método do periodograma

Em Sistemas e Sinais mencionámos que outro caminho possível para obter a densidade espectral de potência de um sinal determinístico seria através do cálculo do módulo ao quadrado da sua TF. Quando o sinal é aleatório, do ponto de vista teórico, a sua TF não existe visto que o integral da TF não converge com probabilidade 1. No entanto, num intervalo temporal de observação limitado  $T$ , a probabilidade de falta de convergência é praticamente nula e assim  $X(f)$ , e portanto a DEP é dada por

$$P_{xx}^T(f) = |X_T(f)|^2, \quad (\text{B-3.12})$$

onde o índice  $T$  indica que a observação do sinal é limitada ao tempo  $T$ . Este método de cálculo directo toma o nome de *sample mean*, e foi utilizado durante alguns anos, apesar de dar resultados inconsistentes (ver caso discreto abaixo). Na realidade pode-se provar que a relação que permite obter um resultado equivalente ao do correlograma é o chamado periodograma de Schuster (*Schuster's periodogram*), dado por

$$P_{xx}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[ \frac{1}{T} \left| \int_0^T x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right|^2 \right], \quad (\text{B-3.13})$$

e que não é mais do que dizer que a DEP do sinal  $x(t)$  é igual à esperança matemática do módulo ao quadrado da TF de  $x(t)$  calculada num intervalo suficientemente longo. Nota-se que, à parte a duração do intervalo, a diferença essencial em relação a (B-3.12) é a introdução da esperança matemática. Podemos efectivamente ver que a relação (B-3.13) se deduz do correlograma da seguinte forma. Desdobrando o módulo ao quadrado a partir de (B-3.13) temos que,

$$\begin{aligned} P_{xx}(f) &= \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[ \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T x(t_1) x^*(t_2) e^{-j2\pi f(t_1-t_2)} dt_1 dt_2 \right], \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T E[x(t_1) x^*(t_2)] e^{-j2\pi f(t_1-t_2)} dt_1 dt_2, \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T r_{xx}(t_1 - t_2) e^{-j2\pi f(t_1-t_2)} dt_1 dt_2, \end{aligned} \quad (\text{B-3.14})$$

onde utilizando a útil integral dupla

$$\int_a^b \int_a^b g(t_1 - t_2) dt_1 dt_2 = (b - a) \int_{a-b}^{b-a} \left( 1 - \frac{|t|}{b-a} \right) g(t) dt, \quad (\text{B-3.15})$$

mencionada em [9] (pag. 115 e seguintes), podemos escrever (B-3.14)

$$P_{xx}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \left( 1 - \frac{|t|}{T} \right) r_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau. \quad (\text{B-3.16})$$

Quando  $T \rightarrow \infty$  a função triangular aproxima-se cada vez mais de uma constante, fazendo com que

$$P_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} r_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau, \quad (\text{B-3.17})$$

o que não é mais do que a densidade espectral de potência obtida através do correlograma (teorema de Wiener-Khintchine).

### Caso discreto

A implementação do periodograma no caso discreto faz-se substituindo a TF limitada no tempo pela TFDT também limitada no tempo ou simplesmente pela TFD. Assim a relação (B-3.12) no caso discreto escreve-se

$$P_{xx}^N(f) = \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi fn} \right|^2, \quad (\text{B-3.18})$$

onde agora o índice  $N$  indica uma limitação temporal a  $N$  amostras. Claro que esta relação sofre do mesmo problema de instabilidade do que no caso contínuo. Utilizando a mesma demonstração do que no caso contínuo, prova-se que a DEP dado por

$$P_{xx}(f) = \lim_{N \rightarrow \infty} E \left[ \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi fn} \right|^2 \right], \quad (\text{B-3.19})$$

permite obter efectivamente uma relação idêntica aquela obtida pela TFD da autocorrelação. Para verificar a inconsistência do *sample-mean* como estimador da DEP, torna-se necessário mencionar alguns resultados respeitantes à sua variância e covariância. Vamos dar o resultado sem demonstração que, apesar de não ser complicada, é um pouco morosa e pode ser encontrada em textos da especialidade, p.ex. em Therrien [10].

### B.3.3 Periodograma de Daniell

Neste primeiro método proposto por Daniell (1946), cada frequência  $\omega_i$  do estimador espectral  $\hat{P}_{xx}^D(f)$  é obtida como a média de  $2P$  frequências adjacentes,

$$\hat{P}_{xx}^D(f_i) = \frac{1}{2P+1} \sum_{n=i-P}^{i+P} \hat{P}_{xx}^N(f_{i+n}), \quad i = P, \dots \quad (\text{B-3.20})$$

onde  $P_{xx}^N(f)$  é dado por (B-3.18), para o caso discreto. Isto é efectivamente equivalente a filtrar  $P_{xx}^N(f)$  por um filtro passa-baixo do tipo média móvel e de função de transferência  $H(f)$ ,

$$\hat{P}_{xx}^D(f) = H(f) * \hat{P}_{xx}^N(f). \quad (\text{B-3.21})$$

Calculando a TF inversa de ambos os termos de (B-3.20) obtem-se

$$\begin{aligned}
\hat{r}_{xx}^D(\tau) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2P+1} \sum_{n=0}^{2P} P_{xx}^N[(i+n)\Delta f] e^{j2\pi i\Delta f\tau}, \quad i = 0, \dots \\
&= \frac{1}{2P+1} \sum_{n=0}^{2P} \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_{xx}^N[k\Delta f] e^{j2\pi k\Delta f\tau} e^{-j2\pi n\Delta f\tau}, \quad i = 0, \dots \\
&= \frac{1}{2P+1} \sum_{n=0}^{2P} \hat{r}_{xx}^N(\tau) e^{-j2\pi n\Delta f\tau}, \\
&= \hat{r}_{xx}^N(\tau) \frac{1}{2P+1} e^{-j\pi\Delta f\tau} \frac{\sin(\pi\Delta f\tau)}{\sin(\pi\tau)}, \tag{B-3.22}
\end{aligned}$$

e portanto temos que

$$h(\tau) = \frac{\sin(\pi\Delta f\tau)}{(2P+1)\sin(\pi\tau)} e^{-j\pi\Delta f\tau}, \tag{B-3.23}$$

de onde podemos deduzir que  $H(f) = \text{TF}[h(\tau)]$ .

### B.3.4 Periodograma de Bartlett

No método proposto por Bartlett divide-se efectivamente o intervalo  $N$  em  $K$  intervalos com  $L$  amostras cada um, tal que  $N = KL$ . Assim se notarmos o sinal  $x(n)$  no intervalo  $k$  por

$$x^{(k)}(n) = x(kL + n), \tag{B-3.24}$$

então um estimador do periodograma no intervalo  $k$ , escreve-se

$$\hat{P}_{xx}^{(k)}(\omega) = \frac{1}{L} \left| \sum_{n=0}^{L-1} x^{(k)}(n) e^{-j\omega n} \right|^2, \tag{B-3.25}$$

e finalmente o estimador de Bartlett escreve-se como a média das  $K$  DEP's para  $0 \leq k \leq K-1$ ,

$$\hat{P}_{xx}^{BT}(\omega) = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \hat{P}_{xx}^{(k)}(\omega). \tag{B-3.26}$$

Demonstra-se facilmente que o estimador de Bartlett tem o mesmo viés que o periodograma mas (como já foi dito anteriormente) a sua variância diminui proporcionalmente com o número de intervalos  $K$ , i.e., a estabilidade do estimador aumenta proporcionalmente com  $K$ . O único inconveniente é realmente a perda de resolução devido à diminuição do intervalo de observação de  $N$  para  $L$ .

Em resumo, o método do periodograma de Bartlett procede da seguinte forma:

1. partindo de uma sequência temporal discreta  $x[n]$  de  $N$  amostras, subdividi-la em  $K$  sub-intervalos de  $L$  amostras cada, tal que  $N = KL$ ;
2. calcular as TFD da série  $x[n]$  em cada intervalo de  $L$  amostras
3. fazer a média dos espectros obtidos ao longo dos  $K$  intervalos.

A desvantagem deste procedimento é desde logo evidente na medida em que uma diminuição do intervalo de observação de  $T_N = NT_s$  para  $T_k = LT_s$  onde  $L = N/K$  faz aumentar  $B_w$  para  $LB_w$ , admitindo um factor  $Q$  constante. Assim foram desenvolvidos vários métodos para lidar com o compromisso entre a estabilidade (aumento de  $K$ ) e resolução (diminuição de  $B_w$ ). Só esta média vai permitir diminuir a variância do estimador (de um factor  $K$  se o ruído for não correlacionado).

### B.3.5 Periodograma de Welch

Welch propôs uma versão semelhante ao periodograma de Bartlett no qual utilizou janelas temporais e a possibilidade de sobreposição dos intervalos de estimação dos espectros de ordem  $k$ . Se a série temporal  $x[n]; n = 0, \dots, N - 1$  for dividida em  $K$  segmentos com  $L$  amostras cada, cada segmento está atrasado em relação ao anterior de  $S \leq L$  amostras e então o número de segmentos  $K$  é igual à parte inteira de  $(N - L)/S + 1$ . No periodograma de Welch o segmento de ordem  $k$  é

$$x^{(k)}[n] = w[n]x[n + kS] \quad (\text{B-3.27})$$

onde  $w[n]$  é a função janela. Em seguida o estimador escreve-se exactamente como o de Bartlett utilizando as  $K$  estimativas. As expressões definitivas e mais detalhes podem ser encontrados em Marple [8].

Podemos entretanto notar que o procedimento de Welch permite, para um mesmo valor de  $N$ , uma maior estabilidade porque  $K$  é mais elevado mantendo uma resolução constante, valor de  $L$ . Prova-se além disso (ver Nuthall [7]) que uma sobreposição de 50% oferece o melhor compromisso estabilidade resolução para valores de  $N$  e  $L$  fixos.

### B.3.6 Método combinado periodograma/correlograma

Durante muito tempo tentaram-se outros métodos de forma a unificar o periodograma e o correlograma e se possível evitar as desvantagens de um mantendo as vantagens do outro. Em 1982, Nuthall e Carter propuseram um procedimento baseado no periodograma de Welch mas que inclui o correlograma que simplifica consideravelmente qualquer um dos métodos existentes até aí.



O método combinado proposto por Nuthall e Carter compreende quatro fases: 1) o periodograma de Welch  $\hat{P}_{xx}^W(f)$  é calculado utilizando sobreposição e janelas temporais; 2) é realizada uma TF inversa para obter a autocorrelação de Welch,  $\hat{r}_{xx}^W(m)$ , simétrica e com exactamente  $2L + 1$  pontos; 3) é aplicada uma janela  $w[m]$  na função de autocorrelação e 4) realiza-se uma nova TF para obter a DEP do método combinado  $\hat{P}_{xx}^{PC}(f)$  tal que

$$\hat{P}_{xx}^{PC}(f) = \hat{P}_{xx}^W(f) * W(f), \quad (\text{B-3.28})$$

onde  $W(f)$  é a TF da janela temporal aplicada na função de autocorrelação. Torna-se um pouco difícil neste ponto atingir completamente a vantagem de executar esta operação de TF inversa, ponderação e depois uma TF de novo. O facto é que esta segunda ponderação pode ser calculada de modo a modelar o espectro quase à vontade e permitir sobretudo corrigir o viés da DEP e diminuir a variância através do somatório temporal de Welch. Alguns resultados interessantes para o produto estabilidade-tempo-banda-passante para o método combinado encontram-se em Marple [8].

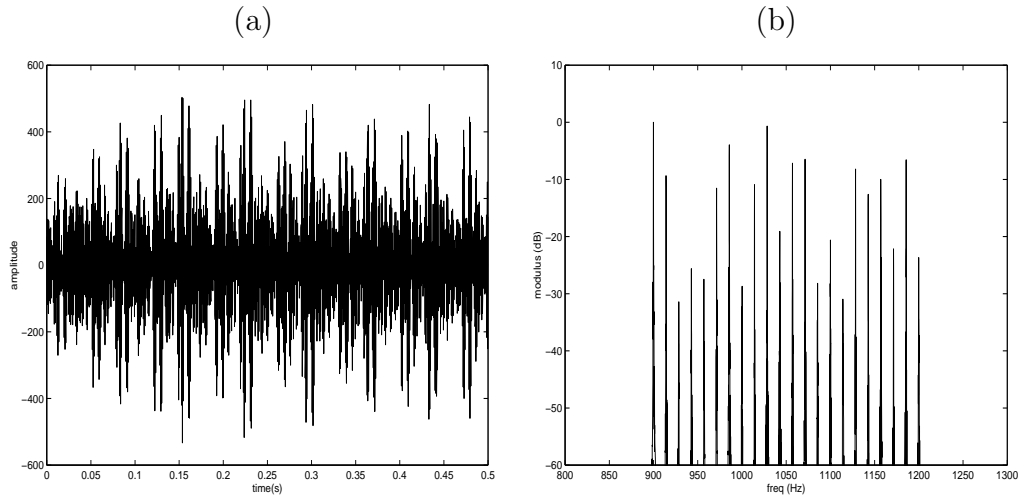


Figura B.1: sequência temporal  $T=0.5$  s (a) e a DEP estimada com  $T=5$  s tomada como referência (b).

**Exemplo:** consideremos o registo de um sinal acústico submarino obtido ao largo da Península de Tróia em Abril de 2004, num hidrofone colocado a 60 m de profundidade recebendo um sinal emitido com uma fonte colocada a 75 m de profundidade e a 3 km de distância. O objectivo é, a partir de um registo de duração 0.5 segundos determinar uma estimativa do espectro do sinal recebido sabendo que a frequência de amostragem é de 4016 Hz e portanto o número total de pontos é  $N = 2013$ . A figura B.1 mostra a sequência temporal observada (a) e a DEP estimada considerando um tempo “infinito” (b), assumida como a DEP de referência. Assim podemos notar que o sinal considerado será, em princípio formado por uma soma de 22 sinusoides equiespaçadas

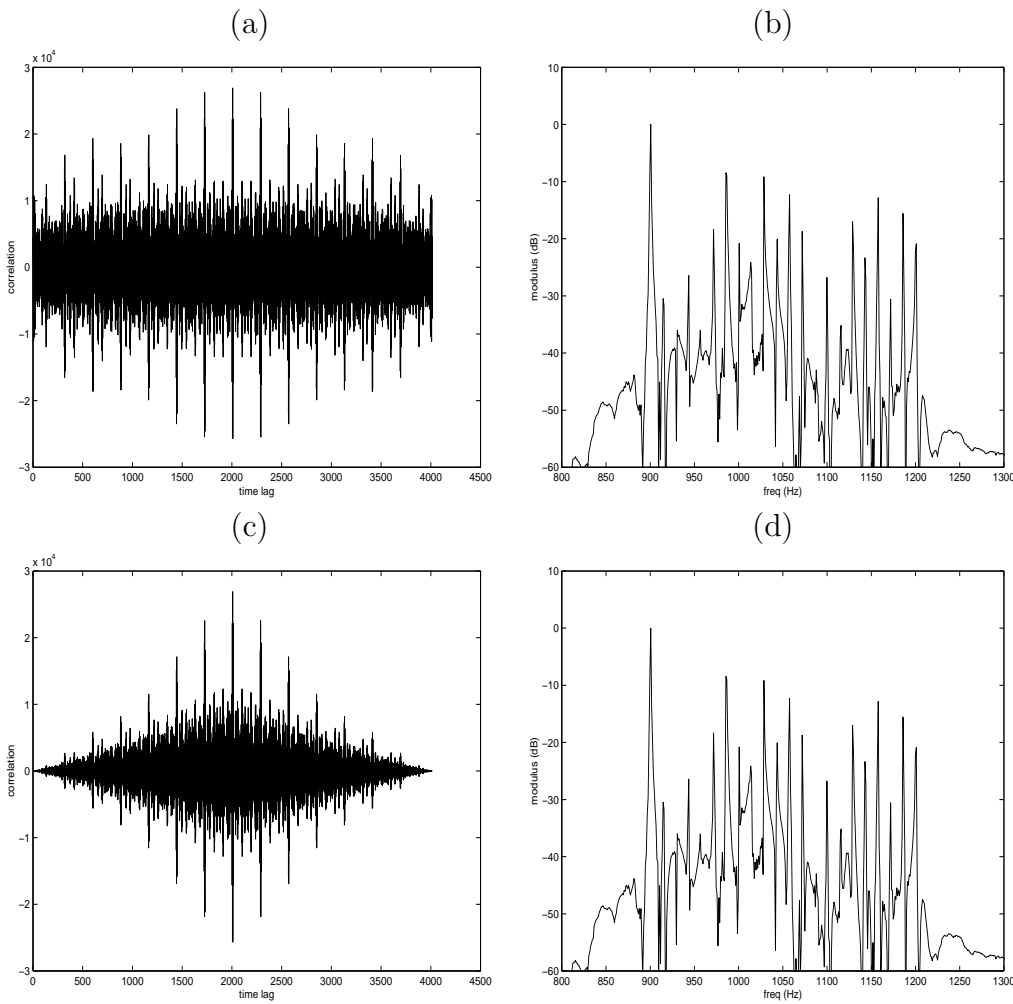


Figura B.2: correlograma: estimador não enviesado da autocorrelação (a) e respectiva DEP (b), estimador enviesado da autocorrelação (c) e respectiva DEP (d).

entre 900 e 1200 Hz. A figura B.2 mostra em (a) e (b), respectivamente, a estimativa da autocorrelação não enviesada e a respectiva DEP, tomando como horizonte de dados o sinal da figura B.1. Nota-se que a estrutura da autocorrelação é tipicamente simétrica com o dobro do número de pontos do sinal original. Na DEP nota-se que nem todas as frequências se encontram resolvidas e que a sua amplitude tem uma forte oscilação com um ruído de fundo importante (pedestal oscilante). As figuras (c) e (d) da figura B.2 mostram os resultados obtidos para o estimador enviesado da função de autocorrelação e a DEP correspondente. Aqui nota-se que a função de autocorrelação é marcadamente diferente comparativamente ao caso anterior, com uma nítida diminuição progressiva da sua amplitude para elevados valores do “time-lag”, que se deve essencialmente à ausência do factor  $1/(T - \tau)$  que, quando  $\tau$  tende para  $T$  tende para valores elevados e contrabalança a diminuição do valor do integral

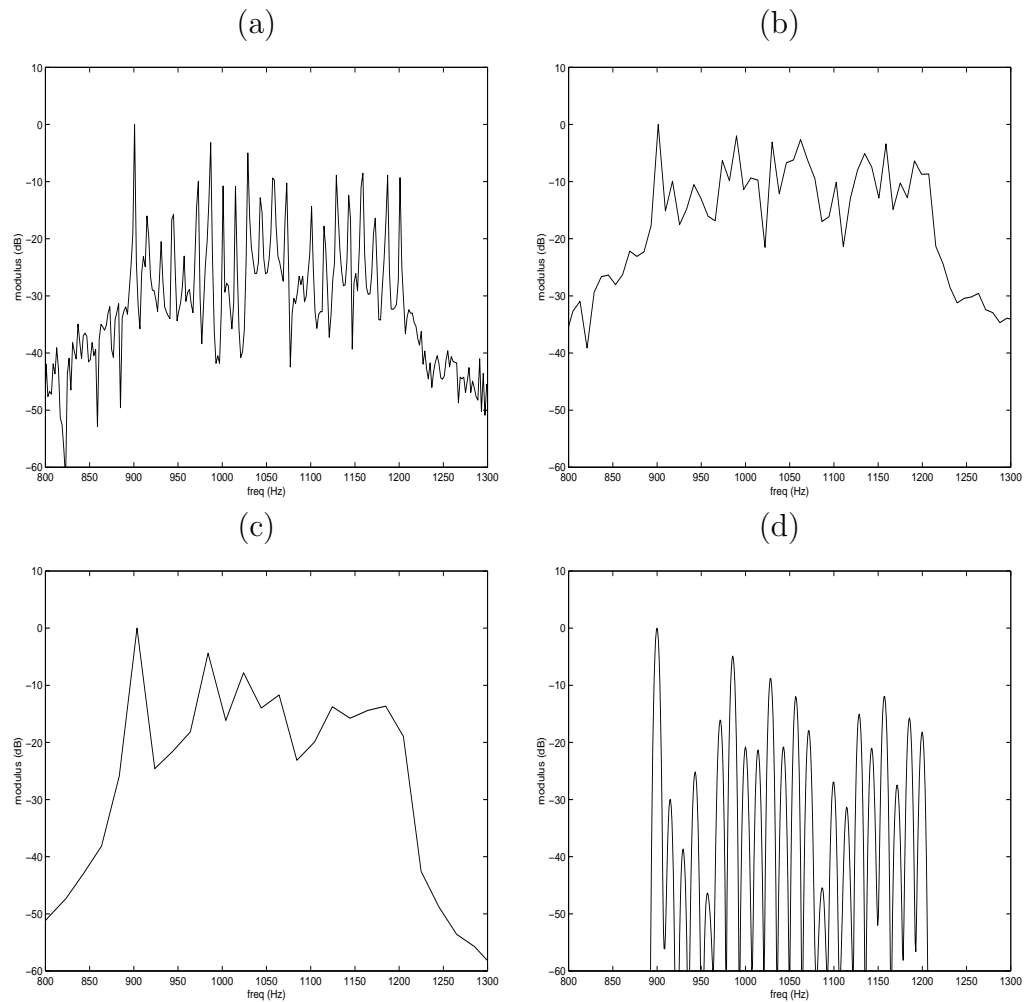


Figura B.3: periodograma: estimador *sample-mean*(a), Daniell com  $P = 2$  (b), Bartlett  $K = 10$  e  $L = 201$  (c) e Welch  $L = 1006$ ,  $K = 3$ , *overlap*=50% e uma janela de observação de Hamming (d).

(ou somatório no caso discreto). Nota-se também que a DEP é quase idêntica aquela obtida no caso anterior, o que se justifica pelo facto já referido que a escolha entre os dois estimadores prende-se com razões de consistência do estimador. A figura B.3 mostra os resultados obtidos nos mesmos dados utilizando os vários estimadores baseados no periodograma: *sample-mean* (a), Daniell (b), Bartlett (c) e Welch (d). O *sample-mean* foi obtido através do quadrado do módulo de uma FFT directa do sinal observado. Nota-se que a resolução das sinusoides é relativamente elevada pois todas se encontram presentes. No entanto as suas amplitudes variam fortemente. Uma repetição do *sample-mean* em intervalos sucessivos do sinal mostra que existe uma grande variabilidade nos valores das frequências tanto em amplitude como e posição

no eixo da frequência. No caso (b) obtido com o periodograma de Daniell ( $P = 2$ ) houve uma clara perda de resolução por média móvel na frequência. Esta perda de resolução torna-se mais evidente no caso (c) obtido com o periodograma de Bartlett com  $K = 10$  somatórios no tempo de um sample-mean calculado em  $L = N/K = 201$  pontos, sem sobreposição e com uma janela de observação rectangular. Já no caso da figura B.3(d) foi utilizado um estimador de Welch com  $L = N/2 = 1006$  pontos permitindo uma boa resolução, e ao mesmo tempo uma estabilidade aceitável através de uma média de  $K = 3$  sequências obtidas com 50% de sobreposição. Foi também utilizada uma janela de Hamming na ponderação dos dados temporais. A tabela 2.3 mostra um resumo das expressões usuais para os estimadores clássicos da densidade espectral de potência mencionados neste capítulo.

<b>Relações Exactas</b>	
Correlograma	
$r_{xx}(\tau) = E\{x(t)x^*(t-\tau)\}$ $P_{xx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T r_{xx}(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau$	$r_{xx}[m] = E\{x[n]x^*[n-m]\}$ $P_{xx}(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=-N}^N r_{xx}[m] \exp(-j\omega m)$
Periodograma	
$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega t} dt$ $P_{xx}(\omega) = E[ X(\omega) ^2]$ <p>ou <math display="block">P_{xx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} E\left[\frac{1}{T} \left  \int_0^T x(t)e^{-j\omega t} dt \right ^2\right]</math></p>	$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{j\omega n}$ $P_{xx}(\omega) = E[ X(\omega) ^2]$ $P_{xx}(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} E\left[\frac{1}{N} \left  \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega n} \right ^2\right]$
<b>Estimadores da DEP clássicos</b>	
Correlograma	
Estimador enviesado	
$\hat{r}_{xx}(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{T} \int_0^{T-\tau} x(t)x^*(t-\tau) dt, & 0 \leq \tau \leq T \\ r_{xx}^*(-\tau) & -T \leq \tau \leq 0 \end{cases}$ $\hat{P}_{xx}(\omega) = \int_{-T}^T \hat{r}_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$	$\hat{r}_{xx}[m] = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-m} x[n]x^*[n-m], & 0 \leq m \leq N-1 \\ r_{xx}^*[-m] & -(N-1) \leq m < 0 \end{cases}$ $\hat{P}_{xx}(\omega) = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \hat{r}_{xx}[m] e^{-j\omega m}$
Estimador não enviesado	
$\hat{r}_{xx}(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} x(t)x^*(t-\tau) dt, & 0 \leq \tau \leq T \\ r_{xx}^*(-\tau) & -T \leq \tau \leq 0 \end{cases}$ $\hat{P}_{xx}(\omega) = \int_{-T}^T \hat{r}_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$	$\hat{r}_{xx}[m] = \begin{cases} \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-1-m} x[n]x^*[n-m] dt, & 0 \leq m \leq N-1 \\ r_{xx}^*[-m] & -(N-1) \leq m < 0 \end{cases}$ $\hat{P}_{xx}(\omega) = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \hat{r}_{xx}[m] e^{-j\omega m}$
Periodograma	
Sample-mean	
$X(\omega) = \int_0^T x(t) \exp(-j\omega t) dt$ $\hat{P}_{xx}^{SM}(\omega) =  X(\omega) ^2$	$X(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j\omega n)$ $\hat{P}_{xx}^{SM}(\omega) =  X(\omega) ^2$
Periodograma de Daniell	
$\hat{P}_{xx}^D(\omega_i) = \frac{1}{2P+1} \sum_{n=i-P}^{i+P} \hat{P}_{xx}^{SM}(\omega_n), \quad i = P+1, \dots, N-P$	$\hat{P}_{xx}^D(\omega_i) = \frac{1}{2P+1} \sum_{n=i-P}^{i+P} \hat{P}_{xx}^{SM}(\omega_n), \quad i = P+1, \dots, N-P$
Periodograma de Bartlett	
$\hat{P}_{xx}^k(\omega) = \left  \int_{(k-1)T_k}^{kT_k} x(t) e^{-j\omega t} dt \right ^2$ $\hat{P}_{xx}^{BT}(\omega) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \hat{P}_{xx}^k(\omega)$	$\hat{P}_{xx}^k(\omega) = \left  \sum_{n=(k-1)L}^{kL-1} x[n] e^{-j\omega n} \right ^2$ $\hat{P}_{xx}^{BT}(\omega) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \hat{P}_{xx}^k(\omega)$
Periodograma de Welch	
$T_k = N/K \quad T_o = \text{overlap}$ $\hat{P}_{xx}^k(\omega) = \left  \int_{(k-1)T_k - T_o}^{kT_k} w(t)x(t) e^{-j\omega t} dt \right ^2$ $\hat{P}_{xx}^{BT}(\omega) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \hat{P}_{xx}^k(\omega)$	$K = (N-L)/(L-L_o) + 1 \quad L_o = \text{overlap}$ $\hat{P}_{xx}^k(\omega) = \left  \sum_{n=(k-1)L-L_o}^{kL-1-L_o} w[n]x[n] e^{-j\omega n} \right ^2$ $\hat{P}_{xx}^{BT}(\omega) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \hat{P}_{xx}^k(\omega)$

Tabela 2.3: resumo dos estimadores clássicos de densidade espectral de potência.

## C Folhas de Exercícios

### C.1 Revisões sobre sistemas e sinais

**Exercício 1:** Um sistema é representado pela sua resposta impulsiva  $h(t)$ . A excitação  $x(t)$  do sistema é dada por

$$x(t) = \begin{cases} (\frac{E}{T})t, & 0 < t < T/2; \\ E - (\frac{E}{T})t, & T/2 < t < T; \\ 0, & t > T. \end{cases}$$

- a) representar o sinal de excitação  $x(t)$
- b) determinar por convolução, a resposta  $y(t)$  à excitação  $x(t)$ .

**Exercício 2:**

- a) demonstre que se  $F_1(s)$  e  $F_2(s)$  forem respectivamente as Transformadas de Laplace dos sinais  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  então

$$\text{TL}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s)F_2(s)$$

- b) demonstre que qualquer função  $x(t)$  pode ser representada por

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)dt$$

onde  $\delta(t)$  é o Dirac.

**Exercício 3:**

Calcule as Transformadas de Fourier dos seguintes sinais

- a)  $s_1(t) = \text{rect}(t)$
- b)  $s_2(t) = \text{sinc}(t)$
- c)  $s_3(t) = \exp[-(1/2)(t/\sigma)^2]$
- d)  $s_4(t) = \delta(t)$

e)  $s_5(t) = 1$

f)  $s_6(t) = u(t)$

g)  $s_7(t) = A \sin(\omega_0 t)$

**Exercício 4:**

Considere o sinal complexo

$$x(t) = A \exp(j\omega_0 t)$$

a) calcule a sua Transformada de Fourier

b) calcule a sua função de autocorrelação

c) calcule a sua densidade espectral de potência

## C.2 Revisões sobre probabilidades e variáveis aleatórias

### Exercício 1:

Considere uma VA  $X$ , gaussiana de função densidade de probabilidade (FDP)

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

com os parâmetros  $m = 0$  e  $\sigma^2 = 1$ . Demonstre que

- o integral de  $p(x)$  é igual a 1
- a sua variância é também igual a 1.
- a sua função característica  $\Phi_X(u)$  é

$$\log \Phi_X(u) = jmu + \frac{\sigma^2 u^2}{2}$$

### Exercício 2:

Ao resultado da experiência de jogar uma moeda ao ar associamos uma VA discreta  $X$ . Esta VA discreta só toma um número finito de valores, neste caso igual a dois: “cara” ou “coroa”. À acontecimento de obter coroa associamos a probabilidade  $p$ ,  $Pr(\omega = \text{' coroa' } | X = 0) = p$ , assim  $Pr(\omega = \text{' cara' } | X = 1) = 1 - p = q$ .

- qual a esperança matemática  $E[X]$ ? E o momento de ordem  $k$ ,  $E[X^k]$ ?
- calcular a variância  $V[X]$ .
- demonstrar que a função característica da VA  $X$ ,  $\phi_X(u)$  se escreve

$$\phi_X(u) = 1 + q[\exp(ju) - 1]$$

### Exercício 3:

Uma VA discreta  $X$  segundo a distribuição de Poisson toma os valores inteiros  $0, 1, 2, \dots$  com as probabilidades,

$$p_k = Pr(X = k) = \frac{m^k}{k!} \exp(-m) \quad (1)$$

- demonstrar que o momento de ordem 1,  $m_1 = m$ .



b) demonstrar que o momento de ordem 2,  $\sigma^2 = m$ .

c) calcular as probabilidades

$$P_+ = Pr(X = \text{numero par})$$

e

$$P_- = Pr(X = \text{numero impar})$$

sabendo que, obviamente,  $P_+ + P_- = 1$ .

d) calcular a função característica de  $X$ ,  $\phi_X(u)$  com a distribuição de Poisson (1).

#### Exercício 4:

Demonstrar que para uma VA Gaussiana  $X$  de média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$  temos

$$Pr[X > x] = Q\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

#### Exercício 5:

Considere uma combinação linear arbitrária de  $N$  VA's Gaussianas  $X_i$ , independentes, de média zero e variância  $\sigma^2$ ,

$$Z = a_1 X_1 + \dots + a_N X_N$$

Utilizando a função característica demonstre que  $Z$  é também Gaussiana de média nula e de variância

$$\sigma_Z^2 = (a_1^2 + \dots + a_N^2)\sigma^2$$

#### Exercício 6:

A densidade de probabilidade de Cauchy é

$$p(x) = \frac{a/\pi}{x^2 + a^2} \quad -\infty < x < \infty \quad (1)$$

a) determine a média e a variância de  $X$

b) determine a função característica de  $X$

#### Exercício 7:

Uma VA  $Y$  é definida por

$$Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

onde  $X_i; i = 1, \dots, n$  é um conjunto de  $n$  VA's estatisticamente independentes e indênticamente distribuidas segundo a distribuição de Cauchy (1).

- a) determine a função característica de  $Y$
- b) detemine a densidade de probabilidade de  $Y$
- c) considere a densidade de probabilidade de  $Y$  quando  $n \rightarrow \infty$ . O teorema do limite central verifica-se? Justifique a sua resposta.

### C.3 Sinais para comunicações

#### Exercício 1:

Um sistema "phase splitter" é tal que a sua resposta em frequência se escreve

$$\Phi(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \geq 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases}$$

demonstre que a resposta do sistema "phase splitter" a um sinal real  $x(t)$  é

$$y(t) = \frac{1}{2}\{x(t) + j\hat{x}(t)\}$$

onde  $\hat{x}(t) = H[x(t)]$  é a transformada de Hilbert de  $x(t)$ .

#### Exercício 2:

Considere o esquema de blocos da figura C.1, onde  $y(t)$  é um sinal passa banda com o seu espectro centrado em  $\omega_c$  e  $\phi(t)$  é a resposta impulsiva de um "phase splitter" indicado no exercício 1.

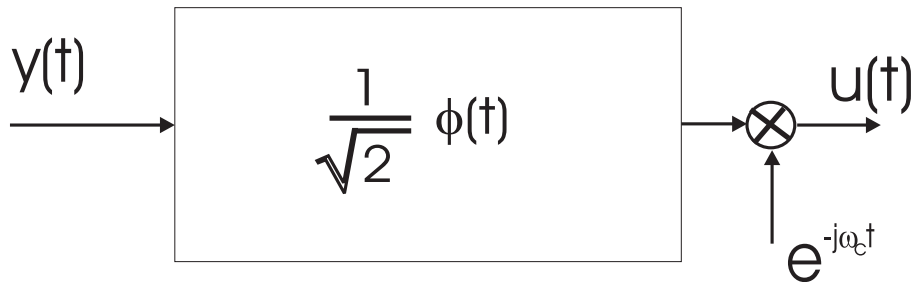


Figura C.1: phase splitter

a) demonstre que o sinal de saída  $u(t)$  é um sinal passa baixo que se escreve

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\{y(t) + j\hat{y}(t)\}e^{-j\omega_c t}$$

b) demonstre que  $u(t)$  e  $y(t)$  têm a mesma energia devido ao coeficiente  $\sqrt{2}$ .

#### Exercício 3:

Atendendo a que  $H[x(t)] = \hat{x}(t)$  demonstre que

$$H[\hat{x}(t)] = -x(t)$$

**Exercício 4:**

Considerando o sinal

$$x(t) = \cos(\omega_0 t)$$

- a) calcule a transformada de Hilbert  $\hat{x}(t)$
- b) calcule  $H[\hat{x}(t)]$ . Verifique o resultado do exercício anterior.

**Exercício 5:**

- a) calcule a transformada de Hilbert  $\hat{x}(t)$  de

$$x(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

- b) faça um esboço de  $x(t)$  e  $\hat{x}(t)$

**Exercício 6:**

Considere o espectro de um sistema realizável  $h(t)$

$$H(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

com

$$R(\omega) = \pi\delta(\omega)$$

Determine a parte imaginária  $X(\omega)$

## C.4 Sinais em banda passante

### Exercício 1:

Considere um processo estocástico  $Z(t)$ , definido por

$$Z(t) = S(t)e^{j\omega_c t}$$

onde  $S(t)$  é um processo estocásticos estacionário. Demonstre que se  $E[S(t)] = 0$  então  $Z(t)$  é também estacionário e que as funções de correlação são ligadas por

$$R_Z(\tau) = R_S(\tau)e^{j\omega_c \tau}$$

Determine igualmente o espectro  $P_Z(\omega)$  de  $Z(t)$ .

### Exercício 2:

Demonstre que  $Z(t)$  e  $Z^*(t)$  (do exercício anterior) são conjuntamente estacionários se e só se

$$R_{SS^*}(\tau) = 0$$

Demonstre ainda que esta mesma condição implica também que

$$R_{ZZ^*}(\tau) = 0$$

### Exercício 3:

Considerando o sinal estocástico complexo  $S(t) = R(t) + jI(t)$ , demonstre que  $R_{SS^*}(\tau) = 0$  implica

$$R_R(\tau) = R_I(\tau)$$

e que

$$R_{RI}(\tau) = -R_{IR}(\tau) = -R_{RI}(\tau)$$

### Exercício 4:

O equivalente em banda base de um sinal PAM passa banda pode-se escrever

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k h(t - kT + \Theta)$$

onde  $h(t)$  pode ser complexo e  $\Theta$  é um termo de fase aleatório. Considerando que  $A_k$  é uma sequência aleatória estacionária e independente de  $\Theta$ , demonstre que

a) uma condição suficiente para que  $R_{SS^*}(\tau) = 0$  é que

$$E[A_k A_m] = 0 \quad (1)$$

b) que para que (1) seja satisfeita é suficiente que as partes real e imaginária de  $A_k$  tenham a mesma função de autocorrelação e que seja decorreladas uma da outra.

**Exercício 5:**

Seja

$$X(t) = \sqrt{2}\text{Re}\{Z(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2}}[Z(t) + z^*(t)]$$

a) demonstre que  $X(t)$  é estacionário se e só se  $S(t)$  tiver média nula, for também estacionário e tal que

$$R_{SS^*}(\tau) = 0$$

b) demonstre também que sob as condições enumeradas em a) a função de autocorrelação de  $X(t)$  se escreve

$$R_X(\tau) = \text{Re}\{R_Z(\tau)\} = \text{Re}\{e^{j\omega_c\tau} R_S(\tau)\}$$

c) calcule a densidade espectral de  $X(t)$ .

## C.5 Sinais aleatórios

### Exercício 1:

Demonstre que um processo estocástico branco e estacionário  $X_k$ , filtrado por um filtro de reposta impulsiva  $h_k$  já não é branco mas continua a ser estacionário.

### Exercício 2:

Considere um processo estocástico com a seguinte forma

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t - nT)$$

onde  $\{a_n\}$  é uma sequência discreta de variáveis aleatórias de média  $m_n = E[a_n]$  e função de autocorrelação

$$r_{aa}(k) = \frac{1}{2} E[a_n a_{n+k}^*],$$

que representa a mensagem a transmitir e  $g(t)$  é um sinal determinístico que representa a função de pulso.

Calcule

- a) a média do processo  $X(t)$
- b) a função de autocorrelação de  $X(t)$ ,  $r_{xx}(t + \tau, t)$
- c) demonstre que  $X(t)$  é um processo cicloestacionário
- d) para  $m_a = 0$ ,  $r_{aa}(k) = \frac{\sigma_a^2}{2} \delta(k)$  e

$$g(t) = \begin{cases} \cos(\omega_0 t), & -T/2 \leq t \leq T/2, \omega_0 = \pi/T \\ 0, & \text{outro } t \end{cases}$$

determine  $r_{xx}(t + \tau, t)$ .

e) nas mesmas condições que em d) determine a função de autocorrelação média do processo  $X(t)$

$$\bar{r}_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} r_{xx}(t + \tau, t) dt$$

f) a partir de  $\bar{r}_{xx}(\tau)$  calculada em e) determine a densidade espectral média de potência,  $\bar{P}_{xx}(f) = \text{TF}[r_{xx}(\tau)]$ .

### Exercício 3:

Considere um processo estocástico de média nula e estacionário  $X(t)$  com a densidade espectral de potência

$$P_{xx}(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq W \\ 0, & |f| > W \end{cases}$$

O processo  $X(t)$  é amostrado a uma taxa  $1/T$  para obter um processo discreto  $X(n) = X(nT)$  determine:

- a expressão da função de autocorrelação de  $X(n)$
- o valor mínimo de  $T$  que resulta numa sequência branca e constante na frequência
- repita b) para uma densidade espectral de potência de  $X(t)$

$$P_{xx}(f) = \begin{cases} 1 - |f|/W, & |f| \leq W \\ 0, & |f| > W \end{cases}$$

#### Exercício 4:

A função de autocorrelação de um processo estocástico de ruído branco  $X(t)$  é

$$r_{xx}(\tau) = \frac{1}{2}N_0\delta(\tau)$$

Supondo que  $x(t)$  é o sinal de entrada de um sistema tendo como resposta em frequência

$$|H(f)| = \begin{cases} 1, & -B/2 \leq |f - f_c| \leq B/2 \\ 0, & \text{outro valor de } f \end{cases}$$

Determine a potência total de ruído à saída do filtro.



## C.6 Modulação analógica de onda sinusoidal

### Exercício 1:

Considere o seguinte sinal modulador

$$m(t) = \begin{cases} \text{sinc}(100t), & |t| \leq t_0 \\ 0, & \text{outro } t \end{cases}$$

com  $t_0 = 0.1$ . Este sinal modula uma portadora de frequência  $f_c = 250$  Hz em AM-CS.

- represente graficamente o sinal modulador  $m(t)$
- calcule o sinal modulado  $u(t)$
- determine e represente o esboço dos espectros de  $m(t)$  e de  $u(t)$ .
- determinar a potência do sinal modulador e do sinal modulado

### Exercício 2:

Utilizando o mesmo sinal modulador do exercício anterior determinar:

- a transformada de Hilbert do sinal modulador  $m(t)$  no domínio da frequência
- o sinal  $u(t)$  modulado em AM-LSSB e o seu espectro.
- a potência do sinal modulador e do sinal modulado.

### Exercício 3:

Seja  $v_i(t)$  e  $v_q(t)$  dois sinais passa baixo numa banda  $W < f_c$ , com energias  $E_i$  e  $E_q$  respectivamente. Utilize a generalização do teorema de Parseval (equação de Rayleigh)

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(t)w^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} V(f)W^*(f)df$$

para demonstrar que

- $\int_{-\infty}^{\infty} v_{bp}(t)dt = 0$  onde o sinal passa banda

$$v_{bp}(t) = v_i(t) \cos(\omega_c t) - v_q(t) \sin(\omega_c t)$$

e que

- a energia do sinal passa banda é igual a  $(E_i + E_q)/2$

**Exercício 4:**

Considere o sinal modulador  $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)u(t)$ . Represente graficamente o sinal modulado no tempo  $x_c(t)$  e na frequência  $X_c(f)$  para

- a) uma modulação AM-DSB com  $a = 1$
- b) uma modulação AM-DSB com  $a > 1$
- c) uma modulação CS

**Exercício 5:**

Provar que para o sinal modulado

$$x_c(t) = A_c[1 + ax(t)] \cos(\omega_c t + \phi)$$

onde  $x(t)$  é um sinal aleatório ergódico de média nula e  $\phi$  é uma variável aleatória de fase, independente de  $x(t)$  e uniformemente distribuída em  $[0, 2\pi]$  a energia média escreve-se

$$E[x_c^2(t)] = \frac{1}{2}A_c^2(1 + a^2S_x)$$

onde  $S_x = E[x^2(t)]$ .

## C.7 Modulação digital de impulsos

### Exercício 1:

Considere um sistema PAM em banda base que utiliza impulsos raised cosine. Fazendo a hipótese de que a sequência a transmitir é branca e normalizada de forma que o seu espectro se escreve

$$S_A(\omega) = 1$$

demonstre que a potência transmitida é independente de  $T$  para qualquer valor do factor de roll-off  $\alpha$ .

### Exercício 2:

Considere um canal limitado a  $|\omega/2\pi| \leq 1500$  Hz. Qual é o valor máximo da symbol rate que pode ser atingida nesse canal para um excesso de banda de 50% o filtro de recepção é do tipo passa-baixo e que não existe ISI.

### Exercício 3:

Considere o seguinte sinal PAM em banda base

$$u(t) = \sum_n [a_n g(t - 2nT) - j b_n g(t - 2nT - T)]$$

onde  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  são duas sequências aleatórias estatisticamente independentes e a função de pulso  $g(t)$  é

$$g(t) = \begin{cases} \sin(\pi t/2T), & 0 < t < 2T \\ 0, & \text{outro } t \end{cases}$$

No sinal  $u(t)$  as sequências  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  são transmitidas à velocidade  $1/2T$  bits/s enquanto  $u(t)$  é transmitido a  $1/T$  bits/s.

a) demonstre que o envelope  $|u(t)|$  é constante independentemente de  $\{a_n\}$  e de  $\{b_n\}$ .

b) determine a densidade espectral de  $u(t)$

### Exercício 4:

Considere um sinal 4-PSK definido pelo seu equivalente banda base

$$u(t) = \sum_n I_n g(t - nT)$$

onde  $I_n$  toma um dos valores entre quatro possíveis  $\{1/\sqrt{2}(\pm 1, \pm j)\}$  com igual probabilidade. A sequência resultante é branca.

a) calcule e represente a densidade espectral de  $u(t)$  quando

$$g(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{outro } t \end{cases}$$

b) repita a) com

$$g(t) = \begin{cases} A \sin(\pi t/T), & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{outro } t \end{cases}$$

c) compare os espectros obtidos em a) e b) em termos de largura de banda a -3 dB e largura de banda no primeiro zero.

## D Folhas de Trabalhos Práticos

### Metodologia

Nas sessões de trabalhos práticos de Fundamentos de Telecomunicações I será adoptada a seguinte metodologia de trabalho:

1. existem 5 trabalhos práticos, um em cada semana do bloco de aulas.
2. cada trabalho prático tem duas partes: uma preparação teórica e uma parte prática.
3. todos os relatórios e preparações são entregues na tutoria electrónica.
4. o trabalho no.1 deverá ser entregue até às 20 horas de sexta-feira da terceira semana de aulas. Os outros trabalhos deverão ser entregues até às 20 horas da sexta-feira da semana em que são feitos.
5. a parte teórica é preparada individualmente e entregue (na tutoria electrónica) antes de cada sessão prática (salvo para o TP no.1 que deve ser entregue com o relatório do TP até ao final da terceira semana).
6. a componente prática será executada durante a aula prática individualmente ou em grupo conforme o caso.
7. o único formato aceite é PDF. No caso de haver m-files esse poderão ser juntos com o PDF num ficheiro zip.
8. o relatório deverá comportar: 1) metodologia seguida, 2) m-files utilizados (normalmente um único m-file com todos os vários passos, plots e resultados numéricos), 3) figuras e explicações, 4) cálculos anexos explicativos dos resultados observados, nomeadamente comparando o resultado esperado com aquele efectivamente obtido e a razão das eventuais diferenças, 5) conclusões.

## D.1 Folha 1 - Transmissão de sinais PM em banda passante

### I. Preparação

#### I.1 Espectro do sinal banda base

Considere um sinal PAM  $s_{bb}(t)$  em banda base com uma forma de pulso  $g(t)$ , modulado por uma sequência de bits/símbolos aleatória  $\{a_k\}$  de média  $\mu_A$  e de variância  $\sigma_A^2$  a uma taxa de  $R = 1/T$  bits/s.

- escreva a expressão do sinal modulado em banda  $s(t)$  sabendo que a portadora é  $f_c = 10/T$ .
- escreva a expressão do espectro do sinal em banda base.
- assumindo que os bits/símbolos são descorrelacionados entre si, calcule a função de autocorrelação da sequência aleatória  $\phi_A(k)$ .
- calcule a expressão do espectro nesse caso.

### II. Trabalho prático

O objectivo deste trabalho é de simular uma cadeia de transmissão completa, incluindo a fonte, o modulador, o canal e o receptor. Várias opções de execução permitirão obter vários tipos de modulação, codificação, níveis de ruído, etc.

#### II.1 Sequência de informação a transmitir

Gerar uma sequência de bits '0' e '1', aleatórios, não correlacionados e de variância 1. Escolher o comprimento da sequência  $N_b=5000$ . Representar os primeiros 25 bits da sequência e a sua função de autocorrelação (estimada).

#### II.2 Mapeamento e sinalização

**Mapeamento:** selecione um mapeamento bits - símbolos  $M = 2$  mas coloque a possibilidade de vir a escolher outros valores de M, tais como 4, 8, 16, 32. Defina  $k$ , o número de bits por símbolo para cada mapeamento. Outra possibilidade de mapeamento a implementar é a codificação de Gray, na qual apenas um bit diferencia pontos contíguos.

**Sinalização:** vamos começar com dois tipos de sinalização: de amplitude de impulsos (ASK) e de fase de impulsos (PSK). No caso ASK cada sinal  $s_m(t)$  da sinalização poderá tomar uma amplitude  $A_m = (2m - 1 - M)d$ , onde para já  $d = 1$ . No caso PSK cada sinal  $s_m(t)$  da sinalização poderá tomar uma amplitude complexa

$A_m = \sqrt{\mathcal{E}} e^{j2\pi(m-1)/M}$ . Fazer um gráfico em constelação dos bits/símbolos transmitidos. Explique os resultados obtidos.

### II.3 Filtragem e modulação

Antes da colocação em banda para adaptação ao canal de transmissão o sinal será filtrado pela forma de pulso  $g(t)$ . Usaremos uma ou outra de duas formas de pulso: o pulso rectangular ou o coseno elevado (*raised cosine*). Implementar uma função para cada um destes pulsos e filtrar a sequência a transmitir usando a convolução discreta implementando

$$s_{bb}(t) = \sum_{n=1}^N A_n g(t - nT)$$

Representar o sinal à saída do filtro e a sua densidade espectral de potência.

A modulação passa pela colocação em banda passante deste sinal, sabendo que o sinal em banda é dado por

$$s(t) = \text{Re}[s_{bb}(t)e^{j2\pi f_c t}]$$

Calcular e representar  $s(t)$  e estimar a sua densidade espectral de potência  $P_s(f)$ .

### II.4 Canal de transmissão

Simular um canal de transmissão sem distorsão e com ruído aditivo Gaussiano no qual o sinal recebido se escreve

$$y(t) = s(t) + w(t)$$

com uma relação sinal / ruído SNR variável. Representar  $y(t)$  e a sua densidade espectral de potência. Conclusão.

### II.5 Receptor

O primeiro passo ao nível do receptor é a colocação do sinal recebido em banda base. Há vários métodos para realizar esta operação mas que envolvem sempre filtragem e deslocamento em frequência, não forçosamente nesta ordem. Normalmente a filtragem envolve também a forma de pulso escolhida no emissor. Escolha o método que achar mais apropriado e determine e represente o sinal em banda base, assim como a sua densidade espectral de potência. Teste o receptor com um sinal sem ruído e compare com o sinal emitido. Represente os bits/símbolos recebidos sob forma de constelação, sem e com ruído de canal.

### II.6 Detector e decisor

Amostre o sinal à cadência do bit/símbolo e implemente o decisor segundo o método de sinalização escolhido no emissor. Compare a sequência de bits / símbolos recebidos

com a sequência emitida e determine o desempenho - probabilidade de falso alarme - do sistema de comunicação para vários SNR em função: 1) do tipo de modulação escolhida ( $M$ , ASK e PSK), 2) da forma de pulso e do factor de excesso de banda  $\alpha$  e 3) taxa de transmissão em bits/s por cada Hz de banda.

Dados do sistema de transmissão:

```
fc = 10000;           % carrier frequency (Hz)
M = 2;               % # of constellation points
k = log2(M);         % # of bits per symbol
Tb = 0.0002;         % pulse duration (s)
Rb = 1/Tb;           % bit rate in bits/s
Ts = k*Tb;           % symbol interval duration (s)
Rs = Rb/k;           % symbol rate in symbols/s
E = 1;               % pulse energy
fs = 40000;          % sampling frequency (Hz)
ts = 1/fs;           % sampling interval (s)
alpha = 0.5;         % roll-off factor, only if ps=rc
Nb = 5000;           % total number of bits to be transmitted
Nsb = Tb*fs;         % # of samples per bit
```



## D.2 Folha 2 - Introdução aos sinais aleatórios

### I. Preparação

#### I.1 Correlação e sistemas lineares

Um sistema linear determinístico e invariante no tempo de resposta impulsiva  $h(t)$  tem como sinal de excitação à entrada um sinal  $w(t)$  aleatório, estacionário de média nula, branco e de variância  $\sigma_w^2$ .

- calcule a função de correlação  $r_w(\tau)$ , do sinal  $w(t)$ .
- calcule a esperança matemática  $E[y(t)]$  do sinal de saída do sistema  $y(t)$ .
- calcule a variância  $V[y(t)]$  do sinal de saída do sistema  $y(t)$ .
- calcule a função de correlação  $r_y(\tau)$  do sinal de saída do sistema, em função da função de correlação do sinal de entrada e da função de correlação do sistema  $r_h(\tau)$ .
- explique como se poderia usar este último resultado para gerar uma sequência aleatória com uma determinada correlação a partir de um sinal aleatório branco.

#### I.2 Transformada de Fourier de sinais aleatórios

Em teoria, a Transformada de Fourier (TF) de um sinal aleatório não existe devido a não haver garantia de convergência do integral de definição. Porém, na prática, com sinais aleatórios de duração limitada e de amplitude finita, é possível obter a TF de um sinal aleatório. Assim a partir do sinal  $w(t)$  do ponto anterior (ou da sua versão discreta  $w[k]$ ) é possível calcular  $W(f)$  num intervalo limitado de  $N$  pontos tal que

$$W(f) = \sum_{k=0}^{N-1} w[k]e^{-j2\pi fk},$$

onde a normalização do intervalo de amostragem  $T_s = f_s = 1$ , impõe que  $f \in [-1/2, 1/2]$ . Calcular a esperança matemática e a variância de  $W(f)$ .

### II. Trabalho prático

- crie um sinal aleatório  $w(t), t = [0, 1]$  s, branco de média nula, com uma distribuição Gaussiana e de variância = 0.4; verifique que o sinal  $w(t)$  criado corresponde aos parâmetros desejados.

- b)** a partir de  $w(t)$  crie agora um sinal aleatório  $v(t)$  com uma função de autocorrelação

$$r_{vv}(\tau) = e^{-\alpha\tau},$$

com  $\alpha = 5$ . Verifique que  $v(t)$  obedece às propriedades desejadas.

- c)** crie agora um sinal determinístico  $s(t) = A \sin(2\pi f_0 t + \phi_0)$  com  $A = 2$ ,  $f_0 = 250$  Hz e  $\phi_0 = \pi/4$ ; visualização.
- d)** forme dois sinais  $x_1(t) = s(t) + w(t)$  e  $x_2(t) = s(t) + v(t)$ . Calcule as suas funções de autocorrelação e transformadas de Fourier em vários sub intervalos temporais e em todo o intervalo. Comparar os resultados obtidos.

## D.3 Folha 3 - Sinais aleatórios e densidade espectral

### I. Preparação

#### I.1 Sinais aleatórios

Considere o sinal aleatório complexo

$$x[n] = \sum_{l=1}^L A_l e^{j(2\pi f_l n + \theta_l)}$$

onde  $\theta_l : \mathcal{U}[0, 2\pi]$  e tal que  $E[\theta_l \theta_k] = 0$ .

- a) demonstre que a esperança matemática  $E[x[n]] = 0$
- b) demonstre que a função de correlação  $r_{xx}[n + m, n]$  do sinal aleatório  $x[n]$  se escreve

$$r_{xx}[m] = \sum_{l=1}^L A_l^2 e^{j2\pi f_l m}.$$

- c) concluir sobre a estacionaridade de  $x[n]$
- d) demonstrar que se ao sinal  $x[n]$  for adicionado ruído branco de média nula e de variância  $\sigma^2$ , tal que  $y[n] = x[n] + w[n]$  então a função de autocorrelação de  $y[n]$  se escreve

$$r_{yy}[m] = \sum_{l=1}^L A_l^2 e^{j2\pi f_l m} + \sigma^2 \delta[m].$$

### II. Trabalho prático

- a) carregar e ouvir cerca de 9 segundos do Aleluia de Handel (“load handel”) no Matlab;
- b) estudar o conteúdo no tempo e na frequência desse sinal; trata-se de um sinal passa-baixo? Existe uma frequência portadora mínima para este sinal? Qual é?
- c) modular esse sinal numa portadora sinusoidal de  $f_c = 15$  kHz; determinar o espectro do sinal modulador, da moduladora e do sinal modulado; existe sobreposição de espectros? Porquê?
- d) colocação do sinal modulado de novo em banda base e extração do sinal modulador; comparação com o sinal original;

## D.4 Folha 4 - Modulação analógica e sinais passa-banda

### I. Preparação

#### I.1 DEP com um sinal infinito no tempo

1. calcule as funções de correlação dos sinais  $x_1$  e  $x_2$  considerados infinitos no tempo.
2. calcule a TF das funções de correlação de a). Compare.

#### I.2 DEP com um sinal finito no tempo

Considere agora os sinais  $x_1$  e  $x_2$  limitados no tempo a um intervalo de  $N$  amostras.

1. calcule as expressões dos estimadores enviesado e não enviesado da função de autocorrelação para cada um dos sinais.
2. calcule as DEP de  $x_1$  e  $x_2$  usando os estimadores da correlação.

### II. Trabalho prático

A partir dos sinais  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  calculados no trabalho prático D.2, utilizando o Matlab. Para cada caso deverão ser feitos os respectivos cálculos num m-file único com plots comparativos sobrepostos na mesma escala mas cores ou traços diferentes. Deduzir parâmetros de comparação tais como diferença entre os picos principais e os lóbulos laterais, resolução em frequência, e outros comentários que achar pertinentes.

- a) calcule a densidade espectral de potência (DEP) dos sinais  $x_1$  e  $x_2$  usando o método do correlograma com:
  1. o estimador da correlação enviesado e não enviesado. Comentar os resultados ao nível dos estimadores da correlação e da DEP.
  2. janelas de ponderação rectangular, de Hanning e de Hamming. Comparar os resultados obtidos.
- b) calcule a DEP utilizando o método do periodograma de Welch com várias durações de janela e com e sem sobreposição e vários valores de número de estimativas no somatório. Tente encontrar o melhor compromisso entre resolução frequencial e discriminação de amplitude.

- c) faça um m-file que implemente o periodograma de Daniell. Depois de otimizar a escolha do comprimento da janela frequencial, compare o resultado com os casos anteriores. considere agora os sinais  $x_1$  e  $x_2$  limitados no tempo a um intervalo de  $N$  amostras.

## D.5 Folha 5 - Sinalização e detecção em banda base

### I. Preparação

#### I.1 Sinais ortogonais

Considere os dois sinais

$$s_0(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T_b \\ 0 & t \notin [0, T_b] \end{cases}$$

$$s_1(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < T_b/2 \\ -1 & T_b/2 \leq t \leq T_b \\ 0 & t \notin [0, T_b] \end{cases}$$

- a) prove que os sinais  $s_0(t)$  e  $s_1(t)$  são ortogonais
- b) calcule a auto-correlação de  $s_0(t)$  e de  $s_1(t)$
- c) calcule a correlação cruzada entre  $s_0(t)$  e  $s_1(t)$
- d) qual o filtro adaptado  $h_0(t)$  ao sinal  $s_0(t)$  ?
- e) calcule a resposta do filtro adaptado  $h_0(t)$  ao sinal  $s_0(t)$
- f) calcule a resposta do filtro adaptado  $h_0(t)$  ao sinal  $s_1(t)$
- g) conclusões

### II. Trabalho prático

#### II.1 Correlacionador-receptor vs. filtro adaptado

Considere os sinais da preparação:

- a) construa um receptor-correlacionador com  $T_b = 1$  s, e teste a sua saída com os sinais  $s_0(t)$  e  $s_1(t)$  em todas as combinações possíveis.
- b) compare o resultado obtido em a) com uma implementação tipo filtro adaptado.
- c) adicionando ruído à entrada do receptor-correlacionador observar o sinal de saída.

#### II.2 Sinais ortogonais

- a) verifique experimentalmente que os sinais  $s_0(t)$  e  $s_1(t)$  são ortogonais.
- b) simule um canal de transmissão de uma trama de bits aleatória com a mesma probabilidade para o '0' e os '1' utilizando os sinais  $s_0(t)$  e  $s_1(t)$ . Fazer variar a relação sinal/ruído  $SNR = A/\sigma^2$  entre -10 e +20 dB e traçar a curva  $P_e(SNR)$ . Comparar com a curva teórica. Quantas tiragens aleatórias são necessárias para obter uma boa aproximação ?
- c) construa um diagrama de constelação com os pares  $(r_0, r_1)$  à saída do receptor-correlacionador para um número significativo de símbolos da trama de bits e para várias relações de SNR. Explicar o efeito obtido.

### II.3 Sinais antipodais

Escolher um conjunto de sinais antipodais como, p.ex.,  $s_1(t)$  e  $-s_1(t)$  do exercício anterior.

Responder de novo às alíneas b) e c) de II.2 utilizando uma sinalização antipodal.

### II.4 Sinalização do tipo on-off

Volte a responder ao mesmo problema dos dois exercícios anteriores mas utilizando uma sinalização do tipo on-off com o sinal  $s_1(t)$ . Compare os três tipos de sinalização.

### II.5 Sinalização multinível

Realizar uma simulação de um sistema PAM, com  $M=16$  e faça uma estimativa do seu desempenho em termos de probabilidade de erro vs. SNR.

## E Exames de anos anteriores

### E.1 Exame de Fundamentos de Telecomunicações - Junho 2004

**Problema 1:** considere o sinal aleatório  $x(t) = A \cos(2\pi f_c t + \theta)$  onde  $A$  e  $f_c$  são duas constantes reais representando respectivamente a amplitude e a frequência do sinal enquanto a fase  $\theta$  é uma variável aleatória, distribuída uniformemente no intervalo  $[0, 2\pi]$ .

- calcule a função de autocorrelação  $r_{xx}(t + \tau, t)$  de  $x(t)$
- determine se  $x(t)$  é um processo estacionário. Justifique a sua resposta.
- calcule a sua densidade espectral de potência  $P_{xx}(f)$ .

**Problema 2:** considerando os sinais  $\{s_i(t); i = 1, \dots, 4\}$  da figura E.1, determine

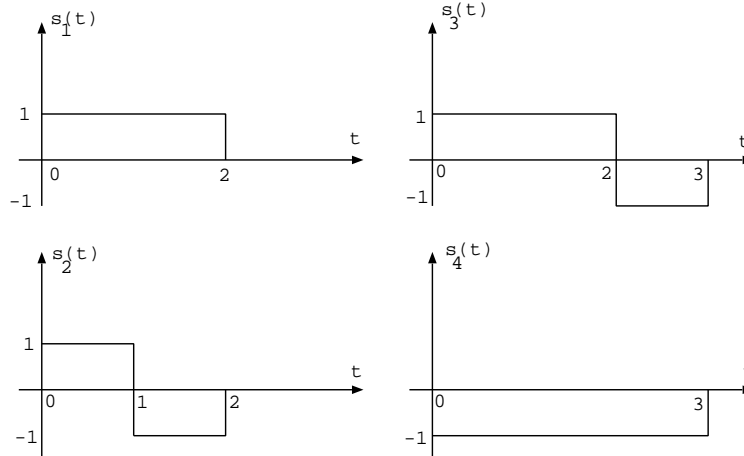


Figura E.1: sinais  $\{s_i(t); i = 1, \dots, 4\}$

- os coeficientes de correlação  $\rho_{mk}$  entre eles e
- as distâncias euclidianas  $d_{mk}$  entre eles.



**Problema 3:** considere uma sequência discreta sem memória que utiliza um alfabeto de  $L = 7$  símbolos  $\{x_1, x_2, \dots, x_L\}$  emitidos um em cada milissegundo.

Símbolo	probabilidade
$x_1$	0.35
$x_2$	0.30
$x_3$	0.20
$x_4$	0.10
$x_5$	0.04
$x_6$	0.005
$x_7$	0.005

Tabela 5.4: probabilidade empírica de cada símbolo.

- numa primeira transmissão de dados assumiu-se que os símbolos eram equiprováveis. Calcule a entropia da fonte e deduza o número médio de bits necessário para representar cada símbolo do alfabeto durante essa transmissão. Qual a taxa de transmissão em bits/s.
- utilizando uma codificação com palavras de comprimento fixo, qual o número de bits necessário para representar este alfabeto e qual a taxa de transmissão necessária para transmitir uma mensagem utilizando este tipo de codificação.
- durante a primeira transmissão fez-se uma estatística da probabilidade de cada símbolo tendo obtido os resultados indicados na tabela 5.4. Qual a entropia efectiva deste alfabeto ?
- numa segunda transmissão de dados utilizou-se uma codificação com palavras de comprimento variável. Servindo-se do algoritmo de Hauffman determine o código de cada um dos sete símbolos da tabela 5.4.

## E.2 Exame de Fundamentos de Telecomunicações - Julho 2004

**Problema 1:** considere um sinal  $s(t)$  representado como uma combinação linear de  $K$  funções ortonormais  $f_k(t)$  tal que

$$\hat{s}(t) = \sum_{k=1}^K s_k f_k(t)$$

onde

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) f_m^*(t) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

Determine a expressão dos coeficientes  $\{s_k; k = 1, \dots, K\}$  na expansão  $\hat{s}(t)$  que minimizam a energia

$$\epsilon = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t) - \hat{s}(t)|^2 dt$$

**Problema 2:** considere uma sequência binária formada por variáveis aleatórias decorrelacionadas de média nula e variância unidade,  $b_n$ , a partir da qual se formam os símbolos  $I_n = b_n + b_{n-1}$ .

a) demonstre que a função de autocorrelação da sequência de símbolos se escreve

$$\phi_{ii}(m) = E[I_n I_{n-m}] = \begin{cases} 2 & m = 0 \\ 1 & m = \pm 1 \\ 0 & \text{outro } m \end{cases}$$

b) calcule a densidade espectral de potência da sequência de símbolos  $P_{ii}(f)$ , com uma duração de símbolo de  $T$  segundos.

c) se a sequência de símbolos  $I_n$  for transmitida utilizando uma modulação digital com uma forma do pulso  $g(t) = u(t) - u(t - T)$ , onde  $T$  é uma constante que representa a duração do pulso e  $u(t)$  é a função degrau unidade, calcule a densidade espectral  $P_{ss}(f)$  do sinal modulador em banda base  $s_{lm}(t)$ .

**Problema 2:** considere uma sequência discreta sem memória que utiliza um alfabeto de  $L = 6$  símbolos  $\{x_1, x_2, \dots, x_L\}$  emitidos um em cada 3 milisegundos.

Símbolo	probabilidade
$x_1$	0.30
$x_2$	0.20
$x_3$	0.20
$x_4$	0.20
$x_5$	0.05
$x_6$	0.05

Tabela 5.5: probabilidade empírica de cada símbolo.

- a) utilizando os resultados indicados na tabela 5.5 calcule a entropia efectiva deste alfabeto ?
- b) calcule qual o número de bits mínimo necessário para emitir uma mensagem utilizando este alfabeto codificado utilizando palavras de comprimento fixo. Qual a velocidade de transmissão nesse caso ? Justifique.
- d) utilizando uma codificação com palavras de comprimento variável com algoritmo de Hauffman determine o código de cada um dos seis símbolos da tabela 5.5.

### E.3 Exame de Fundamentos de Telecomunicações I - 2007/08 (normal)

**Problema 1 [5 val]:** considere o impulso de rádio frequência da figura E.2 na qual uma sinusóide de amplitude  $A = 2$  e de frequência  $f_c = 4$  kHz se encontra modulada por uma função porta simétrica de amplitude unitária e de duração  $T = 1$  ms.

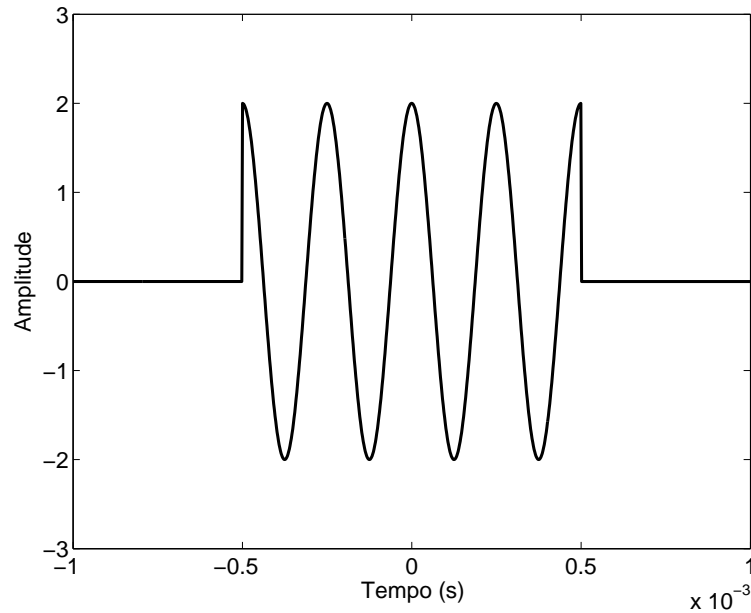


Figura E.2: impulso de rádio frequência.

- [1v] escreva a expressão do sinal  $s(t)$  para qualquer  $t$ ,
- [1v] calcule a sua Transformada de Fourier  $S(f)$ ,
- [2v] represente o espectro de amplitude e o espectro de fase do sinal  $s(t)$ .
- [1v] calcule o valor aproximado da largura de banda a -3 dB do espectro de potência deste impulso ?

**Problema 2 [8 val]:** um canal de transmissão tem uma resposta  $y(t)$  a um sinal de entrada  $x(t)$ , tal que

$$y(t) = k_1x(t - t_1) + k_2x(t - t_2) \quad (1)$$

onde  $k_1, k_2$  são constantes  $< 1$  e  $t_2 > t_1$ .

- [1v] escreva a resposta impulsiva  $h_c(t)$  do canal de transmissão.
- [1v] calcule a sua resposta em frequência  $H_c(f) = Y(f)/X(f)$ .
- [1v] sabendo que um sinal é dito sem distorção se  $z(t) = k_0x(t - t_0)$ , onde  $k_0$  e  $t_0$  são constantes, determine  $H(f) = Z(f)/X(f)$ .
- [3v] com o objectivo de igualizar o canal de transmissão coloca-se um igualizador de função de transferência  $H_{eq}(f)$  em cascata com o canal  $H_c(f)$ , tal que a função de transferência total se escreve  $H(f) = H_c(f)H_{eq}(f)$ . Fazendo  $k_0 = k_1$ ,  $t_0 = t_1$  e aproximando

$$\frac{1}{1 + ke^{-j\omega t}} \approx 1 - ke^{-j\omega t}$$

calcule a expressão aproximada do igualizador  $H_{eq}(f)$  que permite obter à saída do conjunto canal-igualizador um sinal  $z(t)$  sem distorção.

- [2v] determine a resposta impulsiva do igualizador  $h_{eq}(t)$ .

**Problema 3 [7 val]:** considere o seguinte sinal

$$s(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T/2 \\ 0 & T/2 < t \leq T \end{cases}$$

- [1v] escreva a resposta impulsiva  $h(t)$  do filtro adaptado ao sinal  $s(t)$ .
- [2v] sabendo que o receptor óptimo se obtém como a saída do filtro adaptado deslocado da duração  $T$  do sinal, calcule e represente a resposta  $r(t)$  do filtro adaptado ao sinal  $s(t)$ . Determine o valor máximo da saída  $r(t)$  e para que instante esse valor é obtido.
- [3v] se o sinal  $y(t)$  à entrada do filtro adaptado tiver ruído,  $y(t) = s(t) + n(t)$ , onde  $n(t)$  é um ruído branco, gaussiano de média nula e de variância  $\sigma^2$ , calcule  $E[r(T)]$  e  $V[r(T)]$ .
- [1v] escreva a expressão da densidade de probabilidade de  $r(T)$ .

## E.4 Exame de Fundamentos de Telecomunicações I - 2007/08 (recurso)

**Problema 1 [7 val]:** considere um canal de transmissão com a seguinte resposta em frequência (amplitude)

$$|B(f)| = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+(f/W)^2}}, & |f| \leq W \\ 0 & \text{outro } f \end{cases}$$

onde  $W = 4800$  Hz é a sua largura de banda e com ruído aditivo, Gaussiano de média nula e de densidade espectral  $N_0/2$ . Este canal é utilizado para transmitir dados binários a uma taxa de 4800 bits/s.

- [3v] determine uma forma de pulso  $g(t)$  que permita obter ISI nulo.
- [4v] determine o espectro de amplitude do filtro emissor e do filtro receptor de forma a obter uma transmissão de dados ótima neste canal.

**Problema 2 [10 val]:** a resposta em frequência de um canal passa baixo é dada por

$$H(f) = \begin{cases} 1 + \alpha \cos 2\pi f t_0 & |\alpha| < 1, |f| \leq W \\ 0 & \text{outro } f \end{cases}$$

onde  $W$  é a largura de banda do canal. Um sinal  $s(t)$  de banda inferior a  $W$  é passado através do canal.

- [3v] demonstre que o sinal de saída se escreve  $y(t) = s(t) + (\alpha/2)[s(t - t_0) + s(t + t_0)]$
- [3v] sabendo que o sinal  $y(t)$  é passado através de um filtro adaptado ao sinal  $s(t)$ , determine a resposta  $r(t)$  do filtro nos instantes  $t = kT$ , para  $k = 0, \pm 1, \pm 2$ , onde  $T$  é o intervalo do símbolo.
- [4v] defina o valor da interferência intersimbólica quando  $t_0 = T$  ?

**Problema 3 [3 val]:** demonstre que  $x(t) = (-1/\pi t) * \hat{x}(t)$ , onde  $\hat{x}(t)$  é a Transformada de Hilbert de  $x(t)$ .

## Referências

- [1] Edward A. Lee and David G. Messerschmidt *Digital Communication*, Sec. Edition, Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [2] John G. Proakis, *Digital Communications*, Third Ed., McGraw-Hill, New York, 1995.
- [3] John G. Proakis and Masoud Salehi, *Comtemporary Communications Systems using MATLAB*, Brooks Cole, Pacific Grove, 2000.
- [4] M. Abramowitz and I.A. Stegun, editors. *Handbook of Mathematical Functions*. U.S. Government Printing Office, 1968.
- [5] S.M.Jesus, *Sistemas e Sinais*, Eng. de Sistemas e Informática, FCT, Universidade do Algarve, Setembro 2004.
- [6] C. Blackman and J.W. Tukey, *The Measurement of power spectra from the point of view of communications engineering*, New York: Dover, 1959.
- [7] A.H. Nutall and G.C. Carter, “A generalized framework for power spectral estimation”, IEEE Trans. Acoust. Speech and Signal Processing, vol. ASSP 28, pp 334-335, June 1980.
- [8] S. Lawrence Marple “Digital Spectral Analysis with Applications”, Prentice-Hall, Signal Processing Series, USA 1987.
- [9] H. Urkowitz “Signal Theory and Random Processes”, Artech House Inc., 1983.
- [10] C.W. Therrien “Discrete Random Signals and Statistical Signal Processing”, Prentice Hall, 1992.
- [11] A.B. Carlson, P.B. Crilly e J.C. Rulledge “Communications Systems”, 4 Edition, McGraw-Hill, 2002.

## Bibliografia aconselhada

A.B. Carlson, P.B. Crilly e J.C. Rulledge “Communications Systems”, 4 Edition, McGraw-Hill, 2002.

Edward A. Lee and David G. Messerschmidt *Digital Communication*, Sec. Edition, Kluwer Academic Publishers, 1994.

John G. Proakis and Masoud Salehi, *Contemporary Communications Systems using MATLAB*, Brooks Cole, Pacific Grove, 2000.

S.M. Jesus, “Sistemas e Sinais” (texto de apoio), FCT - Universidade do Algarve, 2008.



## Avaliação

As regras de avaliação são aquelas indicadas no documento de aprovação do MIEET (<http://www.fct.ualg.pt/intranet/bolonha/MIEET.pdf>) para esta disciplina.