

E.8 Filtros RC/CR em regime sinusoidal

E.8.1 Preparação

1. Revisões: notação complexa

Em regime permanente sinusoidal uma tensão em qualquer ponto de um circuito pode ser representada por

$$v(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi) \quad (\text{E-8.1})$$

e caracterizada completamente através da sua amplitude V_0 e fase ϕ . Para efeitos de cálculo, podemos representar o sinal $v(t)$ pelo valor complexo

$$\bar{V} = V_0 e^{j\phi} \quad (\text{E-8.2})$$

que é um número que pode ser representado no plano complexo como indicado na figura E.19.

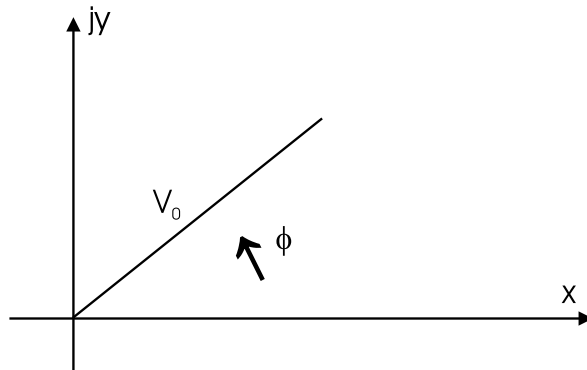


Figura E.19: representação de fasor.

A passagem da notação complexa \bar{V} à notação trigonométrica $v(t)$ faz-se multiplicando \bar{V} por $e^{j\omega t}$ e tomando a parte real do resultado obtido. O valor \bar{V} obedece a todas as regras de cálculo dos números complexos e representa um potente utensílio na análise de circuitos em regime permanente sinusoidal (e só nesse caso!).

Se aplicarmos uma tensão sinusoidal $v(t) = V_0 \cos(\omega t)$ aos terminais de uma resistência R obtemos uma corrente $i(t)$ também sinusoidal de amplitude V_0/R e em fase com $v(t)$. Em notação complexa podemos dizer que

$$\bar{V} = R\bar{I} \quad (\text{E-8.3})$$

Se em vez da resistência tivermos um condensador C , podemos escrever que

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} = -C\omega V_0 \sin(\omega t) \quad (\text{E-8.4})$$

Utilizando a relação $\sin(\omega t) = -\cos(\omega t + \pi/2)$, podemos escrever em notação complexa que o fasor associado com a tensão sinusoidal $\sin(\omega t)$ se escreve $-\bar{V} \exp j\pi/2$. Substituindo em (E-8.4) temos que

$$\bar{I} = -C\omega(-\bar{V}e^{j\frac{\pi}{2}}) \quad (\text{E-8.5})$$

$$= jC\omega\bar{V} \quad (\text{E-8.6})$$

de onde

$$\bar{V} = \frac{1}{jC\omega}\bar{I} \quad (\text{E-8.7})$$

Diz-se que um condensador tem uma impedância equivalente em sinusoidal igual a $Z_C = 1/jC\omega$ e que a tensão tem um atraso de fase de $\pi/2$ em relação à corrente. No caso da bobine de valor L temos que

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \rightarrow i(t) = \frac{1}{L} \int v(t) dt \quad (\text{E-8.8})$$

substituindo $v(t)$

$$i(t) = \frac{V_0}{\omega L} \sin(\omega t) = \frac{V_0}{\omega L} \cos(\omega t) e^{j\frac{\pi}{2}} \quad (\text{E-8.9})$$

e finalmente

$$\bar{V} = j\omega L \bar{I} \quad (\text{E-8.10})$$

e diz-se neste caso que a impedância equivalente a uma bobine em regime sinusoidal permanente é $Z_L = j\omega L$ e que a tensão tem um avanço de fase de $\pi/2$ em relação à corrente. Destas duas expressões Z_C e Z_L pode ver-se que a impedância da bobine aumenta com a frequência e a do condensador diminui com a frequência.

2. Revisões: representação de Bode

Um sistema, dito de primeira ordem, tem uma representação do tipo

$$A = \frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{1 + j\tau\omega},$$

onde $\tau = RC$ é a constante de tempo do sistema. O estudo em regime permanente sinusoidal deste sistema faz-se normalmente através da representação de A num diagrama da Bode, *i.e.*, representando separadamente a amplitude (em dB) e a fase de A .

O ganho em décibéis (dB) obtem-se a partir do módulo $|A|$ como $G_{\text{dB}} = 20 \log |A|$ e assim,

$$G_{\text{dB}} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}},$$

ou seja

$$G_{\text{dB}} = -10 \log(1 + \tau^2 \omega^2).$$

Quando $\omega \rightarrow 0$ temos que $G_{\text{dB}} \rightarrow 0$ dB e quando $\omega \rightarrow \infty$ temos que $G_{\text{dB}} \rightarrow -\infty$ dB.

A inclinação das assíntotas é de 0 dB quando $\omega \rightarrow 0$ e de -20 dB por década (passagem de uma frequência f a uma frequência $10f$) quando $\omega \rightarrow \infty$. Isto pode-se determinar observando que quando $\omega \rightarrow \infty$

$$G_{\text{dB}} \rightarrow -10 \log \omega^2 + 10 \log \omega_0^2$$

onde $\omega_0 = 1/\tau$. Num gráfico semi-logarítmico podemos escrever $X = \log \omega$ e $X_0 = \log \omega_0$ portanto

$$G_{\text{dB}} \approx -20X + 20X_0$$

o que não é mais do que a equação de uma recta de inclinação -20 dB e de ordenada na origem igual a $20X_0$. A função G_{dB} e as respectivas assíntotas estão representadas na figura E.20.

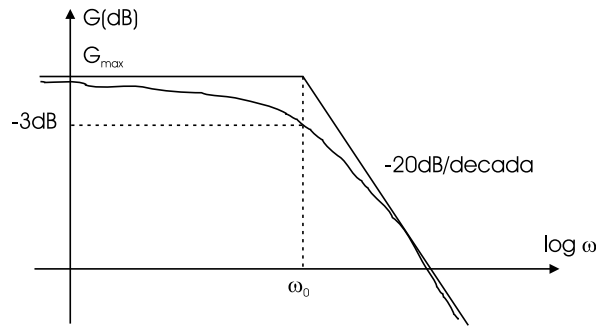


Figura E.20: diagrama de amplitude.

Define-se a banda passante B como sendo a gama de frequências para as quais o ganho G está compreendido entre o seu valor máximo G_{max} e $G_{\text{max}} - 3$ dB. No caso do filtro RC representado acima, o valor G_{max} é igual a 0 dB que é atingido para $\omega = 0$. Por outro lado como -3 dB = $-20 \log X$ implica $X = 1/\sqrt{2}$, podemos calcular o valor de ω para o qual

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}},$$

que tem como solução $\omega = \omega_0$. O resultado final é que a banda passante $B = \omega_0$.

A diferença de fase entre V_e e V_s é o argumento do número complexo A em função da frequência. O argumento de A pode-se obter calculando o argumento do numerador e do denominador ($\angle x$ significa “argumento de x ”)

$$\Phi(\omega) = \angle A = \angle(1) - \angle(1 + RC\omega)$$

sabendo que o argumento dum número real é zero podemos escrever

$$\Phi(\omega) = -\arctan RC\omega$$

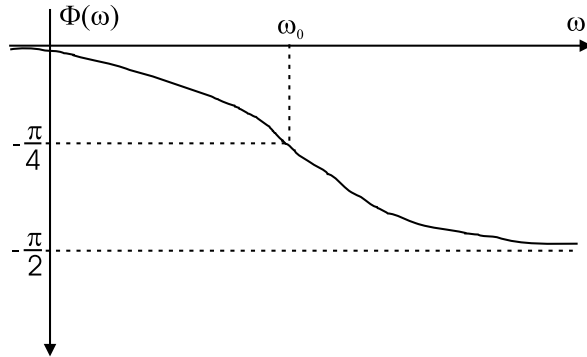


Figura E.21: diagrama de fase.

pondo $\tau = RC = 1/\omega_0$ que é a constante de tempo do circuito.

