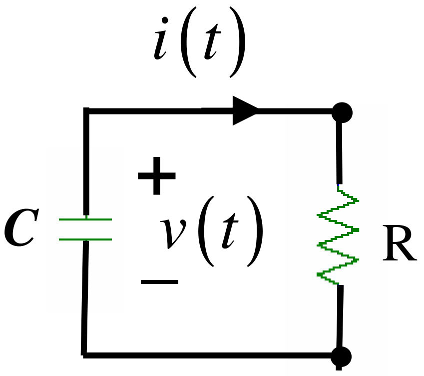
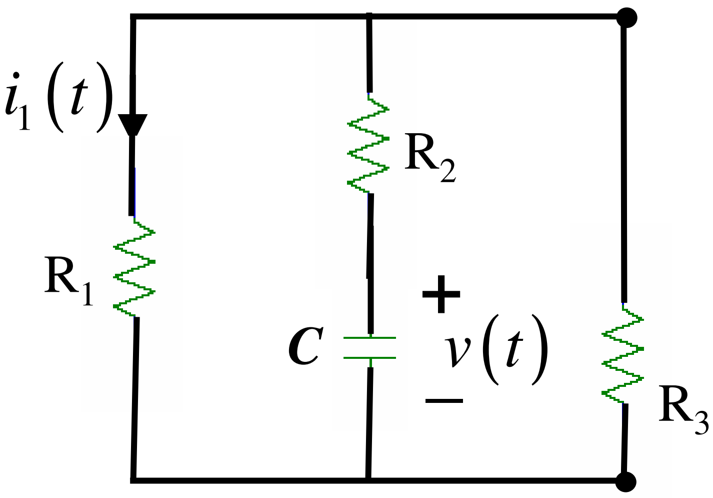
ANÁLISE DA RESPOSTA NATURAL

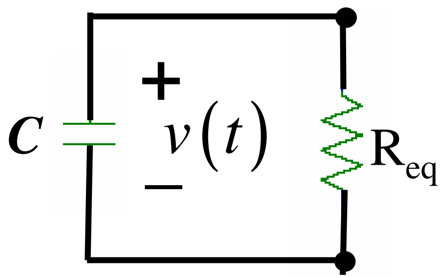


$$v(0) = V_0, \qquad v(t) = ?$$

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0$$

$$v(t) = V_0 e^{\frac{-t}{RC}}, \qquad t > 0$$

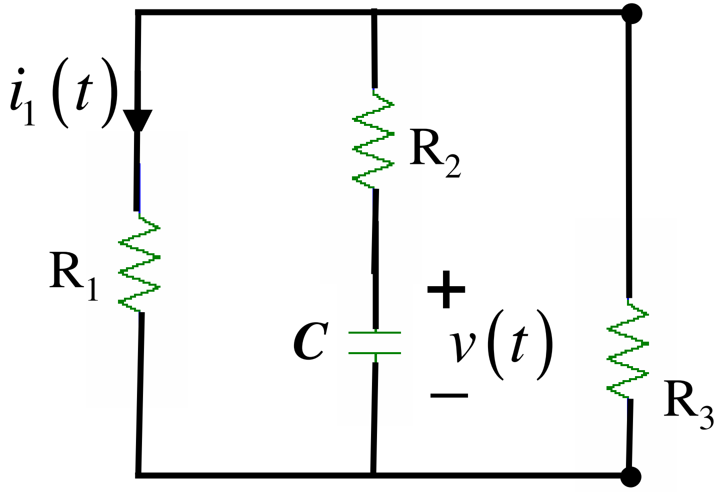


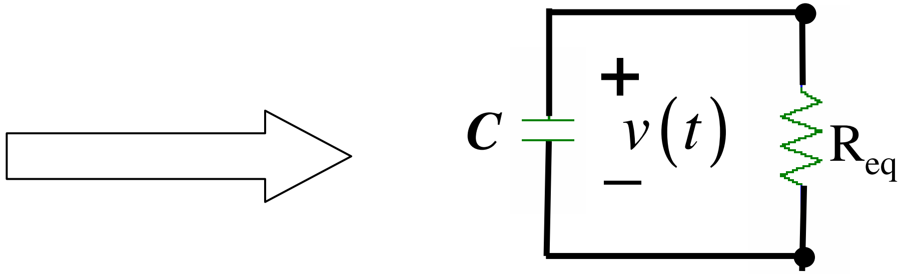


$$R_{eq} = R_1 \,//\, R_3 + R_2$$

$$v(t) = V_0 e^{\frac{-t}{R_{eq}C}}, \qquad t > 0$$

ANÁLISE DA RESPOSTA NATURAL





$$R_{eq} = R_1 // R_3 + R_2$$

$$v(t) = V_0 e^{\frac{-t}{R_{eq}C}}, \qquad t > 0$$

$i_1(t)$?

