

Engenharia de Sistemas e Informática
(ex - Eng. de Sistemas e Computação)
e
Engenharia Física

Análise de Circuitos

w3.ualg.pt/~sjesus/aulas/ac/

Sérgio M.M. Jesus
sjesus@ualg.pt

Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade do Algarve
1994/95

Versão 3.0b - 23/Setembro/2003

(<ftp://ftp.ualg.pt/users/sjesus/aulas/ac-V3.0b.pdf> e [ac-V3.0b-X2.pdf](ftp://ftp.ualg.pt/users/sjesus/aulas/ac-V3.0b-X2.pdf))

Últimas Revisões (V 3.0, Setembro 2003)

O material deste texto de apoio foi inicialmente escrito para o Curso de Informática de Sistemas, disciplina anual de Electricidade e Electrónica, em Outubro de 1992. A segunda versão foi preparada para a primeira edição da disciplina de Análise de Circuitos, do curso de Engenharia de Sistemas e Computação em 1994/95. Ao longo dos anos têm vindo a ser inseridas algumas matérias e retiradas outras. Nomeadamente as aulas teórico-práticas (TP) foram aligeiradas, criadas aulas práticas (P) e os respectivos guias de trabalhos. Foi incluído e mais tarde retirado um extenso capítulo sobre a Transformada de Laplace, foram aligeirados os capítulos sobre Quadripolos e Amplificadores Operacionais. Finalmente nesta versão 3.0, devido à reformulação do curso de LESC para LESI foi de novo, e de acordo com o programa indicativo proposto em Senado, introduzido o capítulo relativo à Transformada de Laplace e retirada a parte relativa aos Amp-Ops, além de corrigidos erros encontrados na versão anterior. Do ponto de vista técnico continuam a existir: i) uma versão pdf da sebenta com paginação frente e verso, ii) uma outra com duas páginas A5 por página, mais económica em papel e iii) encontra-se igualmente disponível uma **versão HTML ONLINE completa da sebenta em w3.ualg.pt/~sjesus/aulas/ac**.

NOTA PRÉVIA

O material contido neste conjunto de apontamentos é cedido a título gratuito e para ser utilizado exclusivamente como texto de apoio à disciplina de Análise de Circuitos dos cursos de Engenharia de Sistemas e Informática e Engenharia Física da Universidade do Algarve. Este texto poderá (e tem com certeza) erros involuntários, de cujas consequências o autor não poderá ser responsabilizado. Desde já agradecemos a todos aqueles que tem colaborado através do envio de correções e comentários que tem sido, na sua maioria, incorporados no texto. Em particular gostaríamos de agradecer aos docentes António José Sancho, Artur Neves e João Lima pelas suas contribuições ao longo destes últimos anos. A consulta deste texto não dispensa (e aliás aconselha) a de outras obras, nomeadamente as citadas na bibliografia. Boa leitura !...

Índice

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introdução e objectivos | 13 |
| 2 | Conceitos de base | 14 |
| 2.1 | Sistemas lineares, dipólos, nós e malhas | 14 |
| 2.2 | Corrente, tensão, energia e potência | 15 |
| 2.3 | Corrente alternada: potência, valores médios e eficazes | 16 |
| 2.4 | Elementos de circuitos | 20 |
| 2.4.1 | Elementos ideais passivos | 20 |
| 2.4.2 | Elementos ideais activos | 23 |
| 2.4.3 | Elementos reais passivos | 25 |
| 2.4.4 | Elementos reais activos | 25 |
| 3 | Leis e teoremas fundamentais | 27 |
| 3.1 | Leis de Kirchhoff | 27 |
| 3.1.1 | Lei dos nós | 27 |
| 3.1.2 | Lei das malhas | 27 |
| 3.2 | Princípio de sobreposição | 30 |
| 3.3 | Teorema de Thevenin | 31 |
| 3.4 | Teorema de Norton | 31 |
| 3.5 | Aplicações | 33 |
| 3.5.1 | Divisor de tensão e divisor de corrente | 33 |
| 3.5.2 | Circuitos fechados, abertos e em carga | 34 |
| 3.5.3 | Potência | 36 |
| 3.5.4 | Exemplos | 37 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 4 | Transformada de Laplace e aplicações | 46 |
| 4.1 | Sinais de excitação e a família dos impulsos | 46 |
| 4.2 | Transformada de Laplace | 48 |
| 4.2.1 | Definição e existência | 48 |
| 4.2.2 | Pólos e zeros duma função | 50 |
| 4.2.3 | Teoremas simples da Transformada de Laplace | 51 |
| 4.2.4 | Transformada de Laplace Inversa | 55 |
| 4.3 | Aplicação aos sistemas lineares | 56 |
| 4.3.1 | Equações diferenciais com condições iniciais | 56 |
| 4.3.2 | Função de sistema | 59 |
| 4.4 | Cálculo simbólico | 62 |
| 4.5 | Exemplos | 63 |
| 5 | Circuitos em regime transitório | 67 |
| 5.1 | Circuitos RC | 67 |
| 5.2 | Circuito RLC | 72 |
| 5.3 | Caracterização de circuitos em regime transitório | 77 |
| 5.3.1 | Circuitos de primeira ordem | 78 |
| 5.3.2 | Circuitos de segunda ordem | 78 |
| 5.4 | Exemplos | 79 |
| 6 | Corrente alternada | 83 |
| 6.1 | Introdução | 83 |
| 6.2 | Regime permanente sinusoidal | 83 |
| 6.3 | Notação complexa e impedâncias | 86 |
| 6.4 | Circuitos RC e RLC | 89 |
| 6.5 | Diagramas | 90 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 6.6 | Caracterização da resposta em frequência | 93 |
| 6.6.1 | Circuitos de primeira ordem | 94 |
| 6.6.2 | Circuitos de segunda ordem | 94 |
| 6.7 | Exemplos | 96 |
| 7 | Quadripolos | 99 |
| 7.1 | Introdução | 99 |
| 7.2 | Parâmetros impedância | 99 |
| 7.3 | Parâmetros admitância | 100 |
| 7.4 | Parâmetros híbridos | 101 |
| 7.5 | Correspondências entre as representações | 102 |
| 7.6 | Outras relações entrada-saída de quadripolos | 102 |
| 7.7 | Exemplos | 103 |
| A | Tabelas e relações particulares | 108 |
| A.1 | Relações Trigonométricas Usuais | 108 |
| A.2 | Desenvolvimentos em série | 109 |
| A.3 | Algumas relações úteis | 110 |
| A.3.1 | Integrais | 110 |
| A.3.2 | Séries | 110 |
| A.3.3 | Derivadas | 110 |
| A.3.4 | Trigonometria do círculo | 111 |
| B | Folhas de Exercícios | 112 |
| B.1 | Potência, corrente e tensão | 112 |
| B.2 | Elementos de circuitos | 113 |
| B.3 | Leis e teoremas fundamentais I | 114 |

| | | |
|----------|---|------------|
| B.4 | Leis e teoremas fundamentais II | 116 |
| B.5 | Leis e teoremas fundamentais III | 117 |
| B.6 | Transformada de Laplace I | 118 |
| B.7 | Transformada de Laplace II | 119 |
| B.8 | Regime transitório | 120 |
| B.9 | Regime permanente sinusoidal | 122 |
| B.10 | Quadripolos I | 123 |
| B.11 | Quadripolos II | 124 |
| C | Soluções das Folhas de Exercícios | 126 |
| C.1 | Potência, corrente e tensão | 126 |
| C.2 | Elementos de circuitos | 126 |
| C.3 | Leis e teoremas fundamentais I | 127 |
| C.4 | Leis e teoremas fundamentais II | 127 |
| C.5 | Leis e teoremas fundamentais III | 127 |
| C.6 | Transformada de Laplace I | 128 |
| C.7 | Transformada de Laplace II | 128 |
| C.8 | Regime transitório | 129 |
| C.9 | Regime permanente sinusoidal | 130 |
| C.10 | Quadripolos I | 131 |
| C.11 | Quadripolos II | 131 |
| D | Temas de avaliação em anos anteriores | 133 |
| D.1 | Exame, Época normal de 2002 | 133 |
| D.2 | Exame, Época de Recurso 2002 | 135 |
| D.3 | Mini-teste de avaliação contínua, Março de 2003 | 137 |
| D.4 | Mini-teste de avaliação contínua, Abril de 2003 | 139 |

| | | |
|----------|---|------------|
| D.5 | Exame, Época normal de 2003 | 140 |
| D.6 | Exame, Época de Recurso de 2003 | 142 |
| E | Folhas de Trabalhos Práticos | 144 |
| E.1 | Instrumentos e técnicas de medida I | 146 |
| E.1.1 | Preparação | 146 |
| E.1.2 | Trabalho prático | 149 |
| E.2 | Instrumentos e técnicas de medida II | 150 |
| E.2.1 | Preparação | 150 |
| E.2.2 | Trabalho Prático | 153 |
| E.3 | Instrumentos e técnicas de medida III | 159 |
| E.3.1 | Preparação | 159 |
| E.3.2 | Trabalho prático | 160 |
| E.4 | Teoremas Gerais I | 163 |
| E.4.1 | Preparação | 163 |
| E.4.2 | Trabalho Prático | 164 |
| E.5 | Teoremas Gerais II | 166 |
| E.5.1 | Preparação | 166 |
| E.5.2 | Trabalho Prático | 167 |
| E.6 | Circuitos RC/CR em regime transitório | 168 |
| E.6.1 | Preparação | 168 |
| E.6.2 | Trabalho prático | 169 |
| E.7 | Circuito RLC | 171 |
| E.7.1 | Preparação | 171 |
| E.7.2 | Trabalho Prático | 171 |
| E.8 | Filtros RC/CR em regime sinusoidal | 173 |

| | | |
|----------|---|------------|
| E.8.1 | Preparação | 173 |
| E.8.2 | Trabalho prático | 177 |
| E.9 | Filtro RLC em regime sinusoidal | 179 |
| E.9.1 | Preparação | 179 |
| E.9.2 | Trabalho Prático | 179 |
| E.10 | Quadripolos | 181 |
| E.10.1 | Preparação | 181 |
| E.10.2 | Trabalho prático | 181 |
| F | Bibliografia | 183 |
| G | Método de avaliação | 184 |
| H | Correções das Folhas de Trabalhos Práticos | 185 |
| H.1 | Instrumentos e técnicas de medida I | 186 |
| H.1.1 | Preparação | 186 |
| H.1.2 | Trabalho prático | 186 |
| H.2 | Instrumentos e técnicas de medida II | 188 |
| H.2.1 | Preparação | 188 |
| H.2.2 | Trabalho Prático | 188 |
| H.3 | Instrumentos e técnicas de medida III | 190 |
| H.3.1 | Preparação | 190 |
| H.3.2 | Trabalho prático | 191 |
| H.4 | Teoremas Gerais I | 193 |
| H.4.1 | Preparação | 193 |
| H.4.2 | Trabalho Prático | 194 |
| H.5 | Teoremas Gerais II | 195 |

| | | |
|--------|---|-----|
| H.5.1 | Preparação | 195 |
| H.5.2 | Trabalho Prático | 195 |
| H.6 | Circuitos RC/CR em regime transitório | 196 |
| H.6.1 | Preparação | 196 |
| H.6.2 | Trabalho prático | 196 |
| H.7 | Circuito RLC | 197 |
| H.7.1 | Preparação | 197 |
| H.7.2 | Trabalho Prático | 197 |
| H.8 | Filtros RC/CR em regime sinusoidal | 199 |
| H.8.1 | Preparação | 199 |
| H.8.2 | Trabalho prático | 200 |
| H.9 | Filtro RLC em regime sinusoidal | 201 |
| H.9.1 | Preparação | 201 |
| H.9.2 | Trabalho prático | 202 |
| H.10 | Quadripolos | 203 |
| H.10.1 | Preparação | 203 |
| H.10.2 | Trabalho prático | 203 |

Calendarização da disciplina

Semana 1

| | |
|-----------|--|
| T | 1. Introdução e objectivos 2. Conceitos de base Sistemas lineares, dipolos, nós e malhas Corrente, tensão, energia e potência |
| TP | N/A |
| P | N/A |

Semana 2

| | |
|-----------|---|
| T | Corrente alternada: potência, valores médios e eficazes Exemplos |
| TP | Folha 1 - Potência, Corrente e Tensão |
| P | N/A |

Semana 3

| | |
|-----------|--|
| T | Elementos de circuitos Elementos ideais passivos e activos Elementos reais passivos e activos Exemplos de aplicação |
| TP | Folha 1 - Potência, Corrente e Tensão(fim) |
| P | N/A |

Semana 4

| | |
|-----------|--|
| T | 3. Leis e teoremas fundamentais Leis de Kirchoff; Lei dos nós e das malhas. Princípio de sobreposição Teorema de Thevenin Teorema de Norton Exemplos |
| TP | Folha 2 - Elementos de circuitos |
| P | TP 1 - Instrumentos e técnicas de medida I |

Semana 5

| | |
|-----------|---|
| T | Aplicações Divisor de tensão e divisor de corrente Circuitos fechados, abertos e em carga. Exemplos. |
| TP | Folha 3 - Leis e teoremas fundamentais I |
| P | TP 2 - Instrumentos e técnicas de medida II |

Semana 6

-
- | | |
|-----------|--|
| T | 4. Transformada de Laplace e aplicações Sinais de excitação e a família dos impulsos Definição e existência |
| TP | Folha 4 - Leis e teoremas fundamentais II |
| P | TP 3 - Instrumentos e técnicas de medida III |

Semana 7

-
- | | |
|-----------|---|
| T | Pólos e zeros de uma função Teoremas simples da Transformada de Laplace Transformada de Laplace Inversa |
| TP | Folha 5 - Leis e teoremas fundamentais III |
| P | TP 4 - Teoremas gerais I |

Semana 8

-
- | | |
|-----------|---|
| T | Aplicação aos sistemas lineares Equações diferenciais com condições iniciais Função de sistema. Cálculo simbólico |
| TP | Folha 6 - Transformada de Laplace I |
| P | TP 5 - Teoremas Gerais II |

Semana 9

-
- | | |
|-----------|---|
| T | 5. Circuitos em regime transitório circuitos RC, RL e RLC |
| TP | Folha 7 - Transformada de Laplace II |
| P | N/A |

Semana 10

-
- | | |
|-----------|---|
| T | Circuitos em regime transitório - cont. Circuitos RLC e exemplos |
| TP | Folha 8 - Regime Transitório(início) |
| P | TP 6 - Circuitos RC/CR - transitório |

Semana 11

-
- | | |
|-----------|---|
| T | 6. Corrente alternada Regime permanente sinusoidal Notação complexa e impedância Circuitos RC e RLC |
| TP | Folha 8 - Regime Transitório (fim) |
| P | TP 7 - Circuito RLC |

Semana 12

- T** Corrente alternada - cont.
Diagramas
Caracterização da resposta em frequência
- TP** Folha 9 - Regime Permanente Sinusoidal (início)
- P** TP 8 - Filtros RC/CR - sinusoidal

Semana 13

- T** Corrente alternada - fim
Circuitos de primeira e segunda ordem
Exemplos
- TP** Folha 9 - Regime Permanente Sinusoidal (fim)
- P** TP 9 - Filtro RLC em regime sinusoidal

Semana 14

- T** **7. Quadripolos**
Introdução
Parâmetros impedância
Parâmetros admitância
Parâmetros híbridos
Correspondências entre as representações
Exemplos
- TP** Folha 10 - Quadripolos I
- P** TP 10 - Quadripolos

Semana 15

- T** Revisões
- TP** Folha 11 - Quadripolos II
- P** N/A

1 Introdução e objectivos

A teoria dos circuitos trata do estudo do efeito da interligação de componentes eléctricos e electrónicos entre si formando circuitos complexos. Como é de conhecimento geral o fornecimento de energia a um circuito eléctrico formando uma malha fechada permite gerar nesse circuito uma corrente eléctrica. Por exemplo, consideremos o simples caso de um candeeiro que ligamos a uma tomada em casa. Ao ligarmos o interruptor, o que estamos a fazer é fechar um circuito, que inclui uma fonte de alimentação que vem da EDP e um filamento resistivo, que é a lâmpada. A corrente fornecida pela tomada sob uma determinada tensão vai depender da potência da lâmpada, que é inversamente proporcional à resistência da mesma, i.e., quanto maior for a potência, menor será a resistência da lâmpada e maior será corrente eléctrica. A lei fundamental que governa o cálculo das diferentes grandezas eléctricas é obviamente a lei de Ohm. No caso de elementos mais complexos, como por exemplo condensadores e bobines, a relação tensão corrente deixa de ser puramente algébrica e passa a ser do tipo diferencial ou integral, o que complica a análise dos circuitos que contêm estes elementos.

Nesta disciplina serão formuladas as leis fundamentais às quais obedecem cada um dos elementos dos circuitos tomados individualmente e também as regras básicas que permitem o estudo do circuito eléctrico no seu conjunto. Serão igualmente enunciados os princípios que permitem estudar e simplificar porções de circuitos complexos de forma a permitir a dedução da função essencial do dispositivo em análise. Finalmente, um dos principais objectivos, é o de obter uma caracterização do circuito no seu total através de grandezas de entrada e de saída normalizadas, de forma a permitir o seu tratamento em métodos do tipo “caixa preta”. Inversamente, o conhecimento das grandezas de entrada e de saída permitem o estudo e a caracterização de um circuito complexo desconhecido. Devemos ainda referir que a abordagem desta disciplina não é a de uma disciplina de análise de circuitos clássica como se pode encontrar numa licenciatura em Electrónica - correntes fracas de outras Universidades. Trata-se de uma abordagem mais orientada para a noção de sistema, tal como se encontra em Controlo ou Comunicações, previligiando as ferramentas de manipulação e a caracterização de sistemas, mais do que o cálculo sistemático de circuitos complexos com métodos resolventes do tipo matricial ou outros.

2 Conceitos de base

2.1 Sistemas lineares, dipólos, nós e malhas

Um sistema é considerado linear se obedece às condições de homogeneidade e de sobreposição.

Homogeneidade: um sistema é considerado homogêneo se

$$x(t) \Rightarrow y(t), \quad (2-1.1)$$

então

$$kx(t) \Rightarrow ky(t). \quad (2-1.2)$$

Sobreposição: um sistema obedece ao princípio de sobreposição se

$$x_1(t) \Rightarrow y_1(t)$$

$$x_2(t) \Rightarrow y_2(t)$$

então

$$x_1(t) + x_2(t) \Rightarrow y_1(t) + y_2(t). \quad (2-1.3)$$

Mais, um sistema é dito temporalmente invariante se

$$x(t) \Rightarrow y(t) \quad \rightarrow \quad x(t - t_0) \Rightarrow y(t - t_0), t_0 \in \mathfrak{R}. \quad (2-1.4)$$

Os circuitos são sistemas compostos por componentes eléctricos onde os sinais observados são correntes e diferenças de potencial. *dipólos* são elementos que comunicam com o exterior através de dois pólos; a todo o instante a corrente que entra por um dos terminais do dipólo é igual à corrente que sai pelo outro terminal do dipólo (figura 2.1a). Um *nó* é um ponto do circuito que serve de ligação entre dois ou mais dipólos (figura 2.1b). Uma *malha* é um conjunto de dipólos formando um circuito fechado (figura 2.1c).

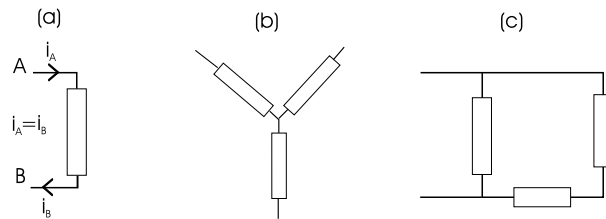


Figura 2.1: dipólo (a), nó (b) e malha (c).

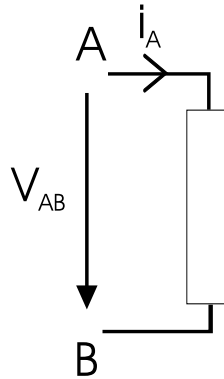


Figura 2.2: dipólo com definição de corrente e tensão.

2.2 Corrente, tensão, energia e potência

A corrente eléctrica é causada pelo movimento dos portadores de carga. A corrente eléctrica num condutor é a quantidade de carga passando em qualquer ponto do condutor por unidade de tempo. A corrente mede-se em amperes (A) e corresponde a uma quantidade de carga de um coulomb (C) atravessando um condutor num segundo. Em geral a corrente define-se como o integral da densidade de corrente sobre a secção do condutor

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}, \quad (2-2.1)$$

onde \mathbf{J} é o vector densidade de corrente em C por m^2 e $d\mathbf{s}$ é o vector elementar de superfície perpendicular a esta. I representa então o *fluxo* de \mathbf{J} através da superfície considerada. Outra forma simples de determinar a corrente eléctrica é a de considerar

$$I = \frac{dQ}{dt}, \quad (2-2.2)$$

onde Q é a carga eléctrica em coulombs (C). Dependendo do sinal dos portadores de carga e/ou do sentido de deslocação assim a corrente num determinado condutor poderá ser considerada positiva ou negativa. Em análise de circuitos é comum adoptar a seguinte convenção (puramente arbitrária): a corrente eléctrica circulando num dipólo (como o da figura 2.2) será positiva quando corresponder a um fluxo de electrões (de carga negativa) movendo do pólo - para o pólo + e indicada com uma seta no sentido da figura. A corrente será considerada negativa no caso contrário.

Existem várias formas de criar uma corrente eléctrica sendo a mais usual a de estabelecer um campo eléctrico que ele mesmo cria uma diferença de potencial que por sua vez cria um movimento de cargas. Escreve-se assim a lei fundamental de Ohm

$$V = RI, \quad (2-2.3)$$

onde R é um coeficiente de proporcionalidade entre a diferença de potencial (ou tensão eléctrica) V e a corrente por ela gerada I . R é chamada resistência do conductor à passagem da corrente eléctrica e depende apenas das características físicas do conductor considerado. Simplesmente podemos dizer que

$$R = \rho \frac{L}{S}, \quad (2-2.4)$$

onde ρ é a resistividade do material conductor, L é o seu comprimento e S a sua secção. R mede-se em Ohms (Ω) e corresponde à resistência de um conductor quando atravessado por uma corrente de um ampere sob a tensão de um volt.

A passagem de corrente eléctrica numa resistência provoca uma dissipação de energia correspondente à passagem de uma carga Q através de uma diferença de potencial V . Assim

$$dW = VdQ, \quad (2-2.5)$$

e portanto a potência, que não é mais do que a energia por unidade de tempo, escreve-se

$$P = \frac{dW}{dt} = V \frac{dQ}{dt} = VI = RI^2 = \frac{V^2}{R}, \quad (2-2.6)$$

onde a energia W se mede em Joules e a potência em Watts ou Joules/s. Em geral, e também por convenção arbitrária, considera-se que a energia é positiva quando é absorvida pelo elemento do circuito (caso da figura 2.2) e negativa no caso contrário.

Nas equações acima consideramos que as grandezas de medida do circuito, tensão, corrente, carga, potência, etc ... são estacionárias, i.e., não variam com o tempo e portanto omitimos a sua notação como funções do tempo. No caso geral porém, estas grandezas são variáveis com o tempo e a sua notação implica $v(t)$, $i(t)$, $q(t)$, $p(t)$, etc...

2.3 Corrente alternada: potência, valores médios e eficazes

Temos vindo a considerar até agora correntes e tensões como funções constantes do tempo. Todos sabemos porém, que os aparelhos em nossa casa funcionam em corrente alternada, i.e., uma corrente (e tensão) que varia em função do tempo. Esta variação temporal pode ser de variadas formas mas a mais corrente é a sinusoidal. Isto significa que, por exemplo, a variação da tensão em função do tempo se pode escrever da seguinte forma

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \phi), \quad (2-3.1)$$

como representado na figura 2.3, onde V_m é o valor máximo da senoide, ω é a pulsação radial, que se mede em rd/s e é igual a $2\pi f$, sendo f a frequência do sinal medido em Hertz e tal que $f = 1/T$ com T o período da onda em segundos; ϕ é chamada a *fase* e mede-se em radianos.

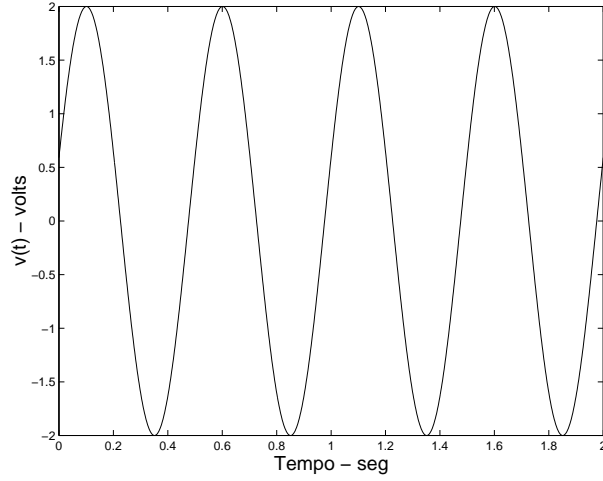


Figura 2.3: onda sinusoidal.

No caso da figura 2.3 notamos que o período é de $T = 0.5$ s, $f = 1/T = 2$ Hz, $V_m = 2$ volts e que quando $t = 0$ temos que $v(0) = 0.591$ volts e portanto podemos deduzir a fase ϕ a partir de (2-3.1)

$$\phi = \arcsin \frac{v(0)}{V_m} = \arcsin \frac{0.591}{2} \approx 0.3 \text{ rd} \approx 17.2 \text{ graus.}$$

O efeito da fase é o de deslocar a senoide ao longo do eixo do tempo; dizemos que a onda se encontra desfasada quando $\phi \neq 0$; se $\phi > 0$, dizemos que a onda se encontra adiantada, isto porque como se pode ver na figura 2.3, o ponto $v(t) = 0$ aparece “antes” de $t = 0$ (fora da figura à esquerda); se por outro lado $\phi < 0$ então a onda diz-se atrasada pois o deslocamento faz-se para a direita e todos os pontos aparecem mais tarde do que deveriam se ϕ fosse igual a zero.

A potência instantânea dissipada, por exemplo, numa resistência R , pela onda $v(t)$ da figura 2.3, é dada por (utilizando (2-2.6))

$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{v(t)^2}{R} = Ri^2(t), \quad (2-3.2)$$

de onde se pode deduzir a potência média num período T

$$\bar{p} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt, \quad (2-3.3)$$

e substituindo (2-3.1) e (2-3.2) em (2-3.3), obtem-se

$$\bar{p} = \frac{V_m^2}{RT} \int_0^T \sin^2(\omega t + \phi) dt, \quad (2-3.4)$$

cuja solução é simplesmente

$$\bar{p} = \frac{V_m^2}{2R}, \quad (2-3.5)$$

que é uma constante que não depende nem da pulsação ω nem da fase ϕ .