Obtemos

$$\Phi(\omega) = -\arctan \frac{\omega}{\omega_0}$$

A variação de $\Phi(\omega)$ pode-se calcular de forma aproximada observando que quando $\omega \rightarrow 0$ $\Phi \rightarrow 0$, e que quando $\omega \rightarrow \infty$ então $\Phi \rightarrow -\pi/2$. Obtem-se um valor particular para $\omega = \omega_0$ para o qual $\Phi(\omega_0) = -\pi/4$. Podemos fazer um traçado aproximado que terá uma forma semelhante ao da figura E.21. Alguns autores admitem um traçado de fase assímptotico através de segmentos de recta, no qual a fase é considerada nula para $\omega < \omega_0/10$ e igual a $-\pi/2$ para $\omega > 10\omega_0$. Para $\omega_0/10 < \omega < 10\omega_0$ a curva de fase é aproximada por um segmento de recta com uma inclinação de $-\pi/4$ por década.

3. Estudo de uma célula RC

Considere a montagem da figura E.22 com $v_e(t) = 3 \cos(6283t)$

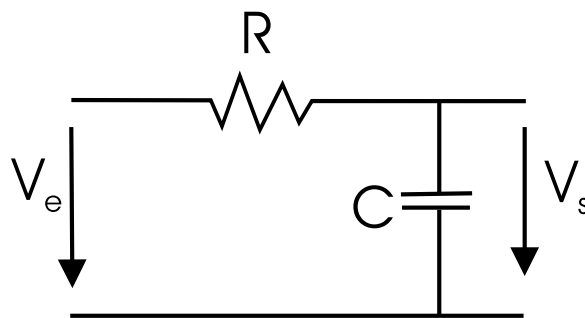


Figura E.22: célula RC.

a) desenhar a tensão de saída $v_s(t)$ com $R = 1k\Omega$ e $C = 160 \text{ nF}$.

- b) desenhar a corrente $i(t)$ no circuito para a mesma tensão de entrada $v_e(t)$ e nas mesmas condições que em a)
- c) calcule e represente a curva de Bode (amplitude e fase) do ganho em tensão $A = V_s/V_e$.

4. Estudo de uma célula CR

Considere a montagem da figura E.23.

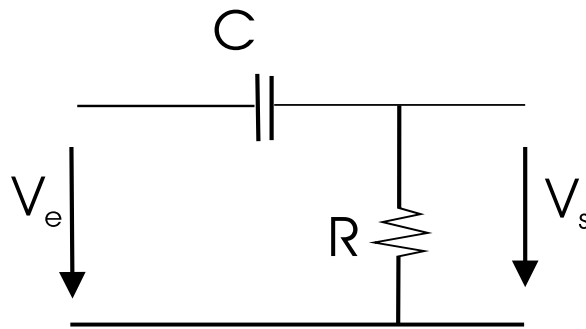


Figura E.23: circuito CR: $R = 1 \text{ k}\Omega$ e $C = 160 \text{ nF}$.

- a) desenhar a tensão de saída $v_s(t)$.
- b) desenhar a corrente $i(t)$ no circuito para a mesma tensão de entrada $v_e(t)$ e nas mesmas condições que em a).
- c) calcule e represente a curva de Bode (amplitude e fase) do ganho em tensão $A = V_s/V_e$.

E.8.2 Trabalho prático

1. Filtro RC ou passa baixo

Realizar a montagem da figura E.22 com $R=1 \text{ k}\Omega$ e $C=22 \text{ nF}$.

- a) aplicar sucessivamente em $v_e(t)$ um sinal sinusoidal de frequência $f = 100 \text{ Hz}$, 1000 Hz e 10 kHz . Para estes três valores da frequência desenhar no mesmo gráfico, sinal de entrada e de saída. Comentar as amplitudes e diferenças de fase relativas entrada-saída.