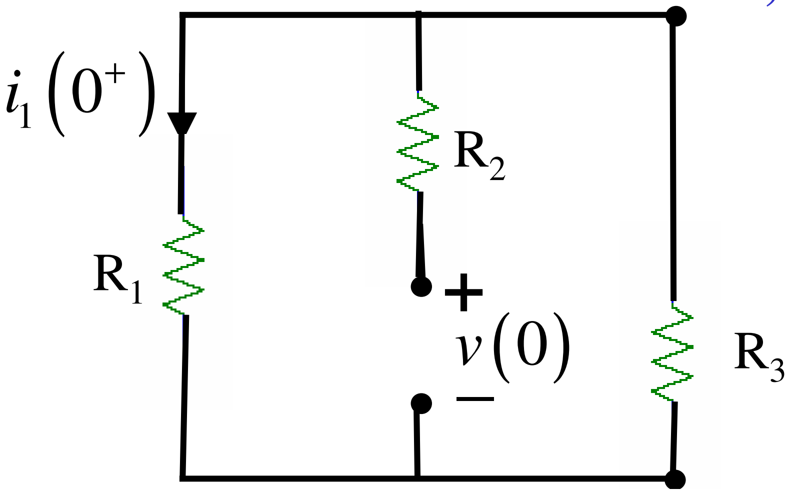
Define-se constante de tempo: $\tau = R_{eq}C$

$$i_1(t) = i_1(0) V_0 e^{\frac{-t}{\tau}}$$

$i_1(0)$?

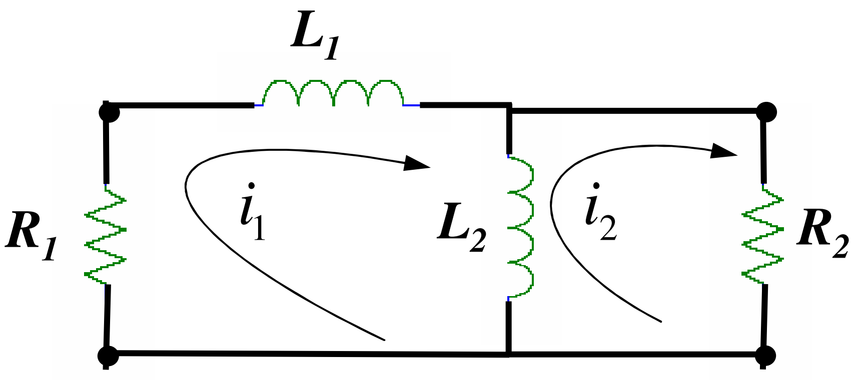
Sabe-se que: $v(0) = V_0$

***v*, tensão no condensador é uma função contínua**



$$i_1(0^+) = \frac{R_1R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3} V_0$$

$$i_1(t) = \frac{R_1R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3} V_0 e^{\frac{-t}{\tau}}$$



$$L_1 = 2H \quad L_2 = 3H \quad R_1 = 1\Omega \quad R_2 = 2\Omega$$

Lei das malhas:

$$\begin{cases} R_1 i_1 + L_1 \dfrac{di_1}{dt} + L_2 \dfrac{d}{dt}(i_1 - i_2) = 0 \\ L_2 \dfrac{d}{dt}(i_2 - i_1) + R_2 i_2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} i_1 + 5\dfrac{di_1}{dt} - 3\dfrac{di_2}{dt} = 0 \\ -3\dfrac{di_1}{dt} + 2i_2 + 3\dfrac{di_2}{dt} = 0 \end{cases}$$

Pretende-se a solução de um sistema de equações diferenciais conhecendo-se: $i_1(0), \quad i_2(0)$.

TÉCNICA: Cada bobine impõe um decaimento exponencial, então, cada corrente é uma combinação linear de 2 exponenciais.

TÉCNICA: **Cada bobine impõe um decaimento exponencial, então, cada corrente é uma combinação linear de 2 exponenciais.**

$$\begin{cases} i_1 + 5\dfrac{di_1}{dt} - 3\dfrac{di_2}{dt} = 0 \\ -3\dfrac{di_1}{dt} + 2i_2 + 3\dfrac{di_2}{dt} = 0 \end{cases}$$

$$i_1(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}, \quad i_2(t) = Ce^{s_1 t} + De^{s_2 t}$$

O problema resume-se a determinar: A, B, C, D, s_1, s_2.

Substituindo i_1 e i_2 no sistema de equações:

$$\begin{cases} (A + 5As_1 - 3Cs_1)e^{s_1 t} + (B + 5Bs_2 - 3Ds_2)e^{s_2 t} = 0 \\ (-3As_1 + 2C + 3Cs_1)e^{s_1 t} + (-3Bs_2 + 2D + 3Ds_2)e^{s_2 t} = 0 \end{cases}$$

Para que as igualdades anteriores sejam verificadas para todo o t, devem as expressões entre parêntesis serem iguais a zero:

$$\begin{cases} (5s_1 + 1)A - 3s_1 C = 0 & (1) \\ (5s_2 + 1)B - 3s_2 D = 0 & (2) \\ (3s_1 + 2)C - 3s_1 A = 0 & (3) \\ (3s_2 + 2)D - 3s_2 B = 0 & (4) \end{cases}$$

<u>TÉCNICA:</u> Cada bobine impõe um decaimento exponencial, então, cada corrente é uma combinação linear de 2 exponenciais.

$$\begin{cases} i_1 + 5\dfrac{di_1}{dt} - 3\dfrac{di_2}{dt} = 0 \\ -3\dfrac{di_1}{dt} + 2i_2 + 3\dfrac{di_2}{dt} = 0 \end{cases}$$

$$i_1(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}, \quad i_2(t) = Ce^{s_1 t} + De^{s_2 t}$$

$$\begin{cases} (5s_1 + 1)A - 3s_1 C = 0 & (1) \\ (5s_2 + 1)B - 3s_2 D = 0 & (2) \\ (3s_1 + 2)C - 3s_1 A = 0 & (3) \\ (3s_2 + 2)D - 3s_2 B = 0 & (4) \end{cases}$$

A partir de, por exemplo, (3) e (1):

$$6s_1^2 + 13s_1 + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad s_1 = -\frac{1}{6} \vee s_2 = -2$$

$$\begin{cases} i_1(t) = Ae^{\frac{-t}{6}} + Be^{-2t} \\ i_2(t) = Ce^{\frac{-t}{6}} + De^{-2t} \end{cases}$$

Os coeficientes A, B, C e D determinam-se tendo em conta as condições iniciais:

$$\begin{cases} i_1(0) = A + B \\ i_2(0) = C + D \end{cases}$$

$$\begin{cases} (5s_1+1)A - 3s_1C = 0 & (1) \\ (5s_2+1)B - 3s_2D = 0 & (2) \\ (3s_1+2)C - 3s_1A = 0 & (3) \\ (3s_2+2)D - 3s_2B = 0 & (4) \end{cases} \qquad s_1 = -\frac{1}{6} \vee s_2 = -2$$

$$\begin{cases} i_1(0) = A + B \\ i_2(0) = C + D \end{cases}$$

Para se determinar as 4 incógnitas A, B, C e D, são necessárias 2 equações adicionais, por exemplo, (1) e (2) resultando no seguinte:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ i_1(0) \\ i_2(0) \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{aligned} A &= \frac{9}{11} i_1(0) - \frac{6}{11} i_2(0) \\ B &= \frac{2}{11} i_1(0) + \frac{6}{11} i_2(0) \\ C &= \frac{-3}{11} i_1(0) + \frac{2}{11} i_2(0) \\ D &= \frac{3}{11} i_1(0) + \frac{9}{11} i_2(0) \end{aligned}$$