Podemos agora fazer a seguinte pergunta: qual seria o valor da fonte de tensão contínua (DC) capaz de dissipar a potência média (2-3.5) na mesma resistência R ? A resposta a esta pergunta é muito simples sabendo que a potência média dissipada por uma fonte DC, de valor E , numa resistência R , se escreve

$$\bar{p}_{DC} = \frac{E^2}{R}, \quad (2-3.6)$$

se igualarmos (2-3.5) e (2-3.6) temos que $E = V_m/\sqrt{2}$. Por definição chama-se *valor eficaz de uma onda alternada, o valor da tensão contínua capaz de dissipar a mesma potência média numa resistência de 1 Ω* . Assim a tensão eficaz da onda sinusoidal (2-3.1) é

$$V_{eff} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}. \quad (2-3.7)$$

Em geral para uma onda alternada $v(t)$ (sinusoidal ou não) de período T define-se o seu valor eficaz como sendo

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt}, \quad (2-3.8)$$

o seu valor médio como

$$\bar{v} = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt, \quad (2-3.9)$$

e o seu valor máximo por

$$V_m = \max_{t \in T} \{v(t)\}. \quad (2-3.10)$$

Exemplo 1: considere a onda sinusoidal

$$i(t) = 5 \sin(314t + 0.27)$$

Para uma resistência de valor $R = 10\Omega$, determine:

- a) a expressão da potência instantânea dissipada.
- b) a potência média dissipada.
- c) o valor eficaz da tensão aos seus terminais.

a) a potência instantânea escreve-se

$$p(t) = v(t)i(t) = Ri(t)i(t) = 10 \times 25 \sin^2(314t + 0.27)$$

b) a potência média é dada por

$$\bar{p} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

onde substituindo a expressão encontrada em a) se obtém

$$\bar{p} = \frac{250}{T} \int_0^T \sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t + 0.27\right) dt$$

onde $T = 2\pi/314 \approx 1/50 = 0.02$ s e ainda

$$\bar{p} = 12500 \int_0^T \frac{1}{2} dt + 12500 \int_0^T \frac{1}{2} \cos\left(\frac{4\pi}{T}t + 0.27\right) dt$$

de onde se vê facilmente que o segundo membro é igual a zero e o primeiro dá

$$\bar{p} = 250/2 = 125 \text{ W}$$

Mais facilmente podia-se ter utilizado directamente a equação (2-3.5) dizendo que $V_m = RI_M$ de onde $\bar{p} = RI_m^2/2$ o que obviamente dá o mesmo resultado $\bar{p} = 10 \times 5^2/2 = 125 \text{ W}$.

c) o valor eficaz da tensão é $V_{eff} = RI_{eff}$ e porque a corrente é sinusoidal então $I_{eff} = I_m/\sqrt{2}$ de onde $V_{eff} = 10 \times 5/\sqrt{2} \approx 35.3 \text{ V}$.

Exemplo 2: considere uma corrente eléctrica alternada com a forma da figura 2.4.

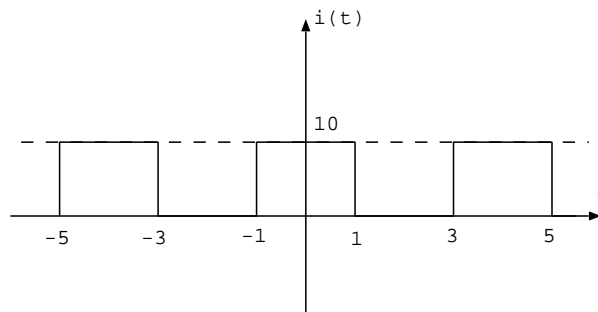


Figura 2.4: onda quadrada.

Calcule:

a) o seu valor máximo I_{\max}

b) o seu valor médio \bar{i}

c) o seu valor eficaz I_{eff}

a) o seu valor máximo é $I_{\max} = 10$ A.

b) o seu valor médio é dado por

$$\bar{i} = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt = \frac{1}{4} \int_0^4 i(t) dt$$

onde se utilizou o facto de que o período da onda quadrada é igual a 4 s. Visto que a corrente $i(t)$ se encontra definida $\neq 0$ nos intervalos $[0, 1]$ e $[3, 4]$ temos que

$$\bar{i} = \frac{1}{4} \int_0^1 10 dt + \frac{1}{4} \int_3^4 10 dt = \frac{20}{4} = 5$$

c) o valor eficaz da corrente é dado por

$$I_{eff}^2 = \frac{1}{4} \int_0^1 10^2 dt + \frac{1}{4} \int_3^4 10^2 dt$$

que feitas as contas permite obter $I_{eff} = \sqrt{50} \approx 7$ A.

2.4 Elementos de circuitos

Um circuito eléctrico complexo obtem-se através da associação de um grande número de elementos simples. Esses elementos podem ser passivos e/ou activos. Um elemento passivo é tal que a energia que o circuito lhe fornece é sempre não negativa. Dependendo do elemento esta energia pode ser dissipada ou armazenada. Um elemento activo pode fornecer energia ao circuito onde está inserido.

2.4.1 Elementos ideais passivos

A resistência: uma resistência R dá origem a um potencial $v(t)$ quando percorrida por uma corrente $i(t)$ (figura 2.5a), é

$$v(t) = Ri(t), \quad (2-4.1)$$

e inversamente

$$i(t) = Gv(t), \quad (2-4.2)$$

onde $G = 1/R$ é uma conductância e se exprime em Ω^{-1} . A resistência equivalente a duas resistências R_1 e R_2 colocadas em série, i.e., tal que a corrente que percorre uma é igual à corrente que percorre a outra é $R_{\text{equiv}} = R_1 + R_2$. Se as resistências se encontrarem em paralelo, i.e., se a tensão aos terminais duma for igual à tensão aos terminais da outra, então a resistência equivalente é evidentemente,

$$\frac{1}{R_{\text{equiv}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (2-4.3)$$

A título de exercício determine a resistência equivalente a **três** resistências colocadas em série e em paralelo. E se em vez de resistências tivermos conductâncias? Qual será a conductância equivalente a duas ou três conductâncias em série e/ou em paralelo?

Como já foi dito acima, a quantidade instantânea de energia posta em jogo numa resistência é sempre positiva, i.e., uma resistência absorve sempre a energia

$$dw(t) = v(t)i(t)dt = Ri^2(t)dt = \frac{v^2(t)}{R}dt. \quad (2-4.4)$$

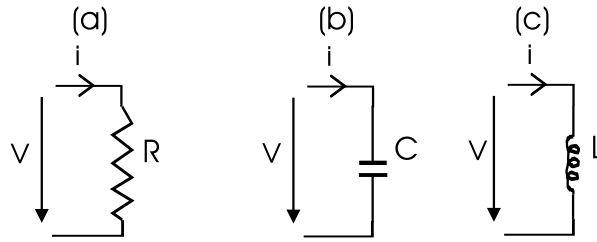


Figura 2.5: dipólo resistivo (a), dipólo capacitivo (b) e dipólo indutivo(c).

O condensador: um condensador C armazena energia sob forma de campo eléctrico entre as suas armaduras. Assim, com as definições da figura 2.5b, temos que

$$q(t) = Cv(t), \quad (2-4.5)$$

e que

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}. \quad (2-4.6)$$

A variação da energia contida num condensador escreve-se

$$dw(t) = v(t)i(t)dt = v(t)Cdv = \frac{1}{2}d(Cv^2(t)), \quad (2-4.7)$$

o que mostra que a energia depende de forma estreita da variação da tensão aos seus terminais: positiva se esta for positiva e negativa no caso contrário. Isto significa que um condensador absorve energia, armazena-a sob forma electrostática, e pode

restitui-la mais tarde. Mais uma vez qual o valor do condensador equivalente a dois condensadores colocados em série ? E em paralelo ?

Bobine(self): uma bobine, de indutância L , armazena energia sob forma de campo magnético. Uma bobine tem como princípio o de se opôr à variação da corrente. Esta corrente cria à sua passagem um fluxo de indução magnética

$$\Phi(t) = Li(t), \quad (2-4.8)$$

que se opõe (pela regra dos três dedos) à causa que o criou (ou seja à corrente). Podemos ainda escrever (figura 2.5c)

$$v(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} = L \frac{di(t)}{dt}. \quad (2-4.9)$$

No caso da bobine a relação energética escreve-se

$$dw(t) = v(t)i(t)dt = Li(t)di = \frac{1}{2}d[Li^2(t)], \quad (2-4.10)$$

que, como no caso do condensador, mostra que a energia pode tomar valores positivos ou negativos consoante a variação, neste caso da corrente eléctrica, que percorre a bobine. As relações energéticas instantâneas (2-4.7) e (2-4.10) permitem-nos calcular o valor total da energia armazenado num condensador e bobine respectivamente, permite-nos calcular

$$W_C = \frac{1}{2}CV^2, \quad (2-4.11)$$

e

$$W_L = \frac{1}{2}LI^2. \quad (2-4.12)$$

Exemplo: no circuito da figura 2.6(a), $L = 5H$ e $R = 1\Omega$. Calcular $v(t)$ quando $i(t)$ tem a forma indicada no gráfico da figura 2.6(b).

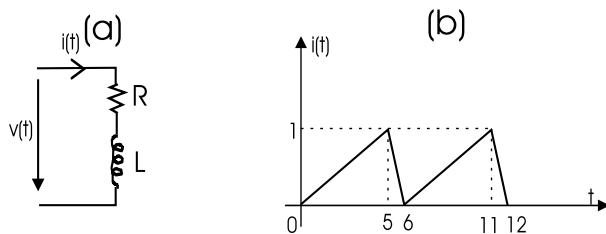


Figura 2.6: (a) circuito RL e (b) corrente $i(t)$.

Começemos por escrever a equação de Ohm no dipólo da figura 2.6(a). Assim temos que a queda de tensão é a soma das tensões aos terminais dos elementos do circuito, i.e.,

$$v(t) = v_R(t) + v_L(t)$$

e escrevendo a mesma relação para cada elemento

$$v_R(t) = Ri(t) \quad (a)$$

$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (b)$$

sabendo que $i(t)$ se escreve a partir da figura 2.6(b) como

$$i(t) = \begin{cases} t/5 & 0 \leq t \leq 5 \\ -t + 6 & 5 \leq t \leq 6 \end{cases}$$

e que depois se repete com um período igual a 6, podemos então escrever (utilizando os valores numéricos)

$$v(t) = \begin{cases} t/5 + 1 & 0 \leq t \leq 5 \\ -t + 1 & 5 \leq t \leq 6 \end{cases}$$

dando lugar à representação gráfica da figura 2.7

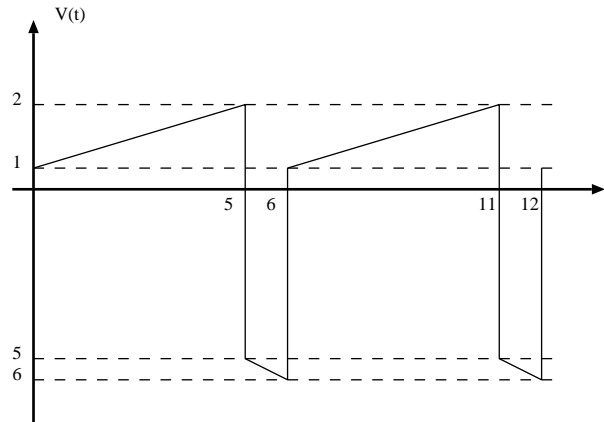


Figura 2.7: tensão aos terminais do circuito da figura 2.6.

2.4.2 Elementos ideais activos

São considerados elementos activos aqueles que fornecem energia ao circuito no qual estão inseridos. Podem ser de dois tipos:

- a) fontes de tensão
- b) fontes de corrente

Uma fonte de tensão ideal é um dispositivo que impõe aos seus terminais uma diferença de potencial constante independentemente da corrente eléctrica que o atravessa. As fontes de tensão são em geral representadas pelos símbolos da figura 2.8, no

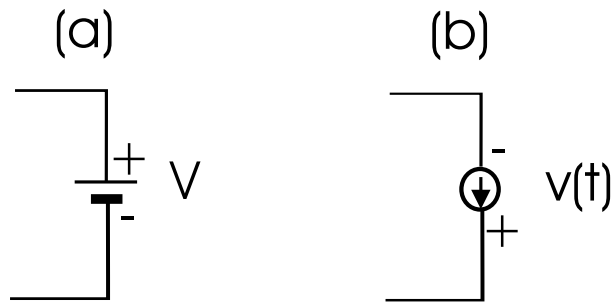


Figura 2.8: fontes ideais de tensão: contínua (a) e alternada (b).

caso de uma fonte de tensão contínua (a) e no caso de uma fonte de tensão alternada (b).

Considera-se que fechar uma fonte ideal de tensão corresponde a substituí-la por um curto circuito, pois a tensão aos terminais de um curto-circuito é igual a zero.

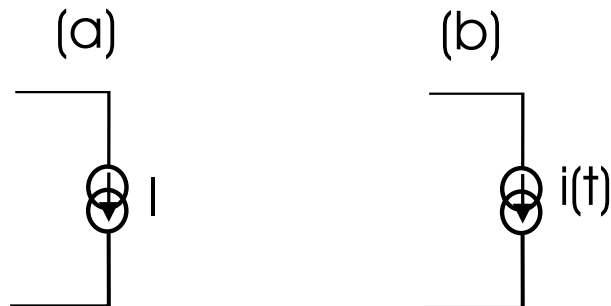


Figura 2.9: fontes ideais de corrente: contínua (a) e alternada (b).

Uma fonte de corrente ideal é um dispositivo que debita uma corrente eléctrica constante qualquer que seja a diferença de potencial aos seus terminais. As fontes de corrente são em geral representadas pelos símbolos da figura 2.9, no caso de uma fonte de corrente contínua (a) e no caso de uma fonte de corrente alternada (b). Considera-se que fechar uma fonte ideal de corrente corresponde a substituí-la por um circuito aberto, pois a corrente que atravessa um circuito aberto é igual a zero. As fontes de corrente e tensão mencionadas acima são chamadas independentes. Para sermos completos devemos ainda mencionar as fontes (de corrente ou tensão) dependentes ou ligadas. Estas são fontes condicionadas (ou comandadas) por uma grandeza definida no circuito. Assim mostramos na figura 2.10 duas fontes controladas uma de corrente e outra de tensão.

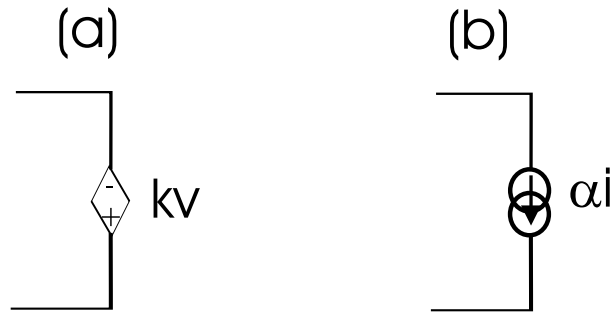


Figura 2.10: fontes controladas: de tensão (a) e de corrente (b).

2.4.3 Elementos reais passivos

Os elementos passivos ideais descritos acima são em geral uma boa aproximação da realidade, sobretudo no caso da resistência. Só em casos muito particulares se deverá ter em conta efeitos de condensador e/ou bobine como defeitos da resistência ideal. Em geral consideram-se bobines reais (ou não ideais) formadas por uma bobine ideal e uma pequena resistência em série (chamada resistência interna), como mostrado na figura 2.11a. Da mesma maneira um condensador não ideal deverá considerar uma resistência (em geral importante) em paralelo chamada resistência de fuga, como representado na figura 2.11b. As equações respectivas são alteradas consequentemente.

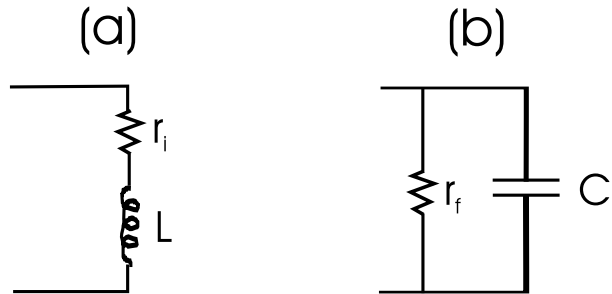


Figura 2.11: elementos passivos não ideais: bobine (a) e condensador (b).

2.4.4 Elementos reais activos

A maior diferença entre o caso ideal e o caso real apresenta-se na representação dos elementos activos, i.e., fontes de tensão e de corrente. A diferença incide no facto de que uma fonte de tensão não ideal não mantém uma tensão constante aos seus terminais qualquer que seja a corrente que a atravessa, e em geral, um aumento da corrente debitada acompanha-se de uma queda na tensão da fonte. Este facto modeliza-se representando uma fonte de tensão real (ou não ideal) colocando em

série uma fonte ideal com uma resistência, chamada resistência interna (figura 2.12a). Podemos então escrever

$$v_{AB} = E - ri, \quad (2-4.13)$$

de onde se deduz que a tensão entre os terminais AB diminui quando i aumenta. Da mesma forma, numa fonte de corrente não ideal a corrente debitada varia com a tensão aos terminais e representa-se usualmente por uma fonte de corrente ideal com uma resistência (geralmente de valor importante) aos seus terminais, chamada também resistência interna (figura 2.12b). Nesse caso a corrente debitada

$$i_B = I + v_{AB}/r, \quad (2-4.14)$$

e pode-se notar que a corrente debitada depende do valor da tensão entre A e B.

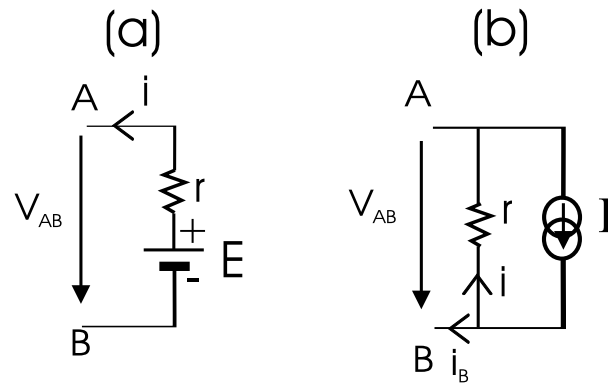


Figura 2.12: fontes não ideais de tensão (a) e de corrente (b).

3 Leis e teoremas fundamentais

Este capítulo estabelece uma série de leis e teoremas fundamentais para a análise de circuitos complexos. Os teoremas expostos constituem assim um conjunto de regras que permitem sistematizar e simplificar a análise de tais circuitos.

3.1 Leis de Kirchhoff

3.1.1 Lei dos nós

A lei dos nós estabelece que: *a soma algébrica das correntes que entram num nó é nula, i.e., que*

$$\sum_n i_n = 0. \quad (3-1.1)$$

Como regra geral admite-se que a corrente em qualquer porção do circuito pode ser indicada a priori sem necessidade de saber se a corrente circula verdadeiramente no sentido indicado. Como convenção, uma corrente indicada como entrando num nó será contada positivamente e negativamente no caso contrário.

3.1.2 Lei das malhas

A lei das malhas estabelece que: *a soma algébrica das tensões ao longo de uma malha fechada é nula, i.e., que*

$$\sum_n v_n = 0, \quad (3-1.2)$$

da mesma forma que para o caso das correntes deve-se começar por estabelecer *a priori* as tensões aos terminais de cada dipólo e o sentido do percurso do cálculo em cada malha. Por convenção as tensões definidas de tal modo que o sentido do percurso entre pelo pólo positivo e saia pelo pólo negativo serão contadas positivamente e negativamente no caso contrário. Na prática uma inversão do percurso corresponderia a inverter o sinal da equação.

Exemplo 1: considere o circuito da figura 3.1. Utilizando a lei dos nós podemos escrever,

$$A : \quad i_5 - i_1 - i_2 = 0 \quad (a)$$

$$B : \quad i_1 + i_3 + i_4 = 0 \quad (b)$$

$$C : \quad i_2 - i_3 = 0 \quad (c)$$

$$D : \quad -i_4 - i_5 = 0 \quad (d)$$

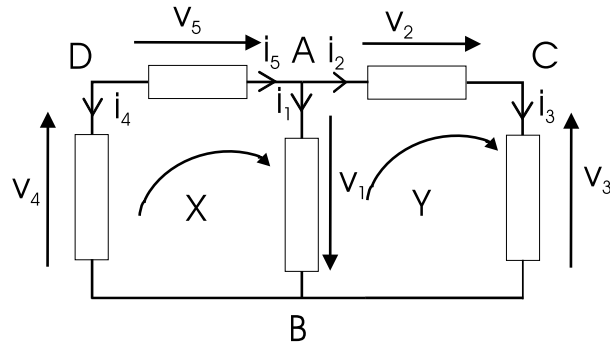


Figura 3.1: exemplo de aplicação.

e considerando os malhas X e Y e os sentidos de percurso e tensões indicadas,

$$X : \quad v_4 + v_5 + v_1 = 0 \quad (a)$$

$$Y : \quad -v_1 + v_2 - v_3 = 0 \quad (b)$$

Exemplo 2: calcule o valor da tensão v_1 no circuito da figura 3.2.

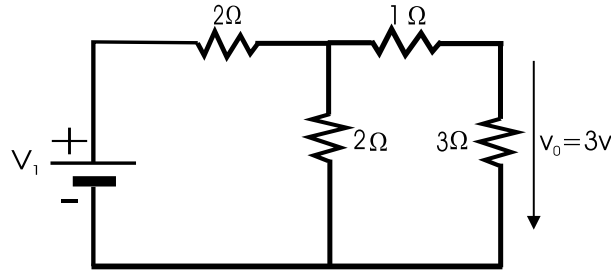


Figura 3.2:

Sabendo que $v_0 = 3$ v, podemos dizer que a corrente i que passa na resistência de 3Ω é $i = 3/3 = 1$ A. Como a corrente i passa igualmente na resistência de 1Ω provoca uma queda de tensão de $1\Omega \times 1A = 1$ V e por isso a soma das duas tensões é igual à tensão v' aos terminais da resistência vertical de 2Ω que é $v' = 1 + 3 = 4$ v. A partir de v' podemos deduzir a corrente que passa na resistência de 2Ω vertical, que é $i' = 4/2 = 2$ A. Visto que temos as correntes i e i' que saem do nó superior então podemos deduzir, pela lei dos nós, a corrente que entra no nó, digamos $i'' = i' + i = 1 + 2 = 3$ A. O problema está quase terminado porque uma vez que temos a corrente debitada pela fonte v_1 , temos a queda de tensão na resistência horizontal de 2Ω que é $v'' = i'' \times 2 = 6$ v e daí, utilizando a lei das malhas na malha da esquerda $v_1 = v'' + v' = 6 + 4 = 10$ v.

Exemplo 3: Ponte de Wheastone fora de equilíbrio (figura 3.3). Calcular o valor da corrente i entre B e D.

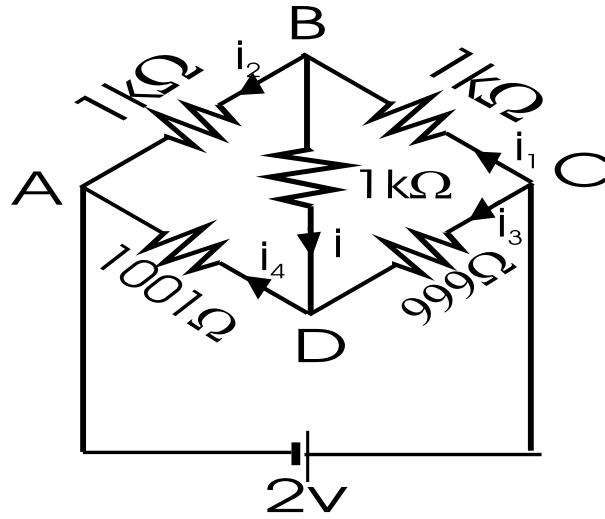


Figura 3.3: ponte de Wheastone.

Trata-se aqui de escrever o conjunto de equações resolvente do circuito:

$$1000i = 1000i_2 - 1001i_4 \quad (a)$$

$$1000i = -1000i_1 + 999i_3 \quad (b)$$

$$E = 999i_3 + 1001i_4 \quad (c)$$

$$i_1 = i_2 + i \quad (d)$$

$$i_4 = i_3 + i \quad (e)$$

substituindo (e) em (a)

$$1000i = 1000i_2 - 1001i_3 - 1001i$$

ou ainda

$$2001i = 1000i_2 - 1001i_3 \quad (f)$$

substituindo (d) em (b)

$$1000i = -1000(i_2 + i) + 999i_3$$

ou ainda

$$2000i = -1000i_2 + 999i_3 \quad (g)$$

fazendo agora (f)+(g) temos que

$$4001i = -2i_3 \quad (h)$$

Voltando ao sistema inicial e substituindo (e) em (c)

$$E = 999i_3 + 1001(i_3 + i)$$

ou

$$i_3 = \frac{E - 1001i}{2000} \quad (i)$$

substituindo esta última equação na anterior, i.e., (i) em (h), podemos escrever

$$4001i = -2 \frac{E - 1001i}{2000} = \frac{-E}{1000} + \frac{2002}{2000}i$$

e resolvendo em relação a i obtemos o resultado pretendido

$$i = -0.5\mu\text{A}$$

o que significa que a ponte está desequilibrada e a corrente circula no sentido contrário ao representado na figura 3.3.

3.2 Princípio de sobreposição

O princípio de sobreposição enuncia-se do seguinte modo:

a corrente (ou tensão) gerada numa determinada porção dum circuito é a soma algébrica das correntes (ou tensões) provocadas por cada uma das fontes do circuito consideradas isoladamente

por outras palavras, a corrente num determinado elemento dum circuito pode-se calcular somando a corrente provocada nesse elemento por cada uma das fontes do circuito isoladamente desligando todas as outras.

Exemplo: dado o circuito da figura 3.4, determine a tensão V_2 , por aplicação do teorema de sobreposição

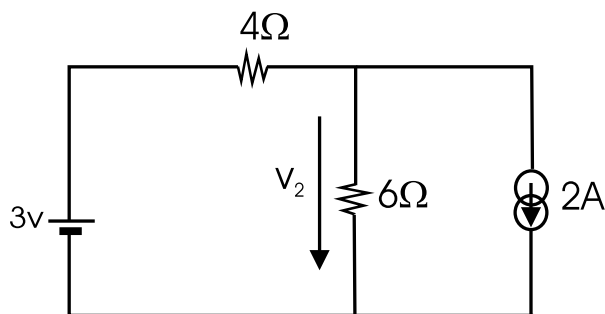


Figura 3.4: circuito com duas fontes independentes.

Vamos então considerar primeiro sómente a fonte de tensão, i.e., vamos desligar a fonte de corrente, o que equivale a substitui-la por um circuito aberto. Nesse caso obtemos apenas uma malha fechada com uma fonte de tensão de 3 V e duas

resistências. A corrente i que circula na malha é dada por $i = 3/(4 + 6) = 0.3$ A. Então podemos escrever a tensão $V_{2v} = 6 \times 0.3 = 1.8$ V. Agora vamos desligar a fonte de tensão o que corresponde a substituí-la por um curto-circuito, ficando apenas a fonte de corrente debitando em duas resistências em paralelo. Podemos então escrever a tensão devida à fonte de corrente que é $V_{2i} = -2 \times (4/6) = -4.8$ V. Então a tensão total $V_2 = V_{2v} + V_{2i} = 1.8 - 4.8 = -3$ V.

3.3 Teorema de Thevenin

Este teorema muito útil em análise de circuitos enuncia-se da seguinte forma:

qualquer circuito “visto” entre dois terminais A e B é equivalente a uma fonte de tensão de valor V_{th} igual à tensão em aberto V_{AB} entre A e B em série com uma resistência interna R_{th} igual à resistência medida entre A e B quando todas as fontes independentes existente no circuito forem desligadas

3.4 Teorema de Norton

Este teorema é o análogo de Thevenin para as correntes e enuncia-se

qualquer circuito “visto” entre dois terminais A e B é equivalente a uma fonte de corrente de valor I_N igual à corrente em curto circuito I_{CC} entre A e B em paralelo com uma resistência interna $R_N = R_{th}$ igual à resistência medida entre A e B quando todas as fontes independentes existentes no circuito forem desligadas

Exemplo: considere de novo a figura 3.4. Calcule o gerador de Thevenin equivalente à fonte de tensão e às duas resistências visto aos terminais da fonte de corrente

Por aplicação da definição, obtemos o circuito da figura 3.5 abaixo

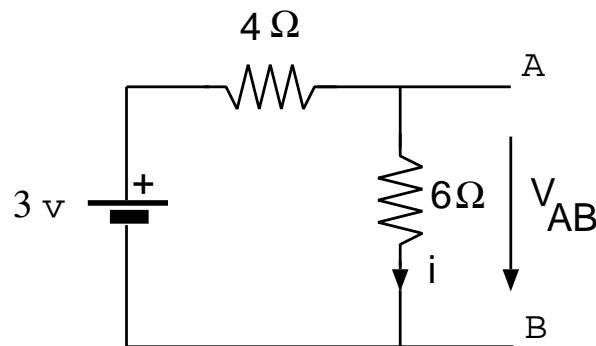


Figura 3.5: circuito visto aos terminais da fonte de corrente.

de onde podemos calcular a tensão do gerador de Thevenin $V_{AB} = 6 \times i$, onde i é a corrente na malha fechada. Esta corrente é dada pela fonte de tensão a dividir pela somas das resistências que estão em série

$$i = \frac{3}{4 + 6} = 0.3A$$

e então $V_{th} = V_{AB} = 6 \times 0.3 = 1.8$ V. A resistência equivalente de Thevenin é então obtida desligando a fonte de tensão na figura acima, i.e., substituindo-a por um curto-circuito, e então a resistência vista entre os pontos A e B é

$$R_{th} = 4//6 = \frac{4 \times 6}{4 + 6} = 2.4\Omega$$

portanto o circuito de Thevenin equivalente é o da figura 3.6.

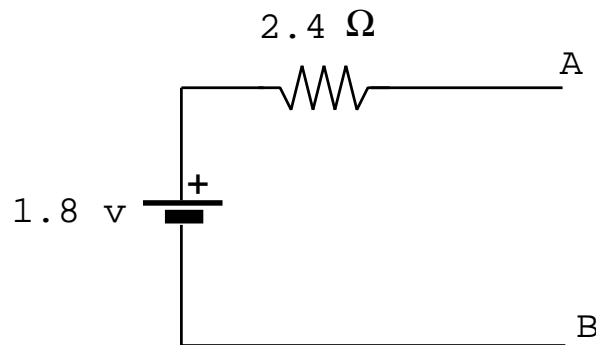


Figura 3.6: circuito de Thevenin equivalente.

No que diz respeito a Norton, seria fácil a partir do circuito inicial da figura 3.5 fazer um curto circuito à saída obtendo

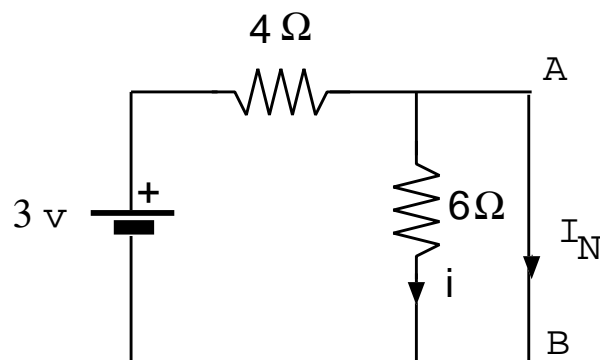


Figura 3.7: circuito para a aplicação de Norton.

Onde a corrente de Norton $I_N = 3v/4\Omega = 0.75$ A, já que a resistência de 6Ω se encontra curto circuitada. A resistência de Norton equivalente é igual à de Thevenin e igual a 2.4Ω . Assim o gerador de Norton equivalente será

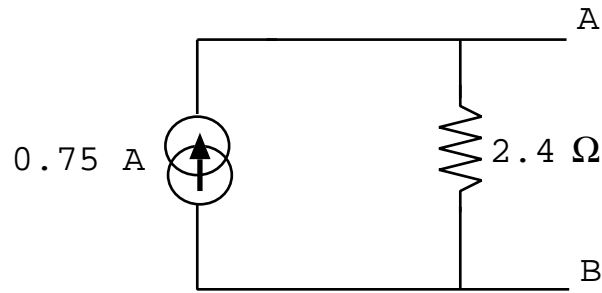


Figura 3.8: circuito de Norton equivalente.

3.5 Aplicações

3.5.1 Divisor de tensão e divisor de corrente

Considere o circuito simples da figura 3.9.

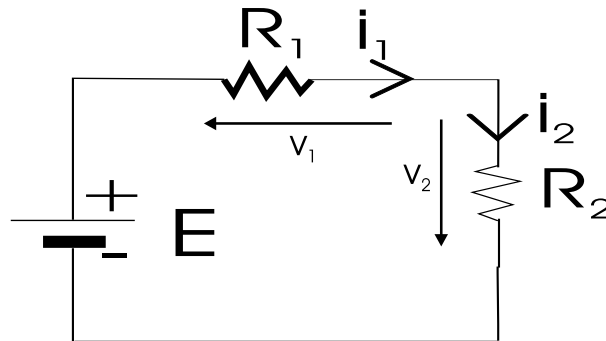


Figura 3.9: divisor de tensão.

Podemos escrever as seguintes relações:

$$i_1 - i_2 = 0$$

$$-E - v_1 + v_2 = 0,$$

portanto, $i_1 = i_2 = i$ e $v_2 = E + v_1$. Mas

$$v_1 = -R_1 i \quad \text{e} \quad i = v_2 / R_2,$$

e assim

$$v_2 = E - \frac{R_1}{R_2} v_2,$$

resolvendo em relação a v_2 obtemos que

$$v_2 = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2}, \tag{3-5.1}$$

que é chamada a equação do divisor de tensão.

Considere agora o circuito da figura 3.10. Podemos neste caso escrever as seguintes relações:

$$i_1 = \frac{E}{R_1},$$

$$i_2 = \frac{E}{R_2},$$

$$i = i_1 + i_2 = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)E;$$

a partir da terceira equação acima determinar a tensão E e substituir nas duas primeiras obtendo

$$E = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i,$$

e

$$i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i \quad i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i, \quad (3-5.2)$$

esta é chamada a equação do divisor de corrente e é também muito utilizada na prática em análise de circuitos.

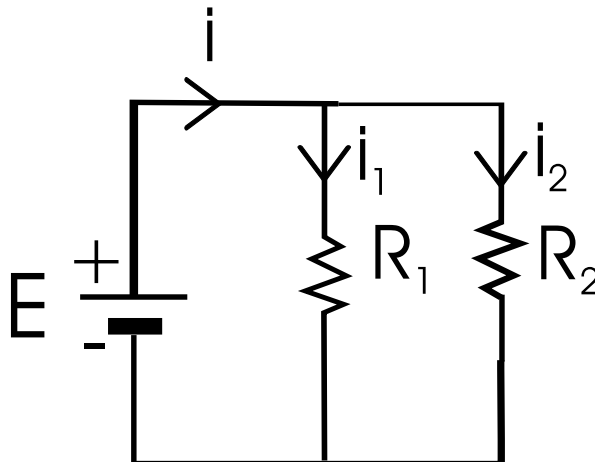


Figura 3.10: divisor de corrente.

3.5.2 Circuitos fechados, abertos e em carga

Um circuito é dito em aberto quando a corrente através de dois dos seus terminais é igual a zero (figura 3.11(a)). Da mesma forma um circuito é dito em curto-circuito quando a tensão entre dois dos seus terminais é igual a zero (figura 3.11(b)). Por fim um circuito é dito em carga quando entre dois dos seus terminais se encontra

uma resistência de valor finito diferente de zero (figura 3.11(c)). Nesse caso podemos escrever

$$v = R_L i. \quad (3-5.3)$$

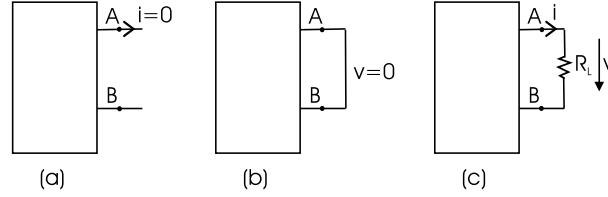


Figura 3.11: circuito aberto (a), circuito fechado (b) e em carga (c).

Porém esta equação tem apenas em linha de conta a carga R_L . Qual o valor da tensão entre A e B quando $R_L = \infty$? Qual o valor da corrente quando $R_L = 0$? Estas perguntas só terão resposta quando conhecermos o circuito que se encontra carregado por R_L . Vamos aplicar o teorema de Thevenin e considerar que o circuito se pode representar por uma fonte de tensão V_{th} em série com uma resistência R_{th} como indicado na figura 3.12(a).

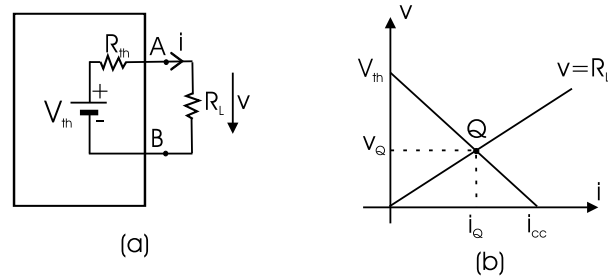


Figura 3.12: circuito em carga resistiva (a) e recta de carga (b).

Neste caso podemos escrever

$$v = V_{th} - R_{th} i, \quad (3-5.4)$$

e também a recta de carga

$$v = R_L i. \quad (3-5.5)$$

Ambas as rectas podem ser representadas num gráfico v em função de i como indicado na figura 3.12(b). Podemos constatar que:

a) a equação (3-5.4) representa um segmento de recta de inclinação negativa igual a $\Delta v / \Delta i = R_{th}$ e caracteriza o gerador de Thevenin.

b) a equação (3-5.5) representa um segmento de recta de inclinação positiva igual a R_L e caracteriza a carga do circuito.

c) a intersecção das duas curvas obtem-se da resolução do sistema

$$\begin{cases} v = V_{th} - R_{th}i \\ v = R_L i \end{cases} \quad (3-5.6)$$

e permite obter as coordenadas do *ponto de funcionamento* Q , que são

$$i_Q = \frac{V_{th}}{R_L + R_{th}} \quad (3-5.7)$$

$$V_Q = \frac{R_L V_{th}}{R_L + R_{th}} \quad (3-5.8)$$

d) a ordenada na origem da curva (3-5.4) é V_{th} , i.e., o valor da tensão de Thevenin.

e) o valor da corrente de curto-circuito, i.e., para $v = 0$, é $i_{cc} = V_{th}/R_{th}$ ou seja a corrente de Norton I_N .

As rectas da figura 3.12(b) definem completamente o funcionamento do circuito em questão e através delas poderemos determinar tanto o circuito de Thevenin como o de Norton equivalentes.

3.5.3 Potência

Considerando ainda o circuito da figura 3.12(a) podemos calcular a potência dissipada na resistência R_L como

$$P = R_L i_Q^2 = \frac{R_L}{(R_L + R_{th})^2} V_{th}^2. \quad (3-5.9)$$

Se derivarmos esta equação em relação a R_L obtemos

$$\frac{dP}{dR_L} = \frac{V_{th}^2 (R_L + R_{th})^2 - 2(R_L + R_{th}) R_L V_{th}^2}{(R_L + R_{th})^4}, \quad (3-5.10)$$

de onde podemos deduzir que a derivada se anula para

$$R_L + R_{th} = 2R_L \Rightarrow R_L = R_{th}. \quad (3-5.11)$$

Substituindo R_L por R_{th} na expressão (3-5.9) obtemos o valor da potência máxima que pode ser dissipada na carga

$$P_{max} = \frac{V_{th}^2}{4R_{th}}. \quad (3-5.12)$$

A variação da potência em função da resistência de carga está representada no gráfico da figura 3.13.

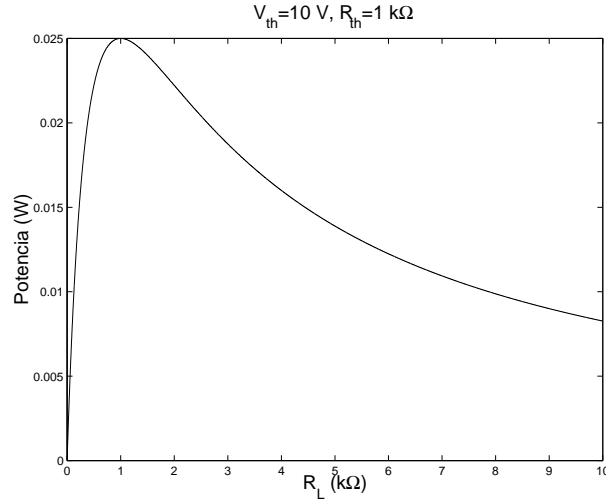


Figura 3.13: potência dissipada numa resistência R_L com $V_{th}=10$ v e $R_{th}=1$ k Ω .

Deste cálculo podemos deduzir que uma fonte fornece o máximo de potência a uma carga quando esta é igual ao valor da resistência interna da fonte. Esta é chamada a condição de adaptação da carga à fonte e permite obter uma transferência máxima de energia muitas vezes procurada em certos circuitos. Quando em vez disso, a resistência interna é muito inferior à resistência de carga $R_{th} \ll R_L$, diz-se que o “ataque” à carga se faz em tensão ou de modo equivalente que a carga não carrega o circuito. Inversamente se por sua vez a resistência interna é muito superior à resistência de carga $R_{th} \gg R_L$, diz-se que o “ataque” à carga é feito em corrente e que neste caso a carga carrega o circuito.

3.5.4 Exemplos

Exemplo 1: considere o circuito da figura 3.14:

Começemos por aplicar o teorema de sobreposição segundo o qual poderemos dizer que a corrente na carga R_L é $i = i_J + i_E$ devido às contribuições separadas da fonte de tensão E e da fonte de corrente J . Temos portanto os esquemas representados em 3.15(a) e 3.15(b) respectivamente. Utilizando o divisor de tensão na figura 3.15(a) temos que $i_E R_L = (R_2 // R_L) E / [R_1 + (R_2 // R_L)]$ ou seja $i_E = 27.3$ mA. Utilizando agora o divisor de corrente na figura 3.15(b) temos que $i_J = -(R_1 // R_2) J / [R_L + (R_1 // R_2)]$, i.e., $i_J = -272.7$ mA, e o teorema de sobreposição diz-nos que

$$i = i_E + i_J = -245 \text{ mA}.$$

Para poderemos verificar este resultado de forma simples vamos calcular o gerador de Thevenin equivalente entre A e B. Para começar podemos calcular o gerador de

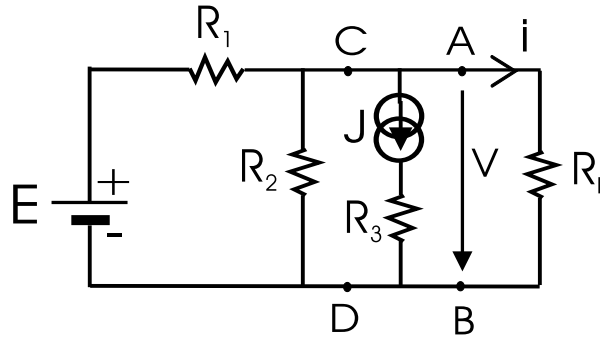


Figura 3.14: exemplo de aplicação: $R_1 = 100\Omega$, $R_2 = 300\Omega$, $R_3 = 100\Omega$, $R_L = 200\Omega$, $E=10$ V, $J=1$ A.

Thevenin visto entre os pontos C e D da figura 3.14 e obter a tensão de Thevenin E' pelo divisor de tensão

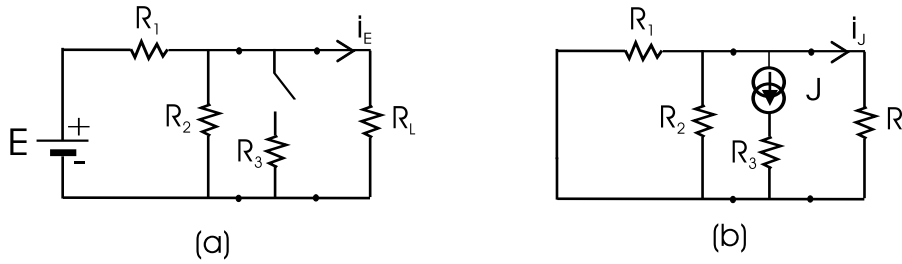


Figura 3.15: teorema de sobreposição.

$$E' = \frac{300 \times 10}{300 + 100} = 7.5v,$$

e a resistência R'

$$R' = 100//300 = 75\Omega,$$

e portanto o esquema equivalente da figura 3.16.

Óbviamente fazendo o cálculo da tensão de Thevenin entre A e B estes dois pontos estarão em aberto e teremos que a corrente que circulará na única malha do circuito será igual a $J = 1$ A. Nesse caso a queda de tensão em R' será de $R'J = 75$ v e a tensão medida entre A e B tendo em conta o sentido de circulação de J é $V_{th} = E' - R'J = -67.5$ v. A resistência de Thevenin é neste caso $R_{th} = R' = 75\Omega$ e portanto temos finalmente o circuito equivalente da figura 3.17

da qual se tira facilmente a corrente i atravessando R_L como sendo

$$i = \frac{V_{th}}{R_{th} + R_L} = \frac{-67.5}{275} = -245\text{mA},$$

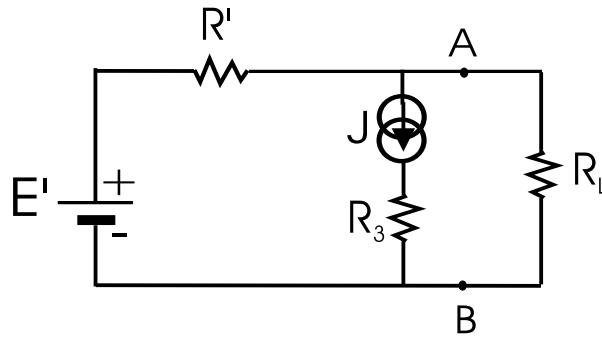


Figura 3.16: esquema da figura 3.14 simplificado.

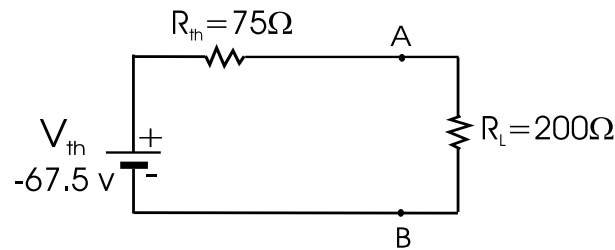


Figura 3.17: circuito de Thevenin equivalente.

idêntico ao valor já calculado anteriormente. Utilizando o teorema de Norton, podemos partir da figura 3.16 da qual calculamos a corrente em curto-circuito entre A e B, I_N como representado na figura 3.18(a). Observando com atenção esta figura determinamos que $i' = J + I_N$ e que $i' = 7.5/75 = 0.1$ A. Deste modo determinamos $I_N = -0.9$ A. R_{th} tem evidentemente o mesmo valor de 75Ω e obtemos o circuito de Norton equivalente da figura 3.18(b)

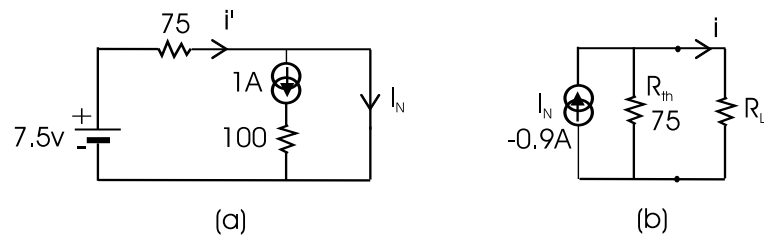


Figura 3.18: circuito simplificado (a) e Norton equivalente (b).

de onde o divisor de corrente nos permite obter directamente o valor de $i = R_{th}I_N/(R_{th} + R_L) = -245$ mA.

Exemplo 2: dado o circuito da figura 3.19, determine v_4 e i_4 : a) utilizando o teorema de Thevenin e b) utilizando o teorema de Norton.

a) a resistência equivalente de Thevenin, R_{th} calcula-se desligando a fonte de tensão,

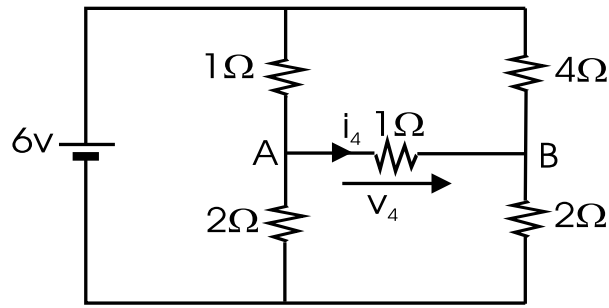


Figura 3.19:

i.e., substituindo-a por um curto-circuito e calculando a resistência equivalente "vista" entre A e B que se escreve

$$R_{th} = 1//2 + 4//2 = \frac{2}{3} + \frac{8}{6} = 2\Omega$$

A tensão equivalente de Thevenin, V_{th} determina-se colocando o circuito em vazio, i.e., retirando a resistência de 1Ω onde passa i_4 e considerando que a corrente que sai por A é zero. Assim podemos escrever que a corrente i que sai da fonte é igual à corrente i_1 que passa pelas resistências de 1Ω e 2Ω do lado esquerdo, mais a corrente i_2 que passa pelas resistências de 4Ω e 2Ω do lado direito.

$$i = i_1 + i_2$$

sabendo que i pode ser calculado como

$$i = \frac{6}{R_{eq}}$$

onde R_{eq} é a resistência equivalente ao total

$$R_{eq} = (1 + 2)/(4 + 2) = 2\Omega$$

deduzimos que $i = 6/2 = 3$ A. Utilizando o divisor de corrente

$$i_1 = \frac{4 + 2}{(4 + 2) + (1 + 2)} i = 2\text{A}$$

e por subtração $i_2 = i - i_1 = 3 - 2 = 1$ A. Finalmente podemos calcular V_{th} ,

$$V_{th} = V_A - V_B = 2i_1 - 2i_2 = 4 - 2 = 2\text{v}$$

A figura 3.20 mostra o circuito de Thevenin equivalente, de onde podemos escrever que

$$v_4 = 2/3\text{v} \quad i_4 = v_4/1 = 2/3\text{A}$$

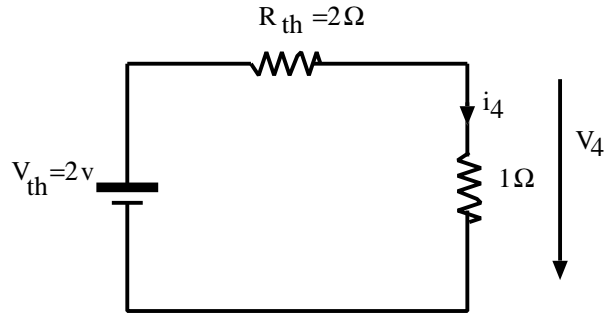


Figura 3.20: circuito de Thevenin equivalente.

b) para calcular o equivalente de Norton basta saber que a resistência equivalente é a mesma que no caso Thevenin e o valor do gerador de corrente I_N é dado pela corrente em curto circuito entre A e B. Visto que A e B estão ao mesmo potencial podemos escrever que a tensão v_2 aos bornos das resistências de $2\ \Omega$ é dado pelo divisor de tensão

$$v_2 = \frac{2//2 \times 6}{2//2 + 1//4} = 30/9 = 3.33\text{v}$$

e então a tensão v_1 aos bornos da resistência de 4 e $1\ \Omega$ é dada por $v_1 = 6 - v_2 = 2.66\text{ v}$. A partir daí basta determinar a corrente i_1 na resistência de $1\ \Omega$ $i_1 = 2.66/1 = 2.66\text{ A}$, enquanto que a corrente i_2 na resistência de $2\ \Omega$ é dada por $i_2 = v_2/2 = 3.33/2 = 1.66\text{ A}$ escrever a lei dos nós tal que

$$I_N = i_1 - i_2 = 2.66 - 1.66 = 1\text{A}$$

O circuito de Norton equivalente é dado na figura 3.21

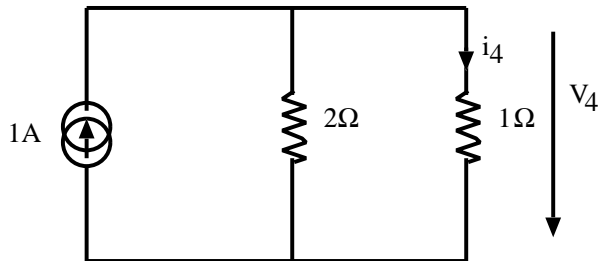


Figura 3.21: circuito de Norton equivalente.

Óbviamente $v_4 = 1 \times 2//1 = 2/3\text{ v}$ e $i_4 = v_4/1 = 2/3\text{ A}$, mesmo resultado que em a).

Exemplo 3: dado o circuito da figura 3.22, calcule o valor da resistência R_L para que as fontes librem potência máxima em R_L . Calcule também o valor dessa potência máxima ($R_1 = 20\Omega$, $R_2 = 5\Omega$).

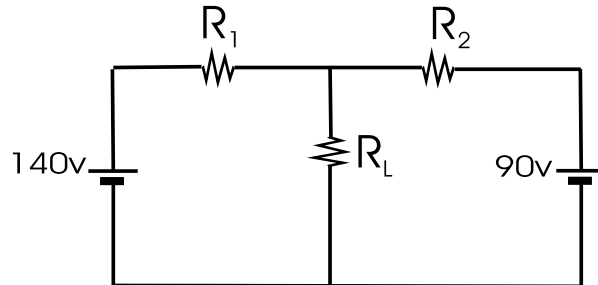


Figura 3.22: circuito Exemplo 3.

Vamos, por exemplo, começar por determinar o gerador de Thevenin equivalente visto aos terminais de R_L . Segundo a definição o gerador V_{th} é a tensão medida aos bornos de R_L em vazio. Assim, retirando R_L o circuito resume-se a uma única malha na qual podemos calcular a corrente i que circula,

$$i = \frac{140 - 90}{R_1 + R_2} = 2\text{A}$$

a partir da corrente podemos calcular a queda de tensão, por exemplo aos bornos de R_2 e consecutivamente a tensão V_{th} ,

$$V_{th} = 90 + 2 \times 5 = 100\text{v}$$

por outro lado R_{th} é

$$R_{th} = 5 // 20 = 4\Omega$$

O circuito equivalente encontra-se na figura 3.23 Segundo foi demonstrado durante a

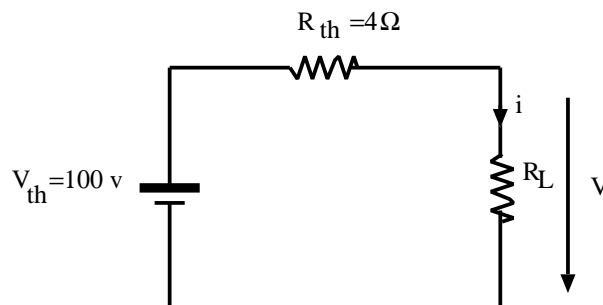


Figura 3.23: circuito de Thevenin equivalente ao da figura 3.22.

aula teórica a potência máxima é libertada em R_L quando $R_L = R_{th} = 4\Omega$. No caso

em que $R_L = R_{th}$ o valor da potência máxima é dado por $P_{\max} = iv$ onde

$$i = \frac{V_{th}}{R_{th} + R_L} = \frac{100}{8} = 12.5\text{A}$$

e através do divisor de tensão

$$v = V_{th} \frac{R_{th}}{R_{th} + R_L} = 50\text{v}$$

e $P_{\max} = 625 \text{ W}$.

Exemplo 4: Calcule

- calcule o equivalente de Norton do circuito da figura 3.24 entre A e B.
- calcule a potência máxima que poderia ser fornecida a uma resistência R colocada entre A e B
- que valor deverá ter R para a potência ser máxima

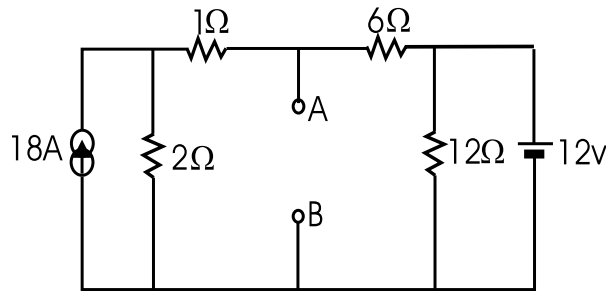


Figura 3.24: circuito Exemplo 4.

a) comecemos pela resistência equivalente $R_{th} = 6/3 = 2\Omega$. Agora para a corrente de Norton I_N no curto circuito entre A e B podemos fazer utilizando o teorema de sobreposição

$$I_N = I_{N1-\text{fonte de corrente}} + I_{N2-\text{fonte de tensao}}$$

para I_{N1} temos o circuito da figura 3.25(a) uma vez que desligada a fonte de tensão ou ainda o circuito da figura 3.25(b) visto que a resistência de 12Ω se encontra curto circuitada. A partir da figura 3.25(b) podemos dizer que $i_3 = 0$ e portanto que $I_{N1} = i_2$ e através do divisor de corrente

$$I_{N1} = i_2 = \frac{2 \times 18}{2 + 1} = 12\text{A}$$

Para I_{N2} devemos desligar, i.e., substituir por um circuito aberto, o gerador de corrente de 18 A obtendo assim o circuito da figura 3.26(a), mas como as resistências de

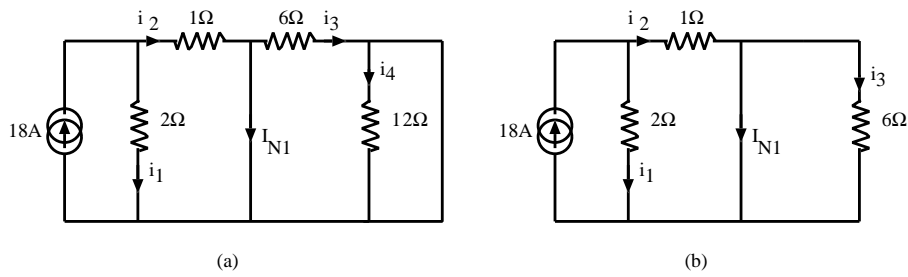


Figura 3.25: circuitos simplificados do da figura 3.24: desligando a fonte de tensão (a) e simplificando a resistência de 12 Ω (b).

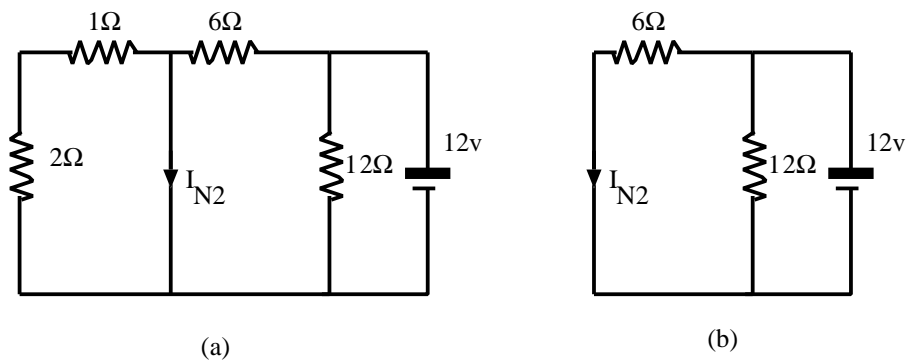


Figura 3.26: circuitos simplificados do da figura 3.24: desligando a fonte de corrente (a) e simplificando as resistências de 1 e 2 Ω (b).

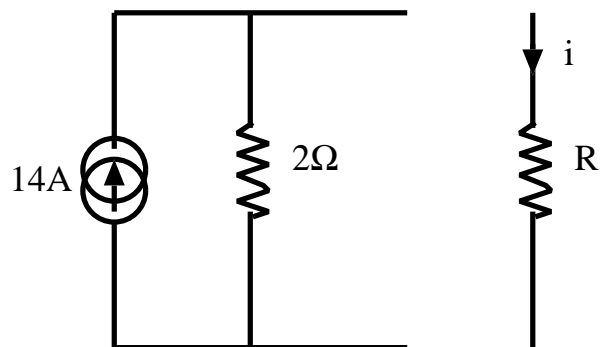


Figura 3.27: circuito de Norton equivalente.

1 Ω e 2 Ω se encontram curto circuitadas podemos deduzir o esquema equivalente da figura 3.26(b). Deste último podemos escrever directamente $I_{N2} = 12/6 = 2$ A. Daí que $I_N = 12 + 2 = 14$ A, obtendo o circuito de Norton equivalente da figura 3.27.

b) a potência debitada numa resistência R colocada entre A e B é $P = Ri^2$ onde a

corrente i pode ser calculada através do divisor de corrente

$$i = \frac{2 \times 14}{2 + R}$$

e então a potência

$$P = \frac{R28^2}{(2 + R)^2}$$

c) a potência máxima obtem-se quando $R = R_{th} = 2\Omega$, substituindo na relação anterior temos $P_{\max} = 98 \text{ W}$.

4 Transformada de Laplace e aplicações

A utilidade da Transformada de Laplace (TL) decorre da necessidade de representar funções temporais no domínio da frequência complexa ou plano complexo, no qual a variável, geralmente designada pela letra s ou p , é uma variável complexa $p = \sigma + j\omega$ ¹. Devido à utilidade da TL na manipulação de funções de variável complexa, tornou-se um utensílio essencial na análise e na síntese de sistemas lineares.

4.1 Sinais de excitação e a família dos impulsos

Antes de abordar a definição da Transformada de Laplace convém começar por definir determinados tipos de sinais de excitação normalmente utilizados no estudo de sistemas lineares que constituem o que é normalmente designado de "família dos impulsos". A família dos impulsos são utilizados para representar o funcionamento não linear de interruptores. Começemos por considerar o sinal representado na figura 4.1.

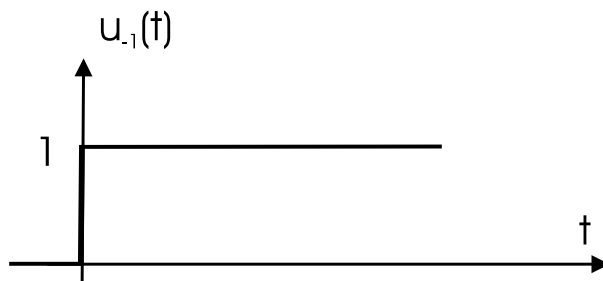


Figura 4.1: degrau unidade.

Trata-se da função degrau unidade cujo símbolo usual é $u_{-1}(t)$ ou simplesmente $u(t)$ e é definida por

$$u_{-1}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (4-1.1)$$

é o caso típico de uma função que visa representar o funcionamento descontínuo, por exemplo, de um interruptor. Em geral, qualquer função com um número finito de descontinuidades pode ser representada por uma soma de funções degrau unidade devidamente ponderadas e atrasadas ou adiantadas como exemplifica a figura 4.2.

neste exemplo a função temporal $f(t)$ pode ser formada por

$$f(t) = A_1 u_{-1}(t - t_1) - (A_1 - A_2) u_{-1}(t - t_2) \quad (4-1.2)$$

¹a notação s é frequentemente utilizada na literatura anglo-saxónica, no entanto a notação p permite uma menor confusão na manipulação de sinais, normalmente designados também pela letra s

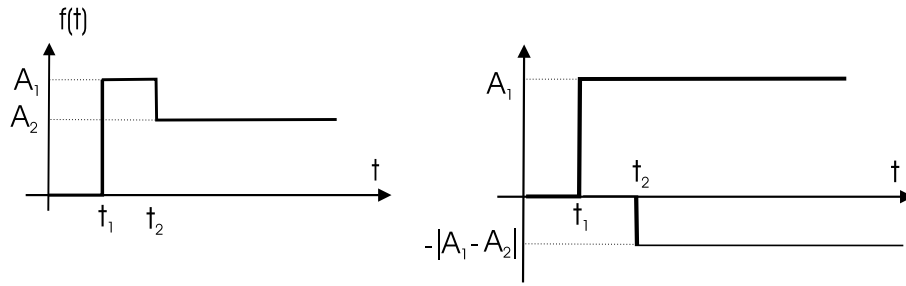


Figura 4.2: decomposição de uma função descontínua.

Por integração da função degrau unidade obtem-se a função $u_{-2}(t)$ definida por

$$u_{-2}(t) = \int_0^t u_{-1}(\tau) d\tau = tu_{-1}(t) = \begin{cases} t & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (4-1.3)$$

à qual se chama rampa unitária e que está representada na figura 4.3.

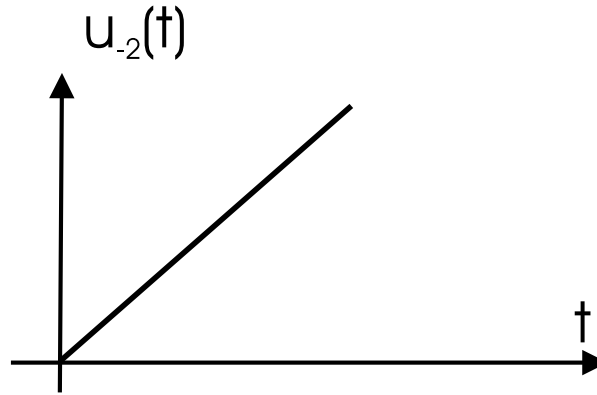


Figura 4.3: rampa unitária.

A generalização do conceito de integração exposto na passagem do degrau unitário à rampa unitária leva ao integral de ordem n

$$u_{-n}(t) = \left[\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right] u_{-1}(t) \quad n = 2, 3, \dots \quad (4-1.4)$$

Existe ainda um último tipo de excitação impulsiva, que é chamado impulso de Dirac e que se reveste de particular importância na análise de regimes transitórios. O impulso de Dirac (ou simplesmente Dirac) obtem-se não pela integração da função degrau unidade mas sim pelo processo inverso ou seja a sua derivação

$$u_0(t) = \frac{du_{-1}(t)}{dt}, \quad (4-1.5)$$

a notação usual para o Dirac é $\delta(t) = u_0(t)$. Evidentemente, o cálculo feito em (4-1.5) não é possível em análise tradicional, pois sendo a função degrau unidade uma função descontínua a sua derivada não existe. Portanto o Dirac, derivada do degrau unidade, é uma função sempre nula salvo para a origem onde toma um valor infinito. Em termos rigorosos o Dirac sai da definição clássica de função e a sua definição requer a introdução da noção de função generalizada, ou distribuição, que ultrapassa largamente o âmbito desta disciplina. Assim, para introduzirmos a noção física do Dirac consideremos a figura 4.4.

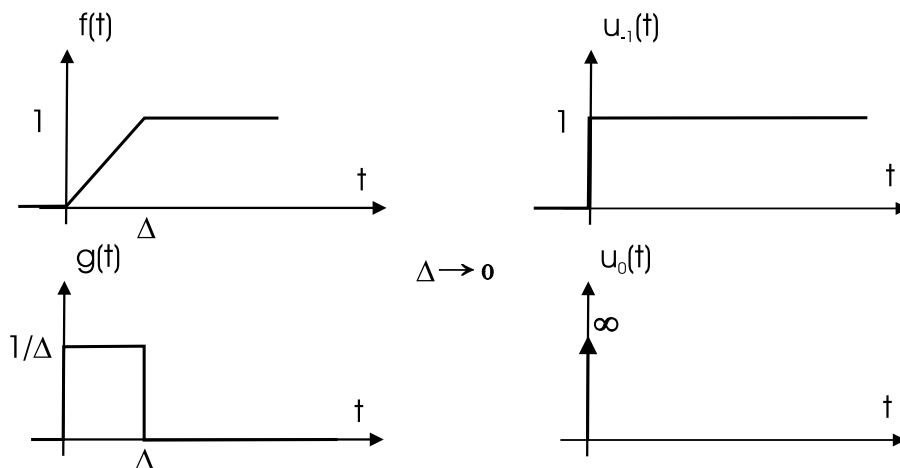


Figura 4.4: família de impulsos como casos limite.

Nesta figura podemos observar uma função $f(t)$ e a sua derivada $g(t)$. Quando fazemos Δ tender para 0 estas duas funções tendem respectivamente para a função degrau unidade e para o Dirac desenhados à direita.

4.2 Transformada de Laplace

4.2.1 Definição e existência

Começaremos pela sua definição no caso geral, que vem essencialmente da definição de Transformada de Fourier (TF), e que é

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt, \quad (4-2.6)$$

que é denominada Transformada de Laplace (TL) bilateral, devido ao domínio de integração se estender de $-\infty$ a $+\infty$. Devido ao facto de, na prática, nos interessarmos quase exclusivamente pelas funções causais que são nulas para $t \leq 0$, seremos levados

a utilizar mais frequentemente a TL unilateral que se escreve

$$F(s) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt, \quad (4-2.7)$$

na qual devemos no entanto precisar que o limite inferior deste integral inclui o ponto de origem do eixo do tempo; em particular, um impulso de Dirac na origem deverá ser tido em conta na TL. A transformada inversa é obtida, sempre através da analogia com a TF, por

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds, \quad (4-2.8)$$

onde, neste caso, o integral é de variável complexa.

Uma das questões mais importante no cálculo da TL é, antes de mais, a da sua existência. Já sabemos, a partir da TF, que a TL existe quando o integral de definição converge no intervalo considerado. Em geral utiliza-se a noção de convergência no sentido absoluto, i.e., que

$$\int_{0^-}^{+\infty} |x(t)|dt, < \infty \quad (4-2.9)$$

que é uma noção mais exigente do que, se em vez de $|x(t)|$, utilizarmos apenas $x(t)$. Devido ao facto de que, em teoria de sinais, a maior parte das funções são de tipo exponencial para as quais

$$|x(t)| < e^{Ct} \quad \text{quando} \quad t \rightarrow \infty,$$

onde C é uma constante real, coloca-se a questão de convergência para este tipo de funções, para as quais é importante relembrar a noção de abcissa de convergência absoluta. Podemos escrever (4-2.7) como

$$F(s) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{0^-}^T f(t)e^{-st}dt, \quad (4-2.10)$$

podendo demonstrar-se que se a função $f(t)$ for de tipo exponencial (4-2.10) converge sempre, i.e., a sua TL existe. Além disso podemos também dizer em geral que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0. \quad (4-2.11)$$

Trata-se aqui de determinar o domínio do plano s para o qual $F(s)$ existe, de forma a podermos calcular a TL inversa. Para cada caso específico trata-se de calcular um valor σ_a real tal que

$$\operatorname{Re}[F(s)] > \sigma_a, \quad (4-2.12)$$

neste caso σ_a é chamada **abcissa de convergência absoluta**.

Exemplo: calcular a abcissa de convergência da função $f(t) = e^{\alpha t}$.

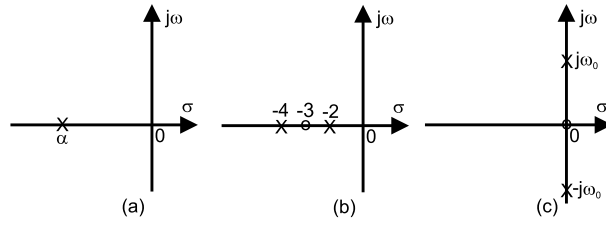


Figura 4.5: localização de pólos e zeros no plano complexo: um pólo real (a), dois pólos e um zero reais (b) e dois pólos imaginários puros complexos conjugados (c).

Temos então que

$$F(s) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{0^-}^T e^{\alpha t} e^{-st} dt,$$

que se pode facilmente calcular como sendo

$$F(s) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{(s-\alpha)T}}{s - \alpha},$$

e torna-se neste caso claro que $F(s)$ só existe (ou só toma valores finitos) para $s > \alpha$, i.e.,

$$F(s) = \begin{cases} \frac{1}{s-\alpha} & s > \alpha; \\ \infty & s < \alpha, \end{cases}$$

e por isso a abcissa de convergência absoluta é neste caso $\sigma_a = \alpha$.

4.2.2 Pólos e zeros numa função

Quase todas as funções de variável s que consideraremos podem ser colocadas sob a forma de fração racional

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}. \quad (4-2.13)$$

De uma forma equivalente podemos exprimir os polinómios $N(s)$ e $D(s)$ em função das suas raízes,

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = A \frac{(s - s_{z1})(s - s_{z2}) \dots (s - s_{zi}) \dots (s - s_{zm})}{(s - s_{p1})(s - s_{p2}) \dots (s - s_{pj}) \dots (s - s_{pn})}, \quad (4-2.14)$$

onde $A = b_m/a_n$ é uma constante. A partir de (4-2.14) podemos facilmente determinar os valores de s (em geral complexos) para os quais $F(s)$ toma valores extremos, i.e., valores zero ou valores infinitos, consoante são raízes do numerador ou denominador, e são chamados pólos e zeros respectivamente.

Exemplos: vejamos alguns exemplos de TL e a sua representação no plano complexo com a respectiva localização de pólos e zeros.

A) $f(t) = e^{-\alpha t}u(t)$

temos que

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-(s+\alpha)t}}{-(s+\alpha)} \right]_{0^-}^{\infty} = \frac{1}{s+\alpha},$$

que tem apenas um pólo para $s = -\alpha$ como representado na figura 4.5(a).

B) $f(t) = (e^{-2t} + e^{-4t})u(t)$

temos neste caso que

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-(s+2)t} dt + \int_{0^-}^{\infty} e^{-(s+4)t} dt,$$

de onde utilizando o resultado anterior duas vezes com os devidos valores para α ,

$$F(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+4} = 2 \frac{s+3}{(s+2)(s+4)},$$

com um zero em -3 e dois pólos: um em -4 e outro em -2, conforme representado na figura 4.5(b).

C) $f(t) = \cos(\omega_0 t)u(t)$

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} \cos(\omega_0 t) e^{-st} dt$$

onde utilizando a forma de Euler,

$$F(s) = \frac{1}{2} \int_{0^-}^{\infty} e^{-(s+j\omega_0)t} dt + \frac{1}{2} \int_{0^-}^{\infty} e^{-(s-j\omega_0)t} dt$$

e utilizando mais uma vez o resultado anterior

$$F(s) = \frac{1/2}{s-j\omega_0} + \frac{1/2}{s+j\omega_0} = \frac{s}{(s-j\omega_0)(s+j\omega_0)},$$

e neste caso teremos pólos complexos conjugados no eixo imaginário e um zero em $s = 0$ que se encontram representados na figura 4.5(c).

4.2.3 Teoremas simples da Transformada de Laplace

Na prática mais do que a própria definição, convém conhecer algumas das propriedades mais relevantes da TL, de modo a facilitar a sua aplicação à análise de circuitos.

Atraso no domínio temporal: o cálculo da TL de $g(t) = f(t - t_0)$ faz-se através de

$$\text{TL}[f(t - t_0)] = \int_{0^-}^{\infty} f(t - t_0) e^{-st} dt,$$

onde colocando $\tau = t - t_0$, e $d\tau = dt$ permite escrever

$$\text{TL}[f(t - t_0)] = \int_{-t}^{\infty} f(\tau) e^{-s(t_0 + \tau)} d\tau,$$

e de onde notando que a função causal $f(t) = 0$ para $t < 0$ permite deduzir o resultado final

$$\text{TL}[f(t - t_0)] = e^{-t_0 s} F(s). \quad (4-2.15)$$

Diferenciação no domínio de Laplace: demonstra-se facilmente calculando a derivada de

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad (4-2.16)$$

em relação a s que é

$$G(s) = \frac{dF(s)}{ds} = \int_{0^-}^{\infty} [-tf(t)] e^{-st} dt, \quad (4-2.17)$$

e portanto temos o par

$$\text{TL}[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}. \quad (4-2.18)$$

e por dedução à ordem n

$$\text{TL}[(-t)^n f(t)] = \frac{d^n F(s)}{ds^n}. \quad (4-2.19)$$

Família de Diracs: a família de Diracs começa com o degrau unidade $u(t) = u_{-1}(t)$ para o qual se pode facilmente calcular

$$\text{TL}[u_{-1}(t)] = \frac{1}{s}, \quad (4-2.20)$$

em seguida, utilizando (4-2.19)

$$\text{TL}[t^n u_{-1}(t)] = \frac{n!}{s^{n+1}}. \quad (4-2.21)$$

Podemos agora generalizar à família de impulsos com a ajuda de (4-2.19)

$$\text{TL}[u_{-n}(t)] = s^{-n}. \quad (4-2.22)$$

Potência do tempo - função Gama: é um caso semelhante ao anterior no qual se pretende calcular a TL de uma potência do tempo, só que agora o expoente não é inteiro. Assim temos que

$$\text{TL}[t^\alpha] = \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_{0^-}^{\infty} x^\alpha e^{-x} dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}, \quad (4-2.23)$$

onde a função Gama é definida por

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{\infty} x^\alpha e^{-x} dx. \quad (4-2.24)$$

Diferenciação temporal: pode-se demonstrar que

$$\text{TL}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0^-), \quad (4-2.25)$$

onde $f(0^-)$ representa o valor da função temporal no instante inicial. A demonstração obtem-se fazendo

$$G(s) = \text{TL}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_{0^-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt, \quad (4-2.26)$$

de onde fazendo a mudança de variável $dv = df(t)$ e $u = e^{-st}$ e integrando por partes,

$$G(s) = [e^{-st} f(t)]_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} f(t) [-se^{-st}] dt \quad (4-2.27)$$

admitindo que $f(t)$ é de tipo exponencial temos que para o extremo superior (∞) o primeiro termo dá zero e para $t = 0^-$ dá $f(0^-)$. Em relação ao segundo termo é fácil ver que se trata de $sF(s)$ e por isso o resultado encontra-se como sendo

$$G(s) = -f(0^-) + sF(s). \quad (4-2.28)$$

As derivadas de ordem superior obtêm-se por extensão do caso precedente tal que

$$\text{TL}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - \dots - f^{(n-1)}(0^-). \quad (4-2.29)$$

Integração temporal: podemos ver facilmente que

$$\text{TL}\left[\int_{0^-}^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}, \quad (4-2.30)$$

que se demonstra colocando

$$g(t) = \int_{0^-}^t f(\tau) d\tau, \quad (4-2.31)$$

o que implica $g(0^-) = 0$. Como podemos escrever que a $\text{TL}[dg(t)/dt] = \text{TL}[f(t)] = F(s)$, utilizando (4-2.28), podemos escrever que $\text{TL}[dg(t)/dt] = sG(s) - g(0^-)$. Assim, visto que $g(0^-) = 0$ podemos escrever que $F(s) = sG(s)$ e finalmente provar (4-2.30).

Teorema do valor inicial: prova-se que, para as funções sem descontinuidades na origem, podemos determinar o valor da função temporal para $t = 0$ através de

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s). \quad (4-2.32)$$

Teorema do valor final: prova-se igualmente que o valor final da função temporal se pode determinar através de

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s). \quad (4-2.33)$$

Funções periódicas causais: é frequente na prática querermos determinar a TL de uma função periódica. Tomemos como exemplo o caso simples de uma função $g(t) = f(t) + f(t - T)$, resultante da repetição da função $f(t)$ com um intervalo T . Assim podemos directamente escrever

$$G(s) = \text{TL}[g(t)] = \text{TL}[f(t)] + \text{TL}[f(t)]e^{-sT},$$

onde utilizámos (4-2.15). Ou ainda

$$G(s) = F(s)[1 + e^{-sT}]. \quad (4-2.34)$$

A partir deste caso simples deduzimos directamente o caso geral do sinal periódico causal onde se o sinal $g(t)$ se escrever

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(t - kT), \quad (4-2.35)$$

então, a partir de (4-2.34), temos que

$$G(s) = F(s) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kTs}$$

ou ainda, utilizando o desenvolvimento em série de $1/(1 - x)$ para $|x| < 1$ (ver A.2),

$$G(s) = \left[\frac{1}{1 - e^{-Ts}} \right] F(s) \quad (4-2.36)$$

Exemplo: queremos determinar a TL da função periódica causal e limitada no tempo dada por

$$g(t) = \sum_{k=0}^N f(t - kT)$$

A solução deste problema pode obter-se através da utilização de (4-2.36) tal que

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(t - kT) - \sum_{k=N+1}^{\infty} f(t - kT),$$

onde a TL do segundo termo é uma soma de termos de uma progressão geométrica de razão e^{-Ts} e cujo primeiro termo é $e^{(N+1)Ts}$. Assim podemos escrever que

$$\text{TL}[g(t)] = \frac{F(s)}{1 - e^{-Ts}} - \frac{F(s)e^{-(N+1)Ts}}{1 - e^{-Ts}}$$

ou mais condensado

$$G(s) = \frac{1 - e^{-(N+1)Ts}}{1 - e^{-Ts}} F(s).$$

que é o resultado procurado.

4.2.4 Transformada de Laplace Inversa

A definição da Transformada de Laplace Inversa (TLI) foi dada em (4-2.8). A necessidade do cálculo da TLI é evidentemente a de permitir a obtenção da (ou das) função (ões) temporal (ais) resultado da análise complexa do circuito. Existem fundamentalmente duas formas de resolver (4-2.8): uma através da integração directa e outra através do reconhecimento da unicidade da TL. O primeiro método é geralmente extremamente trabalhoso pois implica o cálculo dos resíduos para cada pólo simples da função $F(s)e^{st}$ e para um determinado contorno no plano s - este método apesar de ser bastante elegante não é quase nunca utilizado. Em vez disso, utiliza-se o segundo método que consiste em considerar que $f(t)$ e $F(s)$ formam um par único e por isso se $\text{TL}[f(t)] = F(s)$ então temos que $\text{TLI}[F(s)] = f(t)$. Por isso basta-nos colocar $F(s)$ sob uma forma cuja a função temporal é reconhecida. Em geral sob a forma da soma de vários termos que são transformadas de Laplace de funções temporais conhecidas para podermos dizer que o sinal temporal resultante $f(t)$ não é mais do que a soma dessas funções temporais.

Exemplos:

A) consideremos o caso da função simples,

$$F(s) = 10s^{-1},$$

portanto $f(t) = 10u(t)$, porque já tínhamos visto que $\text{TL}[u(t)] = 1/s$.

B) ou o caso da função

$$G(s) = \frac{e^{-s}}{s + 2},$$

onde, sabendo que a TL de um atraso puro é

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-1)e^{-st}dt = e^{-s},$$

e que

$$\int_0^{\infty} e^{-2t}e^{-st}dt = \frac{1}{s+2},$$

podemos deduzir que

$$f(t) = e^{-2(t-1)}u(t-1).$$

No caso de funções mais complexas (frequentes na prática) torna-se difícil identificar os inversos por observação directa. Na maior parte dos casos trata-se de frações racionais complexas e a sua inversão passa pela decomposição em termos simples cujos inversos sejam conhecidos, como por exemplo, a função

$$F(s) = \frac{(2s+2)}{s^2+7s+12},$$

que se pode decompor em fracções simples como

$$F(s) = \frac{(2s+2)}{s^2+7s+12} = \frac{A_1}{s+3} + \frac{A_2}{s+4},$$

onde os coeficientes A_1 e A_2 podem ser determinados multiplicando ambos os termos da equação anterior por $s+3$ e fazendo $s = -3$ e $s+4$ e fazendo $s = -4$, respectivamente. Obtendo-se neste caso $A_1 = -4$ e $A_2 = 6$. A partir destes valores podemos então escrever que

$$f(t) = [-4e^{-3t} + 6e^{-4t}]u(t),$$

que é o resultado esperado. Existem várias técnicas de cálculo para a decomposição de fracções racionais que deixamos ao cuidado do leitor, mediante uma atenta revisão do programa da disciplina de Análise Matemática.

4.3 Aplicação aos sistemas lineares

4.3.1 Equações diferenciais com condições iniciais

A utilização prática da TL na análise e síntese de sistemas lineares passa essencialmente pelas seguintes propriedades:

$$\text{TL}[\sum_i a_i f_i(t)] = \sum_i a_i F_i(s), \quad (4-3.1)$$

e

$$\text{TL}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0), \quad (4-3.2)$$

com as quais as equações diferenciais em t se tornam equações algébricas em s . Na prática o problema é quase sempre dividido em cinco etapas sucessivas:

- 1) transformar a equação diferencial numa equação algébrica utilizando (4-3.2)
- 2) resolver a equação resultante para a grandeza de saída $Y(s)$
- 3) desenvolver $Y(s)$ em frações racionais
- 4) encontrar o inverso $y(t) = \text{TLI}[Y(s)]$
- 5) verificar o resultado

Exemplos:

A) Seja a seguinte equação diferencial de primeira ordem

$$a \frac{dy}{dt} + by = x(t),$$

com $x(t) = e^{-ct}u(t)$. Podemos desde já escrever a passagem para o domínio s ,

$$a[sY(s) - y(0)] + bY(s) = X(s) = \frac{1}{s + c},$$

isto é

$$Y(s) = \frac{a(s + c)y(0) + 1}{a(s + b/a)(s + c)},$$

ou também, decompondo em fracções racionais

$$Y(s) = \frac{A_1}{s + b/a} + \frac{A_2}{s + c},$$

com

$$A_1 = \frac{(ac - b)y(0) + 1}{ac - b} \quad A_2 = \frac{-1}{ac - b},$$

e de onde se pode deduzir o resultado

$$y(t) = [A_1 e^{-bt/a} + A_2 e^{-ct}]u(t).$$

A verificação do resultado faz-se, obviamente, inserindo $y(t)$ na equação diferencial inicial. Alternativamente poderíamos utilizar os teoremas dos valores inicial e final, (4-2.32) e (4-2.33), respectivamente, para verificar o comportamento assintótico da solução obtida.

B) seja agora a equação diferencial de segunda ordem

$$i''(t) + 7i'(t) + 10i(t) = 6e^{-3t}u(t),$$

com $i(0) = 3$ A e $i'(0) = 3$ A/s. Podemos então escrever, calculando a TL de ambos os termos,

$$s^2 I(s) - si(0) - i'(0) + 7sI(s) - 7i(0) + 10I(s) = \frac{6}{s+3},$$

de onde, resolvendo em relação a $I(s)$,

$$I(s) = \frac{3(s^2 + 11s + 26)}{(s+2)(s+3)(s+5)} = \frac{8}{s+2} - \frac{3}{s+3} - \frac{2}{s+5},$$

e portanto a solução final

$$i(t) = 8e^{-2t} - 3e^{-3t} - 2e^{-5t}, \quad t > 0.$$

Na prática somos levados a considerar frequentemente, não uma equação única para determinar uma das variáveis do circuito, mas sim um conjunto de equações com várias variáveis, em geral ligadas entre elas, e por isso temos que colocar o problema sob a forma de um sistema de equações.

Exemplo: considere o seguinte sistema de equações diferenciais,

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \frac{dx}{dt} + x - \frac{1}{3} \frac{dy}{dt} &= f(t) = 2u(t) \\ -\frac{1}{3} \frac{dx}{dt} + \frac{2}{3} \frac{dy}{dt} + y &= 0, \end{aligned}$$

com condições iniciais nulas, i.e., $x(0) = y(0) = 0$. Aplicando a TL nos dois membros de cada uma das equações acima obtemos,

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}s + 1\right)X(s) - \frac{1}{3}sY(s) &= F(s) = \frac{2}{s} \\ -\frac{1}{3}sX(s) + \left(\frac{2}{3}s + 1\right)Y(s) &= 0, \end{aligned}$$

das quais podemos deduzir por substituição

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{2(2s+3)}{s(s+1)(s+3)} = \frac{2}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3} \\ Y(s) &= \frac{2}{(s+1)(s+3)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3}, \end{aligned}$$

e finalmente aplicando a TLI,

$$\begin{aligned} x(t) &= (2 - e^{-t} - e^{-3t})u(t), \\ y(t) &= (e^{-t} - e^{-3t})u(t), \end{aligned}$$

de onde podemos facilmente verificar as condições iniciais.

4.3.2 Função de sistema

Podemos agora fazer uma generalização dos sistemas lineares de primeira e segunda ordem ao caso de uma ordem superior n . Assim podemos dizer que a relação entre a entrada $x(t)$ e a saída $y(t)$ de um sistema linear pode ser descrita por uma equação do tipo¹

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j x}{dt^j}. \quad (4-3.3)$$

Neste caso, e para condições iniciais nulas, temos que tomando a TL de ambos os termos,

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} X(s), \quad (4-3.4)$$

daqui podemos deduzir a função de sistema, ou função de transferência, $H(s)$,

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}. \quad (4-3.5)$$

No caso em que os pólos são todos simples, a função de transferência $H(s)$ pode ser representada sob a forma de

$$H(s) = \frac{A_1}{s - s_1} + \frac{A_2}{s - s_2} + \dots + \frac{A_n}{s - s_n}, \quad (4-3.6)$$

então a sua TLI escreve-se

$$h(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + \dots + A_n e^{s_n t}, \quad (4-3.7)$$

que é chamada a resposta impulsiva do sistema, i.e., é a resposta do sistema $Y(s)$ quando o sinal de entrada é um impulso de Dirac, e então visto que $TL[x(t) = \delta(t)] = 1$, temos que $Y(s) = H(s)$. Isto significa que a resposta impulsiva depende apenas da função de transferência $H(s)$ e por isso apenas do sistema ele mesmo e, em particular, dos pólos do sistema $s_i; i = 1, \dots, n$. Também isto não é estranho pois os pólos do sistema são aqueles que estão ligados à resposta natural do sistema, i.e., a resposta do sistema sem excitação - também chamada solução da equação homogênea.

Exemplos:

A) sistema de primeira ordem sem condições iniciais: considere a figura 4.6, com $y(0) = 0$ e

$$x(t) = e^{-2t} u(t).$$

¹além de linear, o sistema descrito por (4-3.3) é dito invariante, porque os coeficientes a_i e b_j não são uma função do tempo.

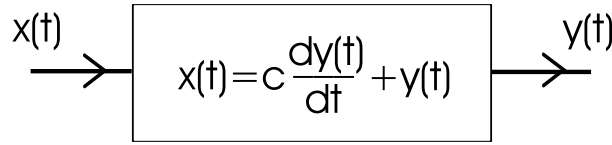


Figura 4.6: sistema de primeira ordem.

Podemos directamente escrever

$$x(t) = C \frac{dy(t)}{dt} + y(t),$$

a partir da qual tiramos a TL

$$X(s) = CsY(s) + Y(s),$$

de onde a função do sistema $H(s)$ é

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{Cs + 1}.$$

Desta podemos determinar a resposta impulsiva $h(t)$, que se escreve

$$h(t) = \text{TLI}[H(s)] = \frac{1}{C} e^{-t/C} u(t),$$

e sabendo que

$$X(s) = \text{TL}[X(t)] = \frac{1}{s + 2},$$

portanto $Y(s)$ escreve-se

$$Y(s) = \frac{1/C}{(s + 2)(s + 1/C)} = \frac{1/(1 - 2C)}{s + 2} + \frac{1/(2C - 1)}{s + 1/C},$$

e finalmente

$$y(t) = \left[\frac{1}{1 - 2C} e^{-2t} + \frac{1}{2C - 1} e^{-t/C} \right] u(t),$$

será a resposta do circuito no caso em que o sistema se encontra inerte no momento inicial, *i.e.*, quando $y(0) = 0$.

B) sistema de primeira ordem com condições iniciais: considere o mesmo sistema da figura 4.6 mas agora com um valor inicial da saída $y(0) = 2$.

Não será necessário re-escrever todas as equações, mas sómente a TL da equação diferencial tendo em conta (4-2.29),

$$X(s) = C[sY(s) - y(0)] + Y(s),$$

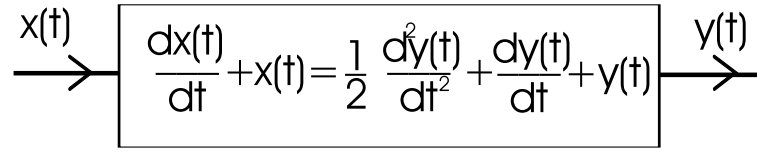


Figura 4.7: sistema de segunda ordem.

substituindo pelos valores numéricos e pela transformada de X obtemos

$$Y(s) = \frac{1}{(s+2)(Cs+1)} + \frac{2C}{Cs+1},$$

utilizando o resultado da decomposição do caso anterior, obtemos

$$y(t) = [\frac{1}{1-2C}e^{-2t} + \frac{1}{2C-1}e^{-t/C} + 2e^{-t/C}]u(t),$$

onde simplificando

$$y(t) = [\frac{1}{1-2C}e^{-2t} + \frac{2C}{2C-1}e^{-t/C}]u(t).$$

C) sistema de segunda ordem sem condições iniciais: considere agora o caso do sistema da figura 4.7 com $x(t) = 5e^{-2t}u(t)$. Pretende-se calcular a saída $y(t)$.

Como anteriormente, podemos escrever directamente

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 2\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t),$$

cujas TL é dada por

$$Y(s)(s^2 + 2s + 2) = 2(s+1)X(s),$$

visto que $X(s) = \text{TL}[x(t)]$ é dada por

$$X(s) = \frac{5}{s+2},$$

temos que, por substituição na equação anterior, e cálculo das raízes da equação do segundo grau do denominador

$$Y(s) = \frac{10(s+1)}{(s+2)(s+1-j)(s+1+j)},$$

dando origem à representação no plano s da figura 4.8. A inversão faz-se por decomposição da fração polinomial,

$$Y(s) = \frac{A_1}{s+2} + \frac{B_1}{s+1-j} + \frac{B_2}{s+1+j},$$

onde podemos facilmente deduzir que

$$A_1 = -5, \quad B_1 = \frac{5}{1+j},$$

com $B_2 = B_1^*$. Por questões de simplificação do cálculo é frequente colocar os coeficientes complexos sob forma exponencial. Assim podemos facilmente escrever que

$$B_1 = 5e^{-j\frac{\pi}{4}},$$

e portanto

$$Y(s) = \frac{-5}{s+2} + 5\left[\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{s+1-j} + \frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{s+1+j}\right].$$

Podemos agora calcular a TLI a cada um dos termos para obter

$$y(t) = [-5e^{-2t} + 5[e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{(-1+j)t} + e^{j\frac{\pi}{4}}e^{(-1-j)t}]u(t),$$

ou ainda simplificando

$$y(t) = [-5e^{-2t} + 5e^{-t}[e^{j(t-\frac{\pi}{4})} + e^{-j(t-\frac{\pi}{4})}]u(t),$$

de onde deduzimos finalmente

$$y(t) = [10e^{-t}\cos(t - \frac{\pi}{4}) - 5e^{-2t}]u(t).$$

Neste resultado final podemos facilmente identificar que o primeiro termo - oscilação em $\cos(t)$ - é a resposta do sistema em regime permanente e o segundo - exponencial atenuada - é a resposta ao sinal de entrada $x(t)$.

4.4 Cálculo simbólico

A última fase deste capítulo consiste em ultrapassar a escrita do sistema de equações diferenciais, passando directamente à escrita simbólica através do estabelecimento das impedâncias equivalentes de cada elemento do circuito directamente no domínio s . Podemos começar pela resistência R aos bornos da qual a tensão e a corrente são, obviamente, ligadas pela lei de Ohm, e as respectivas TL por

$$E(s) = RI(s). \quad (4-4.1)$$

No caso da bobine temos que

$$e(t) = L\frac{di(t)}{dt} \rightarrow E(s) = sLI(s) - Li(0), \quad (4-4.2)$$

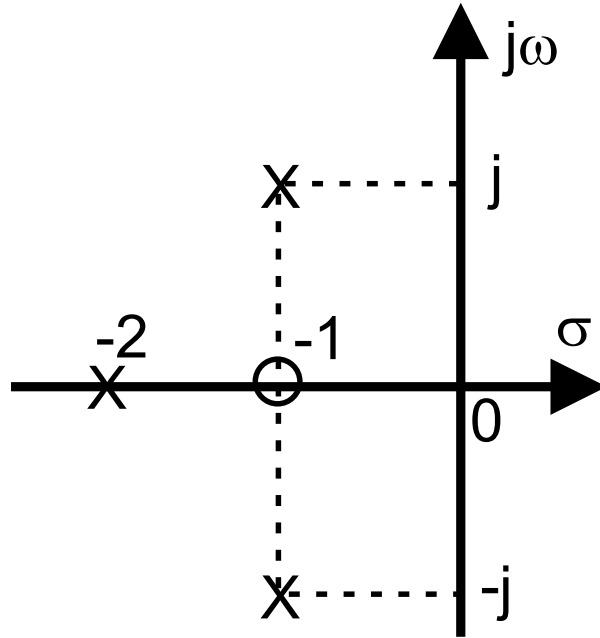


Figura 4.8: pólos e zeros no plano s .

e que no caso de condições iniciais nulas, fica reduzida a

$$E(s) = sLI(s). \quad (4-4.3)$$

Por fim, no caso do condensador obtemos

$$i(t) = C \frac{de(t)}{dt} \rightarrow I(s) = C[sE(s) - e(0)], \quad (4-4.4)$$

ou

$$E(s) = \frac{I(s)}{Cs}, \quad (4-4.5)$$

no caso de condições iniciais nulas. Podemos então resumir que, no caso de condições nulas, as impedâncias equivalentes a cada um dos elementos são

$$Z_R = R, \quad Z_L = Ls, \quad Z_C = \frac{1}{Cs}. \quad (4-4.6)$$

4.5 Exemplos

Exemplo 1: utilizando o cálculo simbólico da TL, queremos saber qual a evolução da tensão $V_C(t)$ aos terminais do condensador da figura 4.9 sabendo que no instante $t = 0^-$ temos $V_C = 1000$ V. O interruptor S fecha-se para $t = 0$, abre para $t = 1$ ms

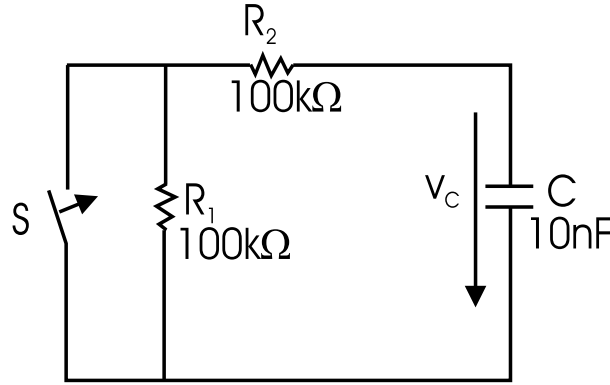


Figura 4.9: descarga de um condensador.

e fecha novamente para $t = 2$ ms até 3 ms. Determine as expressões de $v_C(t)$ e as formas de onda para $0 < t < 3$ ms.

Para $0 \leq t \leq 1$ ms, com o interruptor S fechado podemos escrever

$$V_C(s) = -R_2 I(s) \quad (a)$$

$$I(s) = sC V_C(s) - C v_C(0) \quad (b)$$

com a tensão inicial $v_C(0) = 1000$ V e $R_2 = 100$ kΩ. Substituindo (b) em (a)

$$V_C(s)[1 + R_2 C] = R_2 C v_C(0)$$

$$V_C(s) = \frac{v_C(0)}{s + 1/R_2 C}$$

equação da qual conhecemos a TLI que é

$$v_C(t) = v_C(0) \exp -t/R_2 C$$

Para $t_1 = 1\text{ms} \leq t \leq t_2 = 2$ ms, o condensador C encontra-se em série com as duas resistências R_1 e R_2 de 100 kΩ cada. Nesse caso o novo sistema de equações em Laplace é

$$V_C(s) = -(R_1 + R_2) I(s) \quad (c)$$

$$I(s) = sC V_C(s) - C v_C(t_1) \exp(-t_1 s) \quad (d)$$

isto porque a TL da corrente no condensador entre t_1 e t_2 é

$$I(s) = \text{TL}[i(t)]_{t>t_1} = \int_{0^-}^{\infty} i(t) u(t - t_1) e^{-ts} dt$$

ou ainda

$$I(s) = C \int_{t_1}^{\infty} \frac{dv_C(t)}{dt} e^{-ts} dt$$

integrando por partes temos que

$$I(s) = C[v_C(t)e^{-ts}]_{t_1}^{+\infty} + sC \int_{t_1}^{\infty} v_C(t)e^{-ts}dt$$

o que permite obter o resultado (d). De novo substituindo (d) em (c) e re-arranjando os termos obtemos

$$V_C(s) = \frac{v_C(t_1)e^{-t_1s}}{s + \frac{1}{(R_1+R_2)C}}$$

com a TLI

$$v_C(t) = v_C(t_1) \exp -(t - t_1)/(R_1 + R_2)C$$

Finalmente para o caso $t_2 = 2\text{ms} \leq t \leq t_3 = 3 \text{ ms}$, S fecha de novo e obtemos um conjunto de equações semelhantes a (c) - (d) com t_2 em vez de t_1 e apenas com a resistência R_2 em vez de $R_1 + R_2$.

$$V_C(s) = -R_2 I(s) \quad (e)$$

$$I(s) = sC V_C(s) - C v_C(t_2) \exp -t_2 s \quad (f)$$

de novo resolvendo o sistema

$$V_C(s) = \frac{v_C(t_2)e^{-t_2s}}{s + 1/R_2C}$$

com a TLI

$$v_C(t) = v_C(t_2) \exp -(t - t_2)/R_2C$$

A forma de onda de $v_C(t)$ é formada por arcos de exponencial decrescente com $v_C(t_1) = 367 \text{ v}$, $v_C(t_2) = 222 \text{ v}$ e $v_C(t_3) = 82 \text{ v}$.

Exemplo 2: a figura 4.10 representa um cicuito contendo apenas uma bobine e um condensador ($L=1/\pi^2 \text{ H}$, $C=25 \mu\text{F}$). Antes do interruptor S se fechar temos $v_C = 1000 \text{ V}$. Utilizando o cálculo simbólico da TL, determine:

a) a evolução da corrente $i(t)$ no circuito.

b) a evolução da tensão $v_C(t)$.

a) Com o interruptor S fechado escrevemos

$$V_C(s) = LsI(s) \quad (a)$$

$$I(s) = -CsV_C(s) - Cv_C(0) \quad (b)$$

resolvendo em relação a $I(s)$,

$$I(s) = -\frac{v_C(0)/L}{s^2 + 1/LC}$$

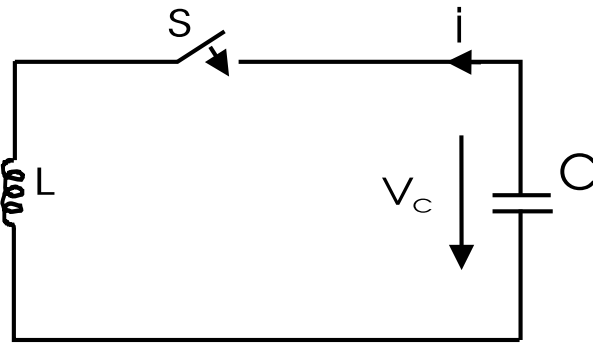


Figura 4.10: oscilador ideal.

pondo $\omega_0^2 = 1/LC$,

$$I(s) = \frac{-v_C(0)/L}{(s + j\omega_0)(s - j\omega_0)} = \frac{A_1}{s - j\omega_0} + \frac{A_1^*}{s + j\omega_0}$$

de onde

$$A_1 = \frac{\sqrt{C/L}v_C(0)}{2j}$$

e finalmente a TLI

$$i(t) = -\sqrt{\frac{C}{L}}v_C(0)\sin(\omega_0 t)$$

b) agora podíamos resolver o sistema em relação a $V_C(s)$ mas é bastante mais simples escrever

$$v_C(t) = -L\frac{di(t)}{dt} = \sqrt{CL}\omega_0 v_C(0)\cos(\omega_0 t) = v_C(0)\cos(\omega_0 t).$$

5 Circuitos em regime transitório

Nos circuitos considerados até agora os elementos passivos eram sempre puramente resistivos, i.e., elementos que se limitam a absorver energia e a dissipá-la sob forma de calor mantendo uma relação de proporcionalidade entre a corrente que os atravessa e a tensão aos seus terminais.

Conforme já foi dito, a introdução no circuito de elementos capacitivos e indutivos estabelece relações entre corrente e tensão que são da forma integral e diferencial. Por outro lado esses elementos podem, em certas alturas, absorver energia e noutras libertá-la, tendo portanto uma certa capacidade de armazenamento. As correntes (ou tensões) de entrada e de saída dos elementos capacitivos ou indutivos podem não ser iguais e, a um determinado instante t_0 , dependem do sinal de entrada para $t < t_0$. Temos neste caso um regime de funcionamento que é chamado *regime transitório*. Digo “podem não ser iguais” porque em certos casos podem também ser iguais e neste caso temos um regime dito *regime estacionário*. Um ou outro regime de funcionamento depende do instante considerado e/ou do sinal aplicado. Neste capítulo vamos-nos interessar pelo regime transitório para o qual começaremos por determinar a solução de alguns circuitos simples com bobines e condensadores e em seguida caracterizaremos os tipos de circuitos encontrados de acordo com a sua tipologia.

5.1 Circuitos RC

Consideremos o circuito da figura 5.1. Neste circuito temos uma fonte de tensão de valor $e(t)$, variável, ligada em série com uma resistência R e um condensador C . A fonte de tensão varia como uma onda quadrada representada no gráfico da figura entre 0 e E volts. Estamos interessados em determinar como varia a tensão $v_C(t)$ aos terminais do condensador C . Vamos começar por escrever a lei da malha



Figura 5.1: circuito RC série (a) e forma de onda em $e(t)$ (b).

$$e(t) = Ri(t) + v_C(t), \quad (5-1.1)$$

por outro lado sabemos que

$$i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}, \quad (5-1.2)$$

substituindo (5-1.2) em (5-1.1) temos uma equação diferencial de primeira ordem com segundo membro em $v_C(t)$, que é

$$RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = e(t). \quad (5-1.3)$$

Existem pelo menos duas formas de resolver a equação (5-1.3): uma é através da solução directa da equação diferencial considerando primeiro a equação homogénea e depois a equação forçada com segundo membro; a outra é utilizando a Transformada de Laplace (TL) estudada no capítulo anterior. Vamos utilizar a TL, calculando a TL de ambos os membros de (5-1.3) obtemos

$$RC[sV_C(s) - v_C(0)] + V_C(s) = E(s), \quad (5-1.4)$$

sabendo que o condensador se encontra descarregado no instante inicial, $v_C(0) = 0$, temos que

$$V_C(s) = \frac{E(s)}{1 + RCs}. \quad (5-1.5)$$

Basta-nos agora considerar o sinal $e(t)$ da figura 5.1(b) que se pode escrever como $e(t) = Eu_{-1}(t) = Eu(t)$, $0 < t \leq T/2$ e por isso a sua TL nesse intervalo é dada por

$$E(s) = \frac{E}{s} \quad (5-1.6)$$

substituindo em (5-1.5) e decompondo em frações temos

$$V_C(s) = \frac{E}{s} + \frac{-E}{s + 1/RC} \quad (5-1.7)$$

de onde podemos tirar directamente a TLI

$$v_C(t) = E[1 - e^{-t/RC}]u(t) \quad (5-1.8)$$

É claro que seria muito mais fácil utilizar directamente o cálculo simbólico, o nos permite não passar pela equação diferencial escrevendo imediatamente a partir do circuito da figura 5.1(a) o par de equações

$$E(s) = RI(s) + V_C(s) \quad (5-1.9)$$

$$I = CsV_C(s) \quad (5-1.10)$$

onde considerámos logo que o condensador C se encontrava descarregado no momento inicial, *i.e.*, que $v_C(0) = 0$, e de onde tiramos logo (5-1.5).

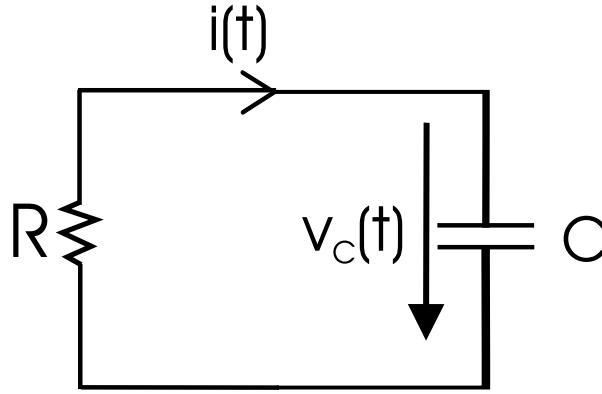


Figura 5.2: descarga de um condensador.

Quando a tensão $e(t)$ muda de E para 0 tudo se passa como no circuito equivalente da figura 5.2 onde o condensador se descarrega progressivamente na resistência R segundo uma equação idêntica a (5-1.3) com $e(t) = 0$ e portanto a solução deduz-se de (5-1.4) com $E(s) = 0$ e $v_C(0) = v_C(T/2) \exp(-sT/2)$, o termo em exponencial significa apenas que tudo se passa em $t = T/2$ em vez de em $t = 0$ (ver discussão em torno ao cálculo de $I(s)$ na equação (d) do exemplo 1 de 4.5). Assim

$$V_C(s) = \frac{v_C(T/2)e^{-sT/2}}{\frac{1}{RC} + s}, \quad (5-1.11)$$

e portanto calculando a TLI

$$v_C(t) = v_C(T/2) \exp\left\{-\frac{(t - T/2)}{RC}\right\}, \quad (5-1.12)$$

e a forma completa de $v_C(t)$ está representada na curva (a) da figura 5.3 para $\tau = RC = T/8$. Calculando a derivada da função $v_C(t)$ de (5-1.8) obtem-se

$$\frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{E}{RC} \exp -t/RC \quad (5-1.13)$$

de onde se deduz o coeficiente director na origem fazendo $t = 0$,

$$\frac{dv_C(0)}{dt} = v'_C(0) = \frac{E}{RC} \quad (5-1.14)$$

e por isso a equação da recta tangente à curva $v_C(t)$ na origem escreve-se

$$y(t) = \frac{E}{RC}t, \quad (5-1.15)$$

quando esta recta atinge o valor final da curva $y(t) = E$ temos que $t = \tau = RC$ conforme representado na figura 5.3. Se o valor de $\tau = RC$, que é chamada constante

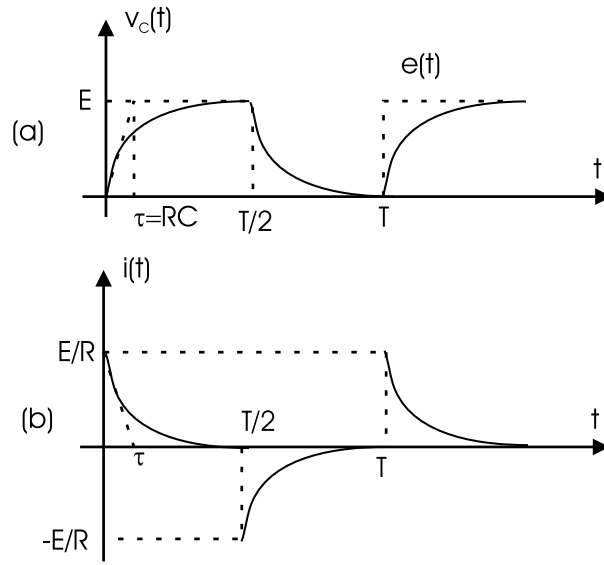


Figura 5.3: tensão aos bornos de um condensador (a) e corrente de carga (b).

de tempo do circuito, fosse muito inferior a $T/2$ então a carga seria muito rápida e ao limite $v_C(t) = e(t)$. Se τ fosse muito superior a $T/2$, então o sinal de saída não iria atingir o seu valor final no intervalo $T/2$ considerado e $v_C(t)$ iria ser, ao limite, desprezável em relação a $e(t)$.

A corrente $i(t)$ no circuito é dada por (5-1.2) onde $v_C(t)$ tem a forma (5-1.8) para $t < T/2$ e então

$$i(t) = \frac{E}{R} \exp\left\{-\frac{t}{RC}\right\}, \quad (5-1.16)$$

para $T/2 < t < T$ temos que

$$i(t) = -\frac{v_C(T/2)}{R} \exp\left\{-\frac{(t - T/2)}{RC}\right\}, \quad (5-1.17)$$

e cujo gráfico está representado na figura 5.3(b).

Em termos energéticos, utilizando a equação (2-4.7), podemos dizer que a energia armazenada no condensador quando carregado à tensão E , é

$$W_C = \frac{1}{2}CE^2 = \frac{1}{2}QE, \quad (5-1.18)$$

por outro lado a energia fornecida pela fonte é $W = QE$, concluindo-se que só metade da energia fornecida pela fonte é armazenada pelo condensador, sendo a outra metade dissipada na resistência R .

Exemplo: consideremos o circuito da figura 5.4.

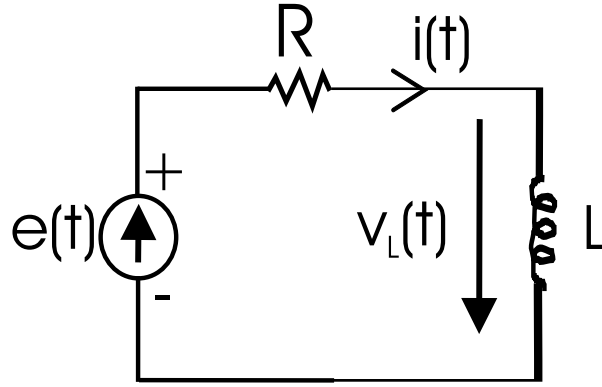


Figura 5.4: circuito RL série.

Neste circuito está representada uma fonte de tensão alternada semelhante à da figura 5.1 e com a mesma onda quadrada à entrada. A fonte de tensão encontra-se em série com uma resistência R e uma bobine L . Pretendemos determinar a corrente $i(t)$ atravessando a bobine e a tensão aos seus bornos $v_L(t)$.

Podemos começar por escrever a equação que rege o circuito,

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = e(t). \quad (5-1.19)$$

Resolvendo como no caso RC através da TL, obtemos

$$RI(s) + L[sI(s) + i(0)] = E(s), \quad (5-1.20)$$

com $i(0) = 0$ e $E(s) = E/s$ chegamos a um resultado idêntico aquele encontrado no caso do circuito RC, i.e., que a corrente $i(t)$ no circuito se pode exprimir como a soma de dois termos: um devido ao degrau unidade à entrada e outro que é uma exponencial amortecida com uma constante de tempo dependente dos valores dos elementos do circuito, neste caso a resistência R e a bobine L . Assim

$$I(s) = \frac{E}{s(1 + L/Rs)}, \quad (5-1.21)$$

e portanto

$$i(t) = \frac{E}{R} \left[1 - \exp\left\{-\frac{R}{L}t\right\} \right]. \quad (5-1.22)$$

A tensão $v_L(t)$ é obtida facilmente através da derivação de (5-1.22) segundo (5-1.23). A figura 5.5 mostra os gráficos da tensão e corrente no circuito em função do tempo para o sinal de entrada $e(t)$. Podemos fazer o mesmo raciocínio acerca dos valores relativos entre $T/2$ e a constante de tempo do circuito que é neste caso $\tau = L/R$.

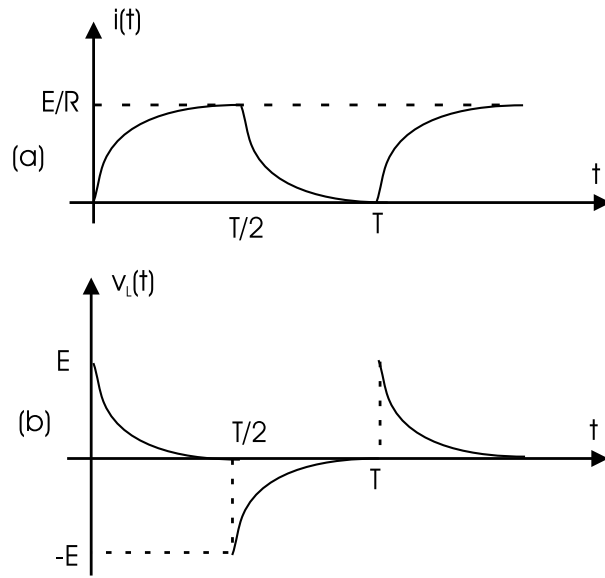


Figura 5.5: corrente (a) e tensão (b) num circuito RL série.

$$v_L(t) = \frac{E}{L} \exp\left\{-\frac{R}{L}t\right\} \quad (5-1.23)$$

5.2 Circuito RLC

Na figura 5.6 colocámos em série uma fonte de tensão e três elementos: uma resistência R , uma bobine L e um condensador C .

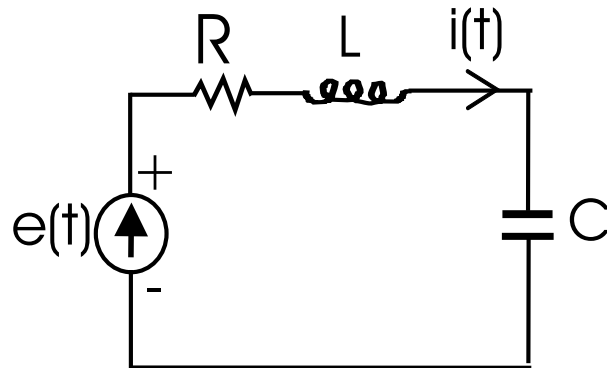


Figura 5.6: circuito RLC série.

A lei das malhas permite-nos escrever,

$$e(t) = Ri(t) + v_L(t) + v_C(t), \quad (5-2.1)$$

substituindo as expressões de v_L e v_C obtemos

$$e(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(\theta)d\theta, \quad (5-2.2)$$

Utilizando directamente a representação simbólica para cada elemento do circuito e que $i(0) = i'(0) = 0$, podemos escrever

$$E(s) = RI(s) + sLI(s) + \frac{I(s)}{Cs}, \quad (5-2.3)$$

e portanto, arranjando um pouco a equação em ordem a $I(s)$ e definindo as seguintes constantes $\alpha = R/2L$ e $\omega_0^2 = 1/LC$, obtem-se facilmente

$$I(s) = \frac{sE(s)/L}{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2}. \quad (5-2.4)$$

Obviamente que a expressão da corrente $i(t)$ resultante da TLI de $I(s)$, vai ser completamente determinada pelas raízes da equação do segundo grau que forma o denominador de (5-2.4) - frequentemente denominada “equação característica”. Estas raízes são

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}. \quad (5-2.5)$$

Os casos possíveis segundo os valores relativos de α e ω_0 estão resumidos na tabela 1 que acompanha a figura 5.7, na qual estão representadas as raízes no plano complexo.

A decomposição em factores de (5-2.4) permite obter

$$I(s) = \frac{A}{s + \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}} - \frac{A}{s + \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}}, \quad (5-2.6)$$

com

$$A = \frac{E}{2L\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}}.$$

Assim, podemos escrever a TLI[$I(s)$],

$$i(t) = \frac{Ee^{-\alpha t}}{2L\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}} [e^{\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}t} - e^{-\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}t}]. \quad (5-2.7)$$

Vamos agora estudar cada uma das quatro situações possíveis segundo os valores relativos de α e ω_0 .

a) Caso 1: regime não amortecido

Neste caso temos que $\alpha = 0$ e portanto as raízes são imaginárias puras

$$s_{1,2} = \pm j\omega_0, \quad (5-2.8)$$

| | regime | | raízes | sinal de saída |
|---|------------------|---------------------|--|---|
| 1 | não amortecido | $\alpha = 0$ | $s_{1,2} = \pm j\omega_0$ | onda sinusoidal |
| 2 | sobre amortecido | $\alpha > \omega_0$ | $s_{1,2} = -\alpha_1, -\alpha_2$ | $A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t}$ |
| 3 | crítico | $\alpha = \omega_0$ | $s_{1,2} = -\alpha = -\omega_0$ | $(A + Bt)e^{-\alpha_0 t}$ |
| 4 | sub amortecido | $\alpha < \omega_0$ | $s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d$ $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ | seno amortecido |

Tabela 1: características dos quatro regimes de funcionamento possíveis dos circuitos de segunda ordem.

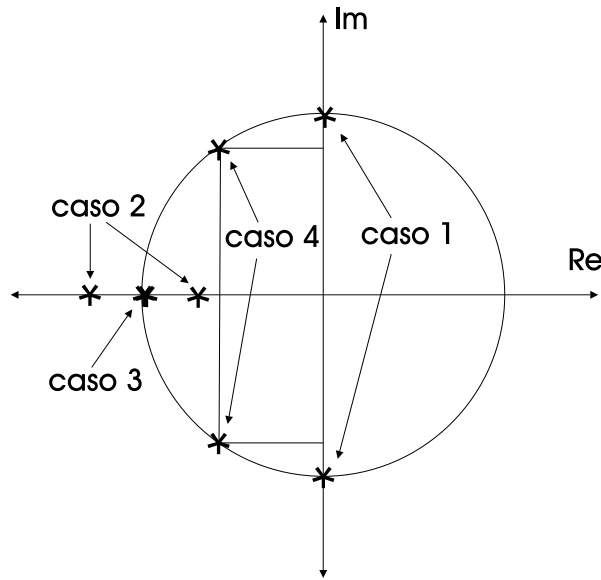


Figura 5.7: raízes do sistema de segundo grau no plano complexo.

e a resposta é então

$$i(t) = \frac{E}{2Lj\omega_0^2} [e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}]$$

ou ainda

$$i(t) = \frac{E}{L\omega_0^2} \sin(\omega_0 t), \quad (5-2.9)$$

e temos portanto um regime sinusoidal puro à frequência $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

b) Caso 2: regime sobre amortecido

Neste caso temos que $\alpha > \omega_0$ e portanto as raízes são reais

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}, \quad (5-2.10)$$

e a resposta é então

$$i(t) = \frac{Ee^{-\alpha t}}{2L\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}} [e^{\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}t} - e^{-\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}t}]. \quad (5-2.11)$$

de notar que ambas as raízes além de reais são negativas o que forma uma resposta exponencial amortecida.

c) Caso 3: regime crítico

Neste caso temos que $\alpha = \omega_0$, correspondente ao caso

$$R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}},$$

valor crítico da resistência, e portanto temos uma raíz dupla $s_1 = s_2 = -\alpha$. Se nos limitarmos a efectuar esta substituição em (5-2.7) obtemos uma indeterminação. Deveremos então utilizar o desenvolvimento em série da exponencial em torno a zero para encontrar

$$i(t) \approx \frac{E}{2L\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}} e^{-\alpha t} [1 + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}t - 1 + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}t],$$

e ainda

$$i(t) \approx \frac{E}{L} te^{-\alpha t}. \quad (5-2.12)$$

d) Caso 4: regime sub amortecido

Neste caso temos que $\alpha < \omega_0$ e portanto as raízes são complexas conjugadas e imaginárias puras

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}},$$

assim

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d, \quad (5-2.13)$$

onde $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ e a resposta é então do tipo

$$i(t) = \frac{E}{L\omega_d} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t). \quad (5-2.14)$$

dando origem a uma senoide com pulsação ω_d que se amortece exponencialmente com o coeficiente de amortecimento α .

Exemplo: considerando o circuito de segunda ordem da figura 5.8 com $i_1(t) = 5e^{-2t}u(t)$, pretendemos calcular a tensão $e_2(t)$ aos bornos da bobine e da resistência

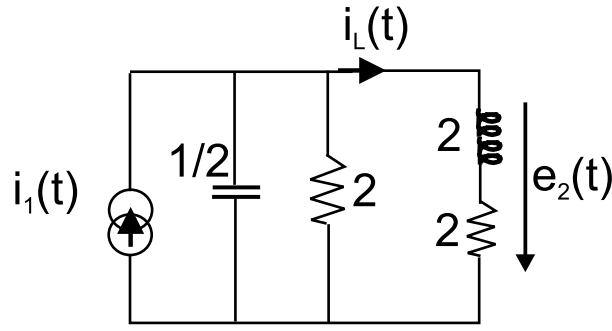


Figura 5.8: circuito de segunda ordem.

em série considerando condições iniciais nulas. Começando por estabelecer o sistema de equações diferenciais, obtem-se

$$e_2(t) = 2i_L(t) + 2\frac{di_L(t)}{dt},$$

e a corrente na bobine

$$i_L(t) = i_1(t) - \frac{1}{2}\frac{de_2(t)}{dt} - \frac{1}{2}e_2(t),$$

por substituição e reagrupando os termos em $i_1(t)$ e $e_2(t)$ temos

$$\frac{d^2e_2(t)}{dt^2} + 2\frac{de_2(t)}{dt} + 2e_2(t) = 2\frac{di_1(t)}{dt} + 2i_1(t),$$

cujas TL é dada por

$$E_2(s)(s^2 + 2s + 2) = 2(s + 1)I_1(s),$$

visto que $I_1(s) = \text{TL}[i_1(t)]$ é dada por

$$I_1(s) = \frac{5}{s + 2},$$

temos que, por substituição na equação anterior, e cálculo das raízes da equação do segundo grau do denominador

$$E_2(s) = \frac{10(s + 1)}{(s + 2)(s + 1 - j)(s + 1 + j)},$$

dando origem à representação no plano s da figura 5.9 e finalmente à TLI (caso idêntico ao exemplo do capítulo 4.2)

$$e_2(t) = [5\sqrt{2}e^{-t}\cos(t - \frac{\pi}{4}) - 5e^{-2t}]u(t). \quad (5-2.15)$$

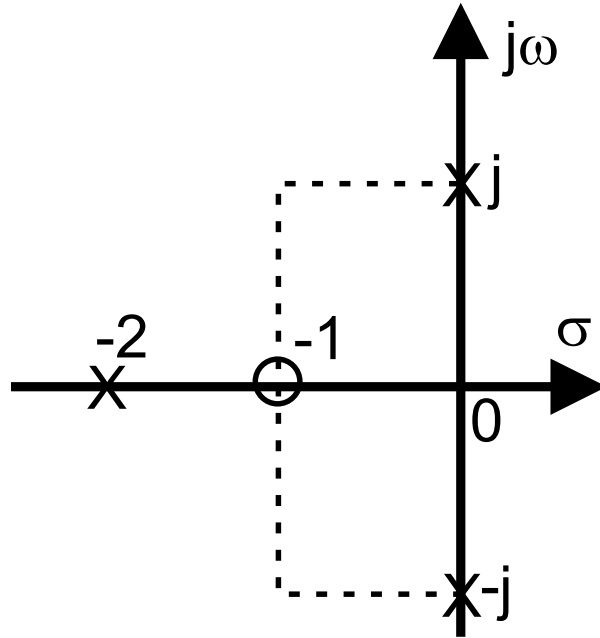


Figura 5.9: pólos e zeros no plano s .

Retomemos o exemplo do circuito de segunda ordem da figura 5.8, utilizando agora o cálculo simbólico directamente. Podemos então escrever directamente a admitância

$$Y(s) = \frac{s}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2s+2},$$

e, visto que $I_1(s) = 5/(s+2)$, temos que

$$E_2(s) = \frac{2(s+1)}{s^2+2s+2} \frac{5}{s+2},$$

equação idêntica à anterior mas que se obteve apenas em dois passos. Na resposta (5-2.15) podemos distinguir perfeitamente que o primeiro termo é devido à resposta natural do sistema e o segundo termo é devido unicamente à excitação $i_1(t)$.

5.3 Caracterização de circuitos em regime transitório

Nos dois sub-capítulos anteriores estudámos a resposta dos circuitos a variações bruscas de tensão ou corrente. Estas variações são frequentemente representadas por funções do tipo degrau unidade $u(t)$. A resposta de um circuito a um degrau unidade é muito útil em análise de circuitos porque permite caracterizar o seu funcionamento em regime transitório. Toma por isso o nome de *resposta indicial* do circuito.

Tendo em conta que as combinações de bobines, resistências e condensadores é quase infinita tornando a análise extensiva impossível optou-se por uma classificação dos circuitos segundo a ordem da (ou das) equação(ões) diferencial(ais) que o(s) regem. Uma das grandes utilidades da resposta indicial é a de, sem conhecer o circuito em detalhe (caixa preta), permitir determinar a ordem do circuito e portanto a sua classificação. Diz-se nesse caso que estamos a *identificar* o circuito a partir da sua resposta indicial.

Neste capítulo vamos determinar quais são os parâmetros característicos dos circuitos de primeira e segunda ordem.

5.3.1 Circuitos de primeira ordem

A resposta indicial dos circuitos de primeira ordem é caracterizada por um regime exponencial crescente ou decrescente tendendo para um valor assintótico constante quando $t \rightarrow \infty$. Uma das características da resposta exponencial dos circuitos de primeira ordem é que a sua tangente na origem intersecta o valor final da curva para $t = \tau =$ constante de tempo do circuito. A constante de tempo do circuito está intimamente ligada ao chamado tempo de subida a 5% que é o tempo que o circuito leva a passar do valor inicial para o valor final menos 5% (ou seja para atingir 95% do valor final). Prova-se que num circuito de primeira ordem o tempo de subida a 5% é $t_{s5} = 3\tau$.

5.3.2 Circuitos de segunda ordem

Contrariamente aos circuitos de primeira ordem, os de segunda ordem, podem não tender para um valor assintótico quando $t \rightarrow \infty$ e o seu comportamento é variável consoante os valores relativos dos seus parâmetros. Os quatro regimes de funcionamento possíveis tem quatro valores característicos relevantes:

1. a frequência de oscilação ω_0 no caso não amortecido ou sinusoidal puro
2. a frequência de oscilação $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$ do regime transitório no caso sub-amortecido, onde $\xi = \alpha/\omega_0$
3. o tempo de subida a 5%
4. o valor de sobre-tensão, que é o valor máximo em que o sinal de saída ultrapassa o valor final

Para além disso outra característica de um circuito de segundo ordem é que a sua resposta indicial admite uma tangente na origem de inclinação nula, o que per-

mite diferenciar, por exemplo, um circuito de segunda ordem sobre amortecido dum circuito de primeira ordem.

5.4 Exemplos

Exemplo 1: Considere o circuito da figura 5.10 ($R'=10\text{ K}\Omega$, $R=1\text{ K}\Omega$, $C=10\text{ }\mu\text{F}$, $E=10\text{ V}$).

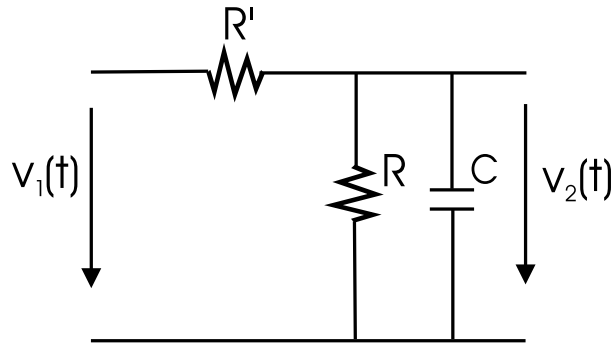


Figura 5.10: circuito do Exemplo 1.

- calcule a expressão literal de $v_2(t)$ em função de $v_1(t)$.
- se o sinal $v_1(t)$ tiver a forma representada na figura 5.11

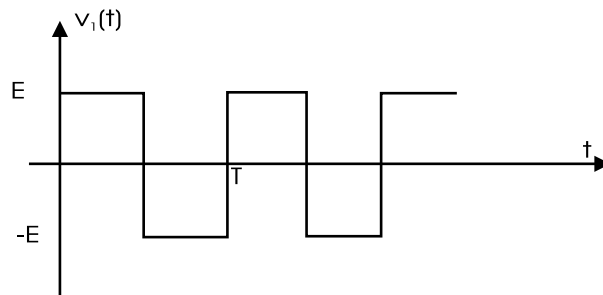


Figura 5.11: tensão $v_1(t)$ no circuito da figura 5.10.

Determinar a forma de $v_2(t)$ para $T=2\text{ s}$, $T=20\text{ ms}$ e $T=2\text{ ms}$.

- notando a corrente que percorre R' , $i(t)$ e as correntes em R e C respectivamente $i_1(t)$ e $i_2(t)$ podemos escrever

$$v_1(t) = R'i(t) + v_2(t) \quad (\text{a})$$

$$v_2(t) = Ri_1(t) = \frac{1}{C} \int i_2(\tau) d\tau, \quad (b)$$

mas

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = \frac{v_2(t)}{R} + C \frac{dv_2(t)}{dt}, \quad (c)$$

substituindo (c) em (a),

$$v_1(t) = \frac{R'}{R} v_2(t) + R'C \frac{dv_2(t)}{dt} + v_2(t), \quad (d)$$

ou ainda

$$R'C \frac{dv_2(t)}{dt} + (1 + R'/R) v_2(t) = v_1(t). \quad (e)$$

b) vamos optar por definir dois intervalos temporais: um para $0 \leq t \leq T/2$ e outro para $T/2 \leq t \leq T$. Calculando agora a TL da equação do circuito e utilizando o dado que $v_2(0) = 0$ no primeiro intervalo,

$$R'CV_2(s) + (1 + \frac{R'}{R})V_2(s) = V_1(s)$$

ou ainda

$$V_2(s) = \frac{V_1(s)}{R'Cs + 1 + R'/R}$$

que depois de algum arranjo e com $V_1(s) = E/s$ (visto que estamos no intervalo $0 < t < T/2$)

$$V_2(s) = \frac{E'}{s(1 + \tau s)}$$

com

$$\tau = \frac{RR'C}{R + R'} \quad \text{e} \quad E' = \frac{RE}{R + R'}.$$

Como habitualmente a TLI permite obter a forma temporal da tensão $v_2(t)$ procurada

$$v_2(t) = E'(1 - e^{-t/\tau}),$$

com os valores numéricos $\tau = 9$ ms e $E' = RE/R + R' = 0.9$ v. Portanto a forma de $v_2(t)$ é uma exponencial de carga do condensador com a constante de tempo de 9ms. Para $T=2$ s temos que $T/2 \gg \tau$ e $v_2(t) \approx v_1(t)$, para $T=20$ ms a constante de tempo é da ordem de grandeza de $T/2$ e por isso temos uma exponencial perfeita até 0.9 v. No caso extremo em que $T=2$ ms, $T/2 \ll \tau$ e nesse caso vê-se apenas o início da exponencial o que parece uma linha recta oblíqua - que pode ser confundido com uma onda triangular. Neste último caso dizemos que o sinal de saída $v_2(t)$ é aproximadamente o integral do sinal de entrada $v_1(t)$.

No segundo intervalo de tempo, i.e., quanto $T/2 \leq t \leq T$, a tensão de entrada $v_1(t)$ muda de E para $-E$ volts, o circuito comporta-se de forma idêntica ao exemplo

do circuito RC estudado no início deste capítulo, com a diferença que em vez de uma tensão $e(t) = 0$ volts temos uma tensão negativa de $-E$ volts, de onde podemos desde já prever que o condensador em vez de se descarregar nas resistências R e R' , se vai carregar a uma tensão de polaridade contrária de valor $-E' = -RE/(R + R')$. Mas, vamos ver as equações. Admitindo que no instante $t = T/2$ a tensão atingida era $v_2(T/2) = E'[1 - \exp(-T/2\tau)]$, a TL da equação que rege o circuito escreve-se

$$R'C[sV_2(s) - v_2(T/2)e^{-sT/2}] + \frac{R + R'}{R}V_2(s) = V_1(s) \quad \text{a}$$

ou seja

$$V_2(s)[R'C s + \frac{R + R'}{R}] = V_1(s) + R'C v_2(T/2)e^{-sT/2}$$

ou ainda, depois de mais alguma arrumação, e considerando que o novo sinal à entrada é $v_1(t) = -E$ dando $V_1(s) = \frac{-E}{s}$ onde E' e τ têm os valores habituais

$$V_2(s) = \frac{-E'/\tau - s v_2(T/2)[1 - e^{-sT/2}]}{s(1/\tau + s)}.$$

A decomposição em factores escreve-se agora

$$V_2(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{1/\tau + s}$$

onde por identificação $A = -E'$ e $B = E' + v_2(T/2) \exp(T/2\tau)$ de onde tiramos directamente a TLI de $V_2(s)$

$$v_2(t) = [-E' + E'e^{-t/\tau} + v_2(T/2)e^{-(t-T/2)/\tau}]u(t).$$

Esta equação permite traçar a resposta final do circuito para os dois intervalos para $0 \leq t \leq T$.

Exemplo 2: para o circuito RL da figura 5.12 determine:

- a) a potência total fornecida pela fonte
- b) a potência dissipada na resistência
- c) a potência armazenada na bobine

a) a potência fornecida pela fonte é $p(t) = v(t)i(t)$. Assim, podemos escrever

$$v(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

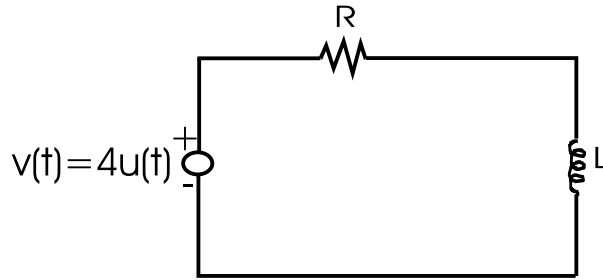


Figura 5.12: circuito do Exemplo 2.

cuja TL com $i(0) = 0$ é

$$V(s) = RI(s) + LsI(s)$$

ou, em função de $I(s)$,

$$I(s) = \frac{V(s)/L}{R/L + s}.$$

Com $V(s) = 4/s$ permite escrever

$$I(s) = \frac{4/L}{s(R/L + s)}$$

onde determinar a TLI de $I(s)$ se faz como habitualmente decompondo em factores e

$$i(t) = \frac{4}{R}u(t) + \frac{4}{R}e^{-t/\tau},$$

onde $\tau = L/R$.

Finalmente a potência escreve-se

$$p(t) = \frac{16}{R}(1 - e^{-t/\tau})u(t), \quad \text{com} \quad \tau = L/R$$

b) a potência dissipada na resistência é igualmente

$$p(t) = Ri^2(t) = \frac{16}{R}(1 - e^{-t/\tau})^2u(t), \quad \text{com} \quad \tau = L/R$$

c) a potência armazenada na bobine

$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = 4e^{-t/\tau},$$

ou seja

$$p_L(t) = \frac{16}{R}e^{-t/\tau}(1 - e^{-t/\tau})u(t).$$

6 Corrente alternada

6.1 Introdução

Começámos primeiro por considerar apenas circuitos com fontes de tensão (e/ou corrente) contínuas (em inglês, DC=*direct current*). Em seguida falámos de fontes descontínuas, ou contínuas por períodos, com bruscas mudanças de tensão (e/ou corrente) e dissemos que o objectivo era o de simular interruptores e estudar assim o regime transitório de estabelecimento das tensões (e/ou correntes) nos circuitos com condensadores e bobines.

É agora o momento de considerar circuitos incluindo fontes de tensão e/ou corrente cujo valor nominal varie em função do tempo e por isso se chamam de tensão ou corrente alternada (em inglês, AC=*alternate current*).

A forma temporal da corrente alternada pode ser de vários tipos: quadrada, sinusoidal, triangular, etc... desde que seja periódica e mude de sinal ao longo do tempo podemos dizer que é corrente alternada. Porém, já vimos anteriormente que a corrente alternada de forma quadrada, por exemplo, pode ser considerada corrente contínua por intervalos. O mesmo poderíamos dizer da corrente alternada de forma triangular que seria uma excitação em rampa por intervalos. Neste capítulo concentraremos o nosso estudo na corrente alternada sinusoidal pois o seu estudo reveste-se de particular importância na prática, por diversas razões:

a) sabendo que todos os sistemas lineares se podem representar por um conjunto de operações de diferenciação e/ou integração e que a derivada/integral de uma senoide é ainda uma senoide, podemos facilmente compreender que a resposta de um tal sistema a uma excitação sinusoidal é também sinusoidal.

b) sabendo que qualquer função periódica pode ser representada por uma soma de sinusoides (desenvolvimento em série de Fourier) podemos, usando o teorema de sobreposição, calcular a resposta de um sistema linear a cada uma das sinusoides que formam o sinal de entrada e somar o resultado obtendo assim o sinal reposta a qualquer função periódica. Diz-se por esta razão que a senoide é uma função própria dos sistemas lineares.

6.2 Regime permanente sinusoidal

Nos capítulos anteriores estudámos a resposta transitória de alguns circuitos com condensadores, bobines e resistências. Vimos que essa resposta transitória correspondia, em termos das soluções das equações diferenciais dos circuitos, à solução sem excitação. Esta solução também é chamada resposta natural ou não forçada.

A introdução do sinal de excitação no segundo membro dava origem a uma solução particular e ao regime permanente quando $t \rightarrow \infty$.

Vamos agora estudar a resposta forçada sem nos interessarmos do regime transitório quando o sinal de excitação é uma onda sinusoidal. A resposta forçada dá, neste caso, origem ao regime permanente sinusoidal.

Como exemplo vamos considerar o circuito RL série da figura 6.1 quando $v(t) = V_m \cos(\omega t)$.

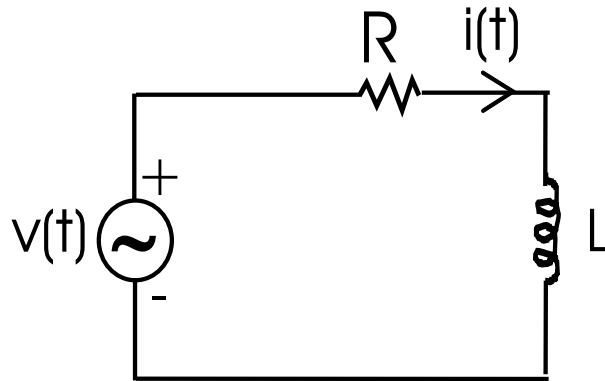


Figura 6.1: circuito RL série em regime sinusoidal.

Neste caso, depois de passado o regime transitório, no qual intervem a indução inicial na bobine, o circuito deverá obedecer à seguinte equação

$$v(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}, \quad (6-2.1)$$

sabendo à partida que a solução da equação terá também uma forma sinusoidal podemos procurar soluções do tipo

$$i(t) = I_1 \cos(\omega t) + I_2 \sin(\omega t), \quad (6-2.2)$$

derivando e substituindo em (6-2.1) obtemos

$$(RI_2 - L\omega I_1) \sin(\omega t) + (RI_1 - V_m + L\omega I_2) \cos(\omega t) = 0, \quad (6-2.3)$$

que só se verifica se

$$RI_2 - L\omega I_1 = 0 \quad (6-2.4)$$

$$RI_1 - V_m + L\omega I_2 = 0 \quad (6-2.5)$$

visto que uma função seno e cosseno de mesma pulsação nunca se anulam simultaneamente. Resolvendo em relação a I_1 e I_2 permite obter

$$I_1 = \frac{RV_m}{R^2 + \omega^2 L^2} \quad (6-2.6)$$

$$I_2 = \frac{\omega L V_m}{R^2 + \omega^2 L^2}, \quad (6-2.7)$$

de onde podemos substituir em (6-2.2) e fazendo

$$\cos(\phi_0) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad (6-2.8)$$

$$\sin(\phi_0) = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad (6-2.9)$$

escrever a forma final para a corrente

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t - \phi_0), \quad (6-2.10)$$

com a amplitude

$$I_0 = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}, \quad (6-2.11)$$

e o termo de fase

$$\phi_0 = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right). \quad (6-2.12)$$

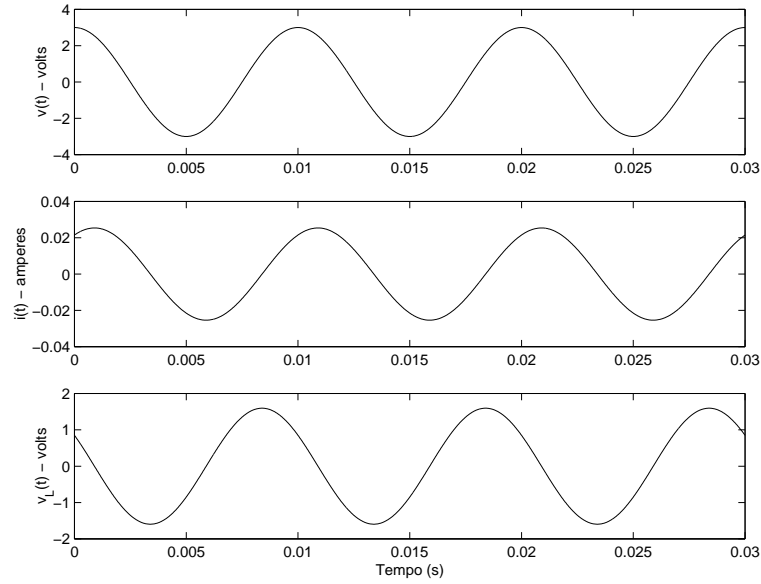


Figura 6.2: $v(t)$, $i(t)$ e $v_L(t)$ no circuito da figura 6.1.

Poderíamos ainda deduzir a tensão $v_L(t)$ aos terminais da bobine que seria neste caso

$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = -V_{L0} \sin(\omega t - \phi_0), \quad (6-2.13)$$

onde $V_{L0} = L\omega I_0$. Usando a relação $-\sin \theta = \cos(\theta + \pi/2)$ podemos notar que,

$$v_L(t) = V_{L0} \cos(\omega t - \phi_0 + \frac{\pi}{2}), \quad (6-2.14)$$

o que nos permite determinar que $v_L(t)$ se encontra adiantado de $\pi/2$ em relação à corrente $i(t)$. A figura 6.2 representa a tensão $v(t)$, a corrente $i(t)$ e a tensão $v_L(t)$ para $V_m = 3$ v, $R = 100\Omega$, $L = 0.1$ H e $f_0 = 100$ Hz.

De uma forma alternativa poderíamos empregar a TL para resolver este circuito utilizando directamente as ferramentas do cálculo simbólico. Assim podemos escrever directamente

$$V(s) = RI(s) + LsI(s), \quad (6-2.15)$$

e por isso

$$I(s) = \frac{V(s)}{R + Ls}, \quad (6-2.16)$$

com $V(s) = \text{TL}[v(t)] = V_ms/(s^2 + \omega^2)$. Substituindo em (6-2.16) e decompondo a fração em s ,

$$I(s) = \frac{V_ms}{(s^2 + \omega^2)(R + Ls)} = \frac{A}{s + R/L} + \frac{B}{s - j\omega} + \frac{B^*}{s + j\omega}, \quad (6-2.17)$$

com

$$A = -\frac{V_m R}{R^2 + L^2 \omega^2},$$

$$B = \frac{V_m}{2(R + j\omega L)}.$$

Podemos então deduzir a corrente $i(t)$

$$i(t) = -\frac{V_m R e^{-R/Lt}}{R^2 + L^2 \omega^2} + \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \phi_0), \quad (6-2.18)$$

onde $\phi_0 = \tan^{-1}(\omega L/R)$. A análise da expressão (6-2.18) mostra-nos que a solução do problema é formada por dois termos: o primeiro diz respeito ao regime transitório com a constante de tempo $\tau = L/R$, como encontrado nos exemplos do capítulo 5, e o segundo diz respeito ao regime permanente sinusoidal e é idêntico à solução (6-2.10) com (6-2.11) e (6-2.12).

6.3 Notação complexa e impedâncias

O facto já mencionado anteriormente de que uma excitação sinusoidal a uma determinada pulsação ω , tem como resposta em regime permanente ainda uma forma

sinusoidal de mesma pulsação, e apenas com uma diferença de fase e de amplitude, motivou a introdução de uma noção simplificativa que é a noção de *fasor*.

Comecemos por considerar a família de excitações exponenciais complexas:

$$x(t) = \begin{cases} \Re[\vec{X}] = \Re[|\vec{X}|e^{j\theta}e^{(\alpha+j\omega)t}] & t > 0; \\ 0 & t < 0, \end{cases} \quad (6-3.1)$$

onde \vec{X} é um vector, possivelmente complexo, e onde $\Re[\cdot]$ é o operador “parte real de”. Podemos ainda notar a equação (6-3.1) como

$$x(t) = \Re[\vec{X}] \quad (6-3.2)$$

$$= \Re[|X|e^{\alpha t}e^{j(\omega t+\theta)}] \quad (6-3.3)$$

$$= |X|e^{\alpha t}\cos(\omega t + \theta). \quad (6-3.4)$$

Este vector encontra-se representado na figura 6.3, onde podemos notar que θ é o ângulo inicial que o vector faz com o eixo das abcissas, ou termo de fase do sinal no domínio do tempo, ω representa a velocidade com a qual o vector gira em torno à origem quanto o tempo aumenta e α é um coeficiente de atenuação de amplitude. Trata-se portanto de uma família de funções que, segundo os valores de relativos de α , ω e θ pode tomar as formas de exponencial pura (quando $\omega = 0$), sinusoidal pura (quando $\alpha = 0$) ou ainda sinusoidal amortecida, $\alpha \neq 0$ e $\omega \neq 0$.

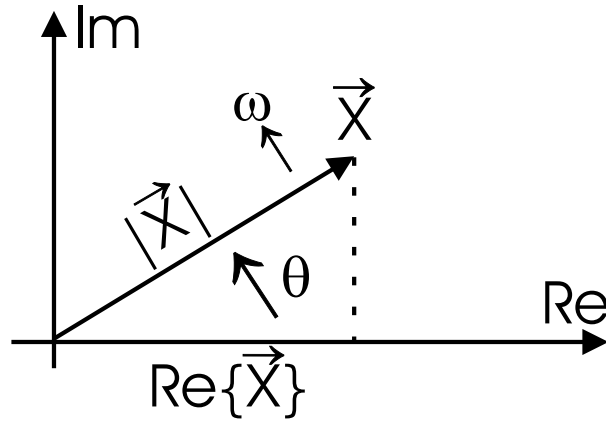


Figura 6.3: representação do fasor.

A regime permanente sinusoidal obtem-se para $\alpha = 0$ e nesse caso

$$x(t) = \Re\{|\vec{X}|e^{j(\omega t+\theta)}\}, \quad (6-3.5)$$

cuja interpretação é a de um vector \vec{X} rodando no plano complexo no sentido anti-horário com uma pulsação ω como representado na figura 6.3. Este vector é chamado

*f*asor ou vector de Fresnel. Se considerarmos a projecção deste vector no eixo real temos

$$x(t) = |\vec{X}| \cos(\omega t + \theta), \quad (6-3.6)$$

que não é mais do que uma função sinusoidal de amplitude $|\vec{X}|$ e pulsação ω como temos vindo a considerar ao longo deste capítulo. A hipótese simplificadora reside em considerar não o sinal real $x(t)$ mais sim a sua representação complexa \vec{X} e realizar todo o cálculo em álgebra complexa sabendo de antemão que o resultado será a parte real de $|\vec{X}| \exp j(\omega t + \theta)$.

A título de exemplo, vamos refazer o cálculo efectuado para o circuito RL série do capítulo 6.2 usando agora a notação complexa. Observando a figura 6.1 podemos escrever o fasor \vec{V} associado com a tensão $v(t)$ como

$$\vec{V} = R\vec{I} + j\omega L\vec{I}, \quad (6-3.7)$$

onde \vec{I} é o fasor associado com a corrente $i(t)$ e a queda de tensão aos terminais da bobine $v_L(t) = L di(t)/dt$ é simplesmente substituída por $j\omega L\vec{I}$ visto que

$$\frac{d}{dt}\vec{I} = \frac{d}{dt}|\vec{I}|e^{j\omega t + \theta} = j\omega\vec{I}, \quad (6-3.8)$$

e aqui reside toda a simplificação da notação complexa: *as derivadas tornam-se multiplicações por $j\omega$ e os integrais tornam-se divisões por $j\omega$ e, como resultado, as equações diferenciais tornam-se equações algébricas em $j\omega$!*

Voltando a (6-3.7) escrevemos

$$\vec{I} = \frac{\vec{V}}{R + j\omega L}, \quad (6-3.9)$$

e a solução final encontra-se tomando a parte real de cada lado de (6-3.9) de onde se obtem

$$\Re\{\vec{I}\} = \Re\left\{\frac{R - j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \vec{V}\right\}, \quad (6-3.10)$$

de onde substituindo \vec{V} por $V_m e^{j\omega t}$ obtemos

$$i(t) = \frac{RV_m}{R^2 + \omega^2 L^2} \cos(\omega t) + \frac{\omega LV_m}{R^2 + \omega^2 L^2} \sin(\omega t), \quad (6-3.11)$$

e que é o resultado esperado se substituirmos (6-2.6) e (6-2.7) em (6-2.2).

Como antevisto em (6-3.8), em regime permanente sinusoidal e usando a notação complexa, a bobine tem uma queda de tensão

$$\vec{V}_L = j\omega L\vec{I}, \quad (6-3.12)$$

que é a forma da lei de Ohm em notação complexa e que introduz a noção de impedância Z tal que $\vec{V} = Z\vec{I}$ e no exemplo acima a impedância da bobine é $Z_L = j\omega L$.

Fazendo o mesmo raciocínio com o condensador temos que,

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int i(\tau) d\tau \quad (6-3.13)$$

permite-nos achar a representação em termos de fasores respectiva,

$$\vec{V}_C = \frac{1}{C} \int |I| e^{j\omega\tau} d\tau \quad (6-3.14)$$

$$= \frac{1}{C} \frac{\vec{I}}{j\omega} \quad (6-3.15)$$

$$= Z_L \vec{I} \quad (6-3.16)$$

com a impedância equivalente

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}.$$

Será fácil verificar que no caso de uma resistência R , a tensão e corrente sob forma de fasor se encontram ligados por uma impedância $Z_R = R$.

6.4 Circuitos RC e RLC

Vamos agora aplicar os nossos conhecimentos em dois exemplos já usados anteriormente no cálculo do regime transitório. Consideremos o circuito da figura 6.4.

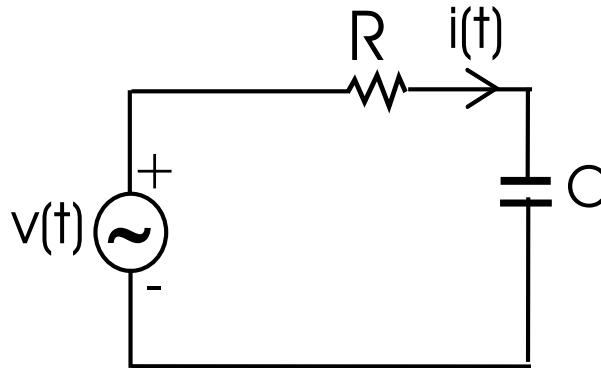


Figura 6.4: circuito RC série em regime sinusoidal.

Neste caso, podemos escrever

$$\vec{V} = R\vec{I} + \vec{V}_C, \quad (6-4.1)$$

ou usando a impedância de C e resolvendo em relação a \vec{V}_C ,

$$\vec{V} = (1 + jRC\omega)\vec{V}_C, \quad (6-4.2)$$

de modo análogo ao da passagem de (6-3.10) a (6-3.11) podemos escrever

$$v_c(t) = \frac{V_m}{1 + R^2C^2\omega^2} \cos(\omega t) + \frac{RC\omega V_m}{1 + R^2C^2\omega^2} \sin(\omega t). \quad (6-4.3)$$

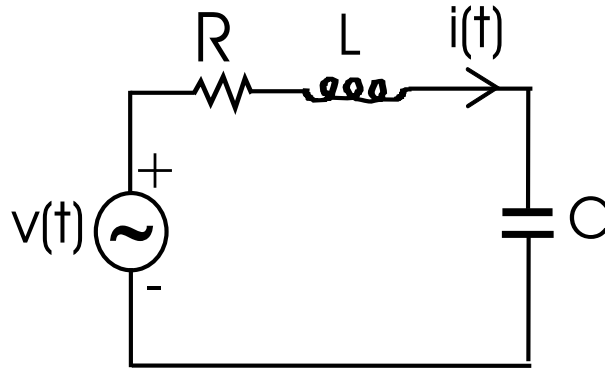


Figura 6.5: circuito RLC série em regime sinusoidal.

O caso do circuito RLC da figura 6.5 resolve-se também simplesmente escrevendo a equação das malhas (neste caso em notação complexa)

$$\vec{V} = R\vec{I} + j\omega L\vec{I} + \frac{\vec{I}}{j\omega C}; \quad (6-4.4)$$

$$\vec{I} = \frac{j\omega C}{1 + j\omega RC - LC\omega^2} \vec{V}, \quad (6-4.5)$$

e de novo se passa para o domínio temporal tomando a parte real de cada um dos membros de (6-4.5). Deixamos esta última fase como exercício de cálculo.

6.5 Diagramas

No capítulo anterior introduzimos a noção de fasor que é um passo essencial para o uso da notação complexa e a enorme simplificação que esta produz nas equações dos circuitos em regime permanente sinusoidal. Notamos porém, que se esta potente ferramenta de cálculo for utilizada no cálculo intermédio com o objectivo de determinar apenas a resposta temporal, parte da sua economia perde-se no cálculo da parte real do sinal resposta.

Com efeito, esta ferramenta adquire toda sua potencialidade quando se pretende, não obter a resposta temporal, mas sim a resposta frequencial de um determinado circuito. Frequentemente pretendemos determinar qual a resposta de um determinado circuito em regime permanente sinusoidal a diversas frequências do sinal excitação. A este tipo de resposta dá-se o nome de resposta em frequência e é classicamente representada em termos da relação entrada-saída através de diagramas que são: o diagrama de Bode, diagrama cartesiano e diagrama polar ou de Nyquist.

Tomemos como exemplo o caso do circuito RC estudado atrás. A relação entrada-saída pode-se escrever a partir de (6-4.2) como

$$A(\omega) = \frac{\vec{V}_C}{\vec{V}} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \quad (6-5.1)$$

esta relação, que chamaremos $A(\omega)$, e que neste caso é sem dimensão, visto que a relação entrada-saída desejada é tensão-tensão, é uma grandeza complexa que tem módulo e fase.

a) Diagrama de Bode

No diagrama de Bode representa-se o módulo e a fase em gráficos separados sendo a ordenada do módulo em décibéis (dB) e o da fase em graus. Em ambos os casos a abcissa é a frequência em Hz.

O módulo obtem-se no caso de (6-5.1) fazendo

$$|A(\omega)|_{(dB)} = 20 \log_{10} \left| \frac{\vec{V}_C}{\vec{V}} \right|, \quad (6-5.2)$$

com

$$\left| \frac{\vec{V}_C}{\vec{V}} \right| = \sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}, \quad (6-5.3)$$

e portanto

$$|A(\omega)|_{(dB)} = -10 \log_{10}(1 + R^2 C^2 \omega^2), \quad (6-5.4)$$

pondo $\omega_0 = 1/RC$ temos que

$$|A(\omega)|_{(dB)} = -10 \log_{10} \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right], \quad (6-5.5)$$

a curva de fase, notada $\angle A(\omega)$, escreve-se com as mesmas definições a partir de (6-5.1)

$$\angle A(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right). \quad (6-5.6)$$

Pode-se fazer a representação de (6-5.5) e (6-5.6) notando alguns valores particulares e assintóticos. Na prática o diagrama de Bode faz-se em papel dito semi-logarítmico,

onde o eixo das frequências é, não ω , mas sim $\log_{10} \omega$. Podemos então notar que, por exemplo, quando $\omega \rightarrow 0$ o gráfico do módulo tende para uma assíntota horizontal de ordenada = 0 dB. Quando por sua vez $\omega \rightarrow \infty$, no caso do módulo, o rácio $\omega/\omega_0 \gg 1$ e portanto $|A(\omega)|_{dB} \rightarrow -20 \log_{10} \omega + 20 \log_{10} \omega_0$, a assíntota é $-20 \log_{10} \omega + 20 \log_{10} \omega_0$ o que, num gráfico semi-logarítmico com $X = \log_{10} \omega$, é do tipo $y(X) = -20X + X_0$, o que representa uma recta de declive -20 e ordenada na origem $-20X_0$, onde $X_0 = \log_{10} \omega + 0$. Quer isto dizer que quando ω varia para 10ω , X varia para $X + 1$ e portanto a recta $y(X + 1) = y(X) - 20$. Em resumo quando ω varia de uma década, *i.e.*, é multiplicada por 10, então a assíntota “desce” 20 dB. Dizemos nesse caso que o gráfico de amplitude admite uma assíntota de -20 dB/década quando $\omega \rightarrow \infty$. A curva de fase deduz-se facilmente da sua expressão (6-5.6). Em resumo temos que

$$\begin{aligned}\omega \rightarrow 0 &\Rightarrow |A(\omega)|_{(dB)} \rightarrow 0dB & \angle A(\omega) &= 0 \\ \omega \rightarrow \infty &\Rightarrow |A(\omega)|_{(dB)} \rightarrow -20 \log_{10} \omega + 20 \log_{10} \omega_0 & \angle A(\omega) &= -\pi/2 \\ \omega = \omega_0 &\Rightarrow |A(\omega)|_{(dB)} = -3dB & \angle A(\omega) &= -\pi/4\end{aligned}$$

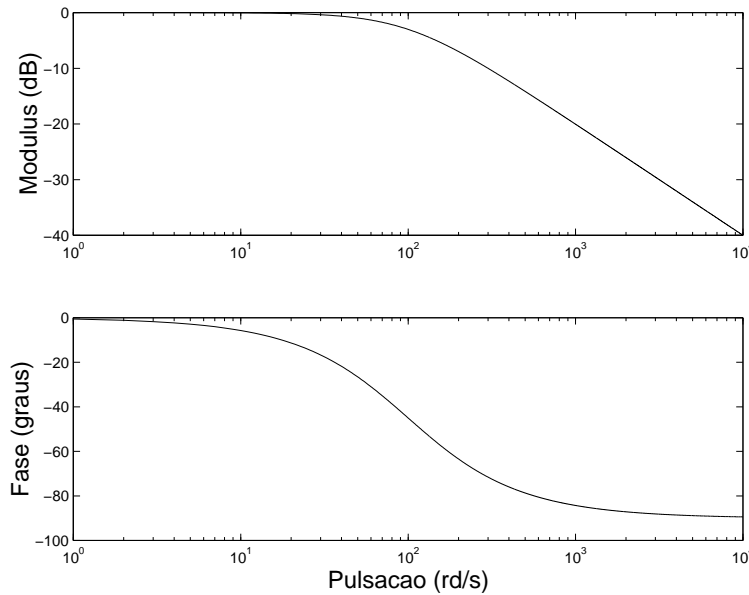


Figura 6.6: representação de Bode.

A título de exemplo, as equações (6-5.5) e (6-5.6) encontram-se representadas na figura 6.6 para $\omega_0 = 100$ rd/s, *i.e.*, $f_0 = \omega_0/2\pi = 16.9$ Hz.

b) Diagrama cartesiano

No caso do diagrama cartesiano usa-se, como o nome indica, a notação cartesiana de um número complexo. Assim, procura-se colocar a relação entrada-saída sob a

forma $X + jY$. No caso da equação (6-5.1),

$$X + jY = \frac{1}{1 + R^2 C^2 \omega^2} - j \frac{RC\omega}{1 + R^2 C^2 \omega^2}, \quad (6-5.7)$$

da qual se deduz facilmente X e $-Y$ que se traçam em geral no mesmo gráfico semi-logarítmico em função da frequência f como exemplificado no gráfico da figura 6.7 para o mesmo valor de f_0 que anteriormente.

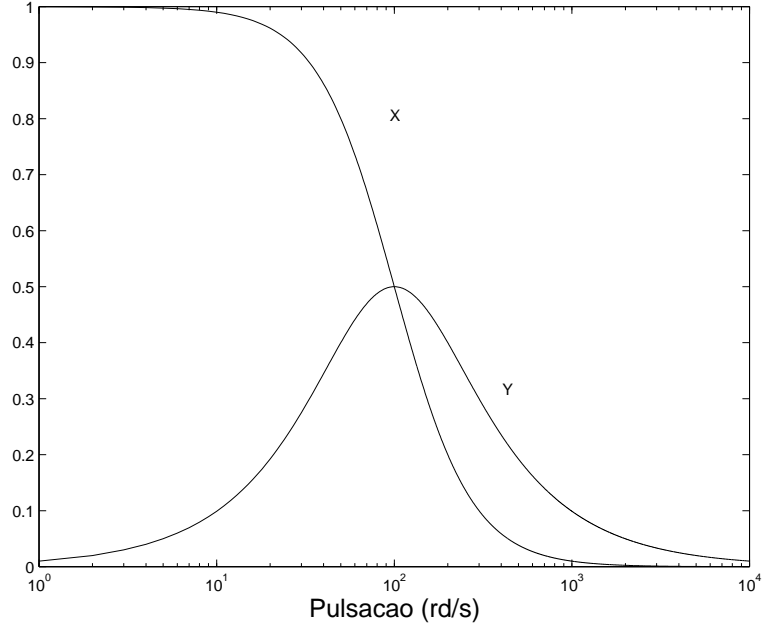


Figura 6.7: representação cartesiana.

c) Diagrama de Nyquist

Este diagrama utiliza a notação polar complexa na qual um número complexo é representado por um vector cujo comprimento é o módulo de $A(\omega)$ (eventualmente em dB's) e o ângulo é a fase de $A(\omega)$ parameterizado em f ou ω . i.e.,

$$A(\omega) = |A(\omega)| \exp\{j\angle A(\omega)\} \quad (6-5.8)$$

6.6 Caracterização da resposta em frequência

Neste capítulo abordamos uma forma alternativa de estudar os circuitos através do seu comportamento em regime de corrente alternada sinusoidal. As quantidades interessantes são nesse caso a medida da amplitude e da fase do sinal de saída em relação à amplitude e fase do sinal de entrada. Porém, na prática, é mais corrente

estudar o comportamento em frequência do rácio entre o sinal de saída e o sinal de entrada que, em geral, é uma quantidade adimensional, complexa e significativa de um ganho em tensão, corrente ou potência do circuito considerado.

Vamos agora determinar quais as características de um circuito de primeira e de segunda ordem, *i.e.*, aquilo que se pode medir na prática e que permite diferenciá-los.

6.6.1 Circuitos de primeira ordem

Os circuitos eléctricos deste tipo, como por exemplo os circuitos das figuras 6.1 e 5.1, são regidos por uma equação diferencial de primeira ordem e têm uma função de transferência do tipo

$$H(s) = \frac{K}{a + s}, \quad (6-6.1)$$

onde K e a são constantes reais (positiva no caso de a). Já vimos que neste caso $s = j\omega$ e por isso torna-se indiferente falar de s ou ω . Neste caso a função tem um pólo em $-a$, mas poderia por exemplo ter apenas um zero e que seria igualmente um sistema de primeira ordem, obtendo assim uma resposta em frequência para a qual

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow H(j\omega) \rightarrow \frac{K}{a}$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow H(j\omega) \rightarrow 0$$

admitindo os valores limites e as assíntotas como indicado no capítulo anterior. Em resumo:

*a resposta em frequência de um circuito de primeira ordem é caracterizada por um valor máximo quando $\omega \rightarrow 0$ ou quando $\omega \rightarrow \infty$. Outra característica é de que a inclinação da sua assíntota quando $H(j\omega) \rightarrow 0$ é de -20 dB/década (*i.e.* o sinal de saída é atenuado de 20 dB cada vez que a frequência é multiplicada por dez). Mais, a sua curva de fase tem uma excursão total de 90 graus.*

6.6.2 Circuitos de segunda ordem

Neste caso estaremos em presença, por exemplo, de uma função resposta do tipo (mais uma vez é um exemplo tipo, poderia ser uma função com dois zeros ou um zero e um pólo em vez de dois pólos)

$$H(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\alpha\omega s + \omega_0^2}, \quad (6-6.2)$$

de onde normalizando por ω_0^2 obtemos

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2 + \frac{2\alpha}{\omega_0}j\omega}. \quad (6-6.3)$$

Fazendo os valores limites temos

$$\begin{aligned} \omega \rightarrow 0, &\Rightarrow H(j\omega) \rightarrow K \\ \frac{\omega}{\omega_0} \gg 1, &\Rightarrow H(j\omega) \rightarrow -K(\frac{\omega_0}{\omega})^2 \\ \frac{\omega}{\omega_0} = 1, &\Rightarrow H(j\omega) = K \frac{\omega_0}{2\alpha j\omega} \\ \omega \rightarrow \infty, &\Rightarrow H(j\omega) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Podemos ainda verificar que neste último caso, quando $\omega \rightarrow \infty$, que o módulo de $H(j\omega)$ tende em dB's para

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \rightarrow -10 \log[(\omega/\omega_0)^4],$$

ou seja

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \rightarrow -40 \log \omega + 40 \log \omega_0$$

e portanto tende para uma assíntota com a inclinação de -40 dB/década, *i.e.* o dobro que nos circuitos de primeira ordem. Esta constitui uma das características mais importantes dos circuitos de segunda ordem.

Uma outra característica única da resposta em frequência dos circuitos de segunda ordem é a possível existência de uma sobretensão. Por outras palavras, o valor máximo da função pode não ser obtido nem quando $\omega \rightarrow 0$ nem quando $\omega \rightarrow \infty$. Fazendo o cálculo da derivada em relação a ω do módulo $|H(j\omega)|$ (que deixamos como exercício) obtemos que essa derivada se anula para

$$\omega = 0, \quad \omega_n = \pm \omega_0 \sqrt{1 - 2\alpha^2}$$

temos portanto o aparecimento de um valor limite, que é $\alpha = \sqrt{2}/2$ tal que $\alpha < \sqrt{2}/2, \Rightarrow$ não existe sobretensão $\alpha > \sqrt{2}/2, \Rightarrow$ existe sobretensão o valor da sobretensão, quando ela existe, pode ser facilmente calculado como sendo

$$|H(j\omega_n)| = \frac{K/2}{\alpha \sqrt{1 - \alpha^2}}$$

No que diz respeito à fase deste circuito pode-se deduzir facilmente como sendo variável entre 0 quando $\omega \rightarrow 0$ e -180 graus quando $\omega \rightarrow \infty$ porque a curva de fase é dada por

$$\Phi(j\omega) = -\tan^{-1} \frac{2\alpha\omega/\omega_0}{1 - (\omega/\omega_0)^2}$$

e passa por isso sempre por -90 graus para $\omega = \omega_0$. A forma como evolui mais ou menos rapidamente para as assíntotas depende essencialmente do parâmetro α .

6.7 Exemplos

Exemplo 1: estabelecer o circuito de Thevenin equivalente para o circuito activo da figura 6.8 ($L_1 = 5/\omega$ H e $L_2 = 4/\omega$ H).

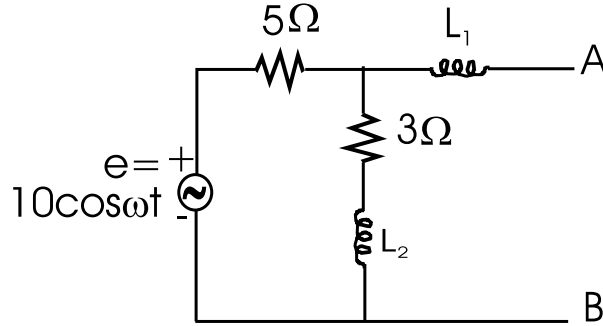


Figura 6.8: dipólo indutivo.

Em regime permanente sinusoidal a impedância de Thevenin equivalente escreve-se

$$Z_{th} = jL_1\omega + 5 // (3 + jL_2\omega) = j5 + \frac{15 + 20j}{8 + 4j} = 2.5 + 6.25j$$

Visto que V_{th} é medido em aberto podemos escrever directamente a partir do divisor de tensão

$$\vec{V}_{th} = \frac{(3 + 4j)\vec{E}}{8 + j4} = (0.5 + 0.25j)\vec{E}$$

passando do fasor à componente temporal sabendo que $\vec{E} = V_m \cos \omega t + jV_m \sin \omega t$

$$\Re\{\vec{V}_{th}\} = 0.5V_m \cos \omega t - 0.25V_m \sin \omega t$$

pondo $\cos \phi = 0.5$ e $\sin \phi = 0.25$ e utilizando uma relação trigonométrica usual podemos escrever

$$v_{th}(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) \quad \phi = \tan^{-1}(0.5) = 26.5^\circ$$

finalmente o resultado

$$v_{th} = 10 \cos(\omega t + 0.46)$$

$$Z_{th} = 2.5 + 6.25j$$

Exemplo 2: considere o circuito representado na figura 6.9.

a) determine a função de transferência $T(j\omega) = V_s/V_e$.

b) traçar no plano de Bode a curva de reposta em frequência deste circuito sabendo que $RC = 10^{-3}$ s/rd.

c) trocando R e C responda de novo às questões a) e b).

d) quais são as propriedades interessantes desta montagem ? O que se passa quando a frequência é mantida fixa e fazemos variar R ?

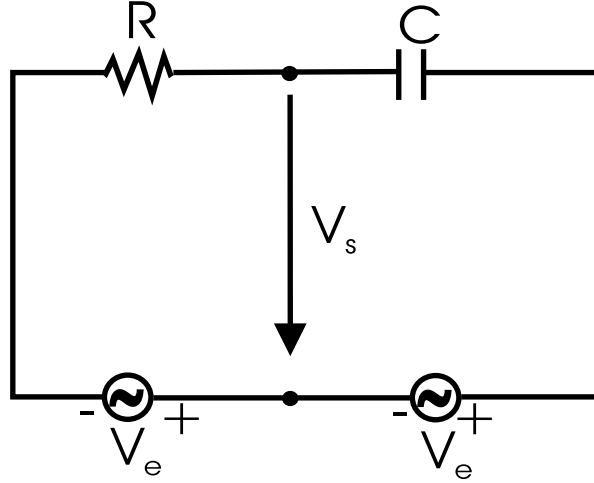


Figura 6.9: circuito desfasador puro.

Notando i a corrente única no circuito temos as equações nas duas malhas que são

$$\vec{V}_s + \vec{V}_e + R\vec{I} = 0 \quad (a)$$

$$\vec{V}_e - \vec{V}_s + \frac{\vec{I}}{jC\omega} = 0 \quad (b)$$

de (b) podemos deduzir

$$\vec{I} = jC\omega(\vec{V}_s - \vec{V}_e) \quad (c)$$

substituindo (c) em (a) temos

$$\vec{V}_s(1 + jRC\omega) + \vec{V}_e(1 - jRC\omega) = 0$$

e finalmente

$$T(j\omega) = \frac{\vec{V}_s}{\vec{V}_e} = -\frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

b) o módulo escreve-se

$$|T(j\omega)| = 1$$

$$\angle T(j\omega) = \tan^{-1}(-RC\omega) - \tan^{-1}(RC\omega) = -2 \tan^{-1}(RC\omega)$$

curva de Bode extremamente simples pois o módulo é sempre constante igual a 0 dB enquanto a curva de fase é um arco tangente entre 0 e -180 graus passando a -90 graus para $\omega = \omega_0 = 1000 \text{ rd/s}$.

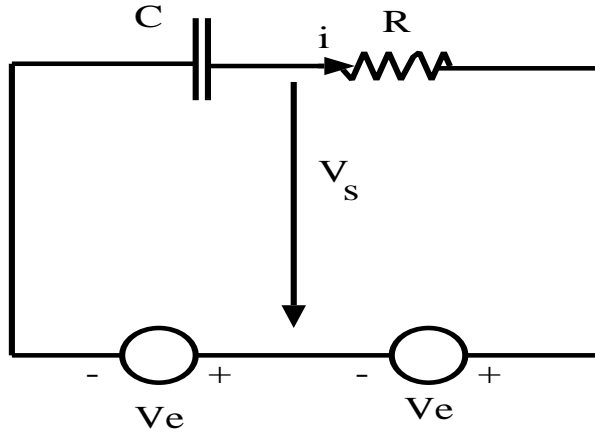


Figura 6.10: desfasador puro simétrico.

c) o novo circuito encontra-se representado na figura 6.10

a partir do qual podemos escrever as equações nas duas malhas

$$\frac{\vec{I}}{jC\omega} + \vec{V}_s + \vec{V}_e = 0$$

$$R\vec{I} + \vec{V}_e - \vec{V}_s = 0$$

tirando \vec{I} da primeira e substituindo na segunda

$$jRC\omega(-\vec{V}_s - \vec{V}_e) + \vec{V}_e - \vec{V}_s = 0$$

e portanto

$$T(j\omega) = \frac{\vec{V}_s}{\vec{V}_e} = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

O módulo e a fase de $T(j\omega)$ escrevem-se respectivamente

$$|T(j\omega)| = 1$$

$$\angle T(j\omega) = -2 \tan^{-1}(RC\omega)$$

e o diagrama de Bode é idêntico ao caso precedente.

d) este circuito é um desfasador puro: introduz uma diferença de fase em função da frequência cujo valor se altera modificando a resistência R , não introduzindo ganhos nem perdas.

7 Quadripolos

7.1 Introdução

Quadripolos são redes complexas de dipolos onde são definidos um dipolo dito de entrada e um dipolo dito de saída. De modo a facilitar a análise destas redes complexas de dipolos utilizam-se algumas definições de correntes e tensões que se encontram exemplificadas na figura 7.1.

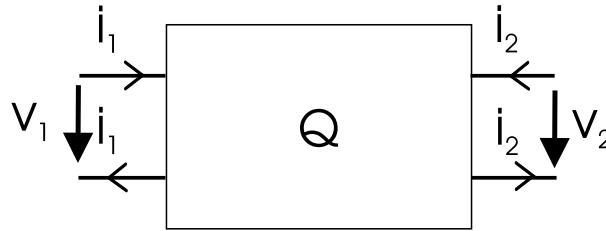


Figura 7.1: definição de tensões e correntes num quadripolo.

A teoria dos quadripolos, que é o objecto deste capítulo, baseia-se numa definição sistemática das relações possíveis entre as quatro grandezas definidas na figura 7.1, *i.e.*, v_1 , i_1 , v_2 e i_2 . Estudaremos apenas quadripolos passivos, *i.e.*, aqueles que não contêm fontes independentes.

7.2 Parâmetros impedância

Podemos definir um quadripolo passivo pelo seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} v_1 = z_{11}i_1 + z_{12}i_2 \\ v_2 = z_{21}i_1 + z_{22}i_2 \end{cases} \quad (7-2.1)$$

os elementos $z_{(\cdot)}$, devido à sua dimensão, são chamados parâmetros impedância e definem-se do seguinte modo:

$$z_{11} = \frac{v_1}{i_1} \Big|_{i_2=0}$$

$$z_{12} = \frac{v_1}{i_2} \Big|_{i_1=0}$$

$$z_{21} = \frac{v_2}{i_1} \Big|_{i_2=0}$$

$$z_{22} = \frac{v_2}{i_2} \Big|_{i_1=0}$$

que são respectivamente

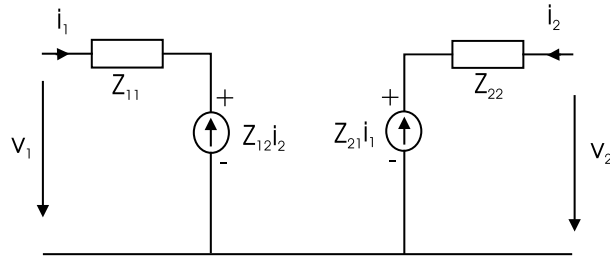


Figura 7.2: esquema de impedâncias equivalente.

z_{11} : impedância de entrada com a saída em aberto.

z_{12} : impedância de transferência inversa com a entrada em aberto.

z_{21} : impedância de transferência directa com a saída em aberto.

z_{22} : impedância de saída com a entrada em aberto.

cujo esquema eléctrico equivalente está representado na figura 7.2.

7.3 Parâmetros admitância

Podemos igualmente definir um quadripolo passivo pelo seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} i_1 = y_{11}v_1 + y_{12}v_2 \\ i_2 = y_{21}v_1 + y_{22}v_2 \end{cases} \quad (7-3.1)$$

os elementos $y_{(\cdot)}$, devido à sua dimensão, são chamados parâmetros admitância e definem-se do seguinte modo:

$$y_{11} = \frac{i_1}{v_1} \Big|_{v_2=0}$$

$$y_{12} = \frac{i_1}{v_2} \Big|_{v_1=0}$$

$$y_{21} = \frac{i_2}{v_1} \Big|_{v_2=0}$$

$$y_{22} = \frac{i_2}{v_2} \Big|_{v_1=0}$$

que são respectivamente

y_{11} : admitância de entrada com a saída em curto-circuito.

y_{12} : admitância de transferência inversa com a entrada em curto-circuito.

y_{21} : admitância de transferência directa com a saída em curto-circuito.

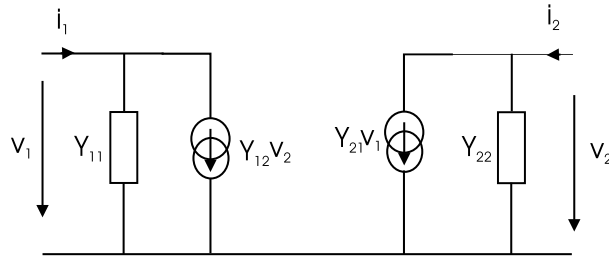


Figura 7.3: esquema de admitâncias equivalente.

y_{22} : admitância de saída com a entrada em curto-circuito.

cujo esquema eléctrico equivalente está representado na figura 7.3.

7.4 Parâmetros híbridos

Podemos também definir um quadripolo passivo pelo seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} v_1 = h_{11}i_1 + h_{12}v_2 \\ i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}v_2 \end{cases} \quad (7-4.1)$$

os elementos $h_{(.)}$ devido à sua dimensão, que é variável segundo o caso, são chamados parâmetros híbridos e definem-se do seguinte modo:

$$h_{11} = \frac{v_1}{i_1} \Big|_{v_2=0}$$

$$h_{12} = \frac{v_1}{v_2} \Big|_{i_1=0}$$

$$h_{21} = \frac{i_2}{i_1} \Big|_{v_2=0}$$

$$h_{22} = \frac{i_2}{v_2} \Big|_{i_1=0}$$

que são respectivamente

h_{11} : impedância de entrada com a saída em curto-circuito.

h_{12} : ganho em tensão inverso com a entrada em aberto.

h_{21} : ganho em corrente directo com a saída em curto-circuito.

h_{22} : admitância de saída com a entrada em aberto.

cujo esquema eléctrico equivalente se encontra representado na figura 7.4.

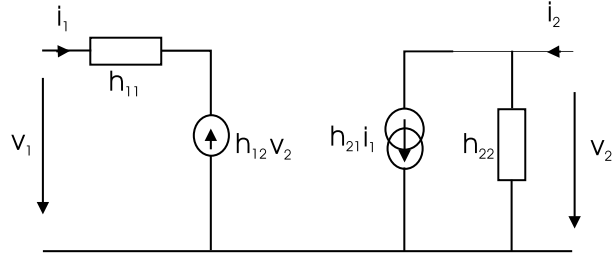


Figura 7.4: esquema de parâmetros híbridos equivalente.

7.5 Correspondências entre as representações

Considerando a forma matricial correspondente aos sistemas (7-2.1) e (7-3.1) respectivamente

$$\mathbf{v} = \mathbf{Z}\mathbf{i};$$

$$\mathbf{i} = \mathbf{Y}\mathbf{v},$$

podemos ver que $\mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{-1}$.

Para o caso dos parâmetros híbridos temos que, por exemplo, para h_{11} , fazendo $v_2 = 0$ em (7-2.1) obtemos

$$\begin{cases} v_1 = z_{11}i_1 + z_{12}i_2 \\ 0 = z_{21}i_1 + z_{22}i_2 \end{cases}, \quad (7-5.1)$$

e resolvendo em relação a i_2 obtemos

$$h_{11} = \frac{v_1}{i_1}|_{v_2=0} = z_{11} - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{22}}, \quad (7-5.2)$$

Deixamos como exercício o cálculo das outras relações entre os parâmetros híbridos em função das impedâncias e admitâncias.

7.6 Outras relações entrada-saída de quadripolos

De forma corrente definem-se outras relações úteis entre as grandezas de entrada e de saída de quadripolos. Estas são:

- a) a impedância de entrada z_e como sendo o rácio entre a tensão e a corrente à entrada do quadripolo

$$z_e = \frac{v_1}{i_1} \quad (7-6.1)$$

notando que neste caso a saída do quadripolo poderá estar em aberto ou fechada por uma impedância de carga z_L , distinguindo assim z_e de z_{11} .

- b) a impedância de saída z_s como sendo o rácio entre a tensão e a corrente à saída do quadripolo

$$z_s = \frac{v_2}{i_2} \quad (7-6.2)$$

notando que, normalmente, neste caso a saída do quadripolo estará em aberto e a entrada poderá ser atacada por um gerador de entrada tendo a respectiva impedância interna. Também aqui convém notar a diferença entre z_s e z_{22} .

- c) o ganho em tensão A_v como sendo o rácio entre a tensão à saída e a tensão à entrada do quadripolo

$$A_v = \frac{v_2}{v_1} \quad (7-6.3)$$

mais uma vez a saída poderá estar fechada, ou não, por uma carga z_L .

- d) o ganho em corrente A_i como sendo o rácio entre a corrente à saída e a corrente à entrada do quadripolo

$$A_i = \frac{i_2}{i_1} \quad (7-6.4)$$

neste caso a saída encontrar-se-à fechada por uma carga z_L , caso contrário a corrente no circuito de saída seria indenticamente nula. Podemos facilmente escrever que $A_i = -A_v z_L / z_L$.

- e) finalmente o ganho em potência A_p como sendo o produto do ganho em corrente pelo ganho em tensão, para um determinada carga,

$$A_p = A_v A_i. \quad (7-6.5)$$

7.7 Exemplos

Exemplo 1: consideremos o quadripolo da figura 7.5. Trata-se de um quadripolo em Π simétrico. Podemos escrever directamente

$$z_{11} = Z_1 // (Z_2 + Z_3) = \frac{Z_1(Z_2 + Z_3)}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \quad (7-7.1)$$

$$z_{12} = \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \quad (7-7.2)$$

$$z_{21} = \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3} = z_{12} \quad (7-7.3)$$

$$z_{22} = Z_3 // (Z_1 + Z_2) = \frac{Z_3(Z_1 + Z_2)}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \quad (7-7.4)$$

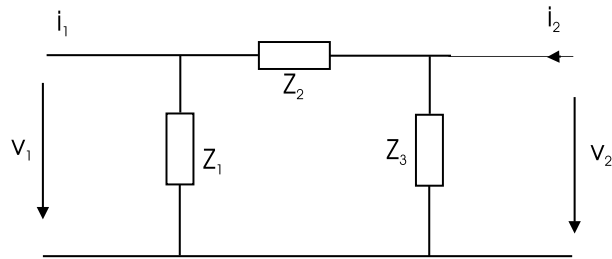


Figura 7.5: exemplo de cálculo.

No caso dos parâmetros admitância podemos escrever que

$$y_{11} = \frac{1}{Z_1 // Z_2} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2 Z_1} \quad (7-7.5)$$

$$y_{12} = y_{21} = -\frac{1}{Z_2} \quad (7-7.6)$$

$$y_{22} = \frac{1}{Z_2 // Z_3} = \frac{Z_2 + Z_3}{Z_3 Z_2} \quad (7-7.7)$$

Os parâmetros híbridos são neste caso

$$h_{11} = Z_1 // Z_2 \quad (7-7.8)$$

$$h_{12} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad (7-7.9)$$

$$h_{21} = -h_{12} \quad (7-7.10)$$

$$h_{22} = \frac{1}{Z_3 // (Z_1 + Z_2)} \quad (7-7.11)$$

Exemplo 2: considere o circuito da figura 7.6 e calcule:

a) Z_{11}

b) Z_{12}

a) temos então

$$Z_{11} = \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{i_2=0}$$

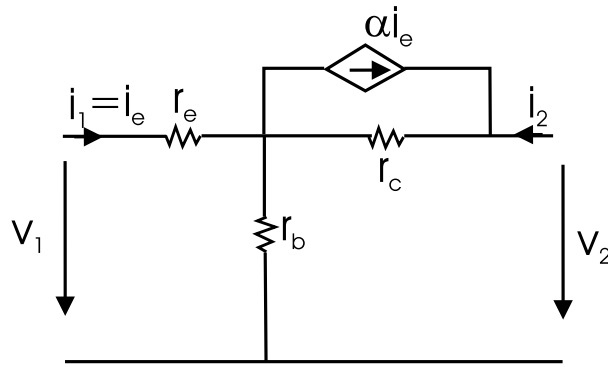


Figura 7.6: circuito equivalente do transistor em base comum.

quando $i_2 = 0$ o gerador de corrente controlado alimenta-se a ele próprio o que implica que a corrente de entrada i_1 é igual a $i_1 = i$ e por isso

$$v_1 = (r_e + r_b)i_1 \Rightarrow Z_{11} = r_e + r_b$$

b) e agora para Z_{12} ,

$$Z_{12} = \frac{v_1}{i_2} \Big|_{i_1=0}$$

neste caso, como $i_1 = 0$ temos que $i = i_2$ e que $v_1 = r_b i$ daí que

$$Z_{12} = \frac{v_1}{i_2} = r_b$$

Exemplo 3: considere o quadripolo Q da figura 7.7

- decomponha este quadripolo em dois quadripolos em paralelo
 - calcule a matriz admitância para cada um dos dois quadripolos de a)
 - deduza a matriz admitância do quadripolo Q
- a) o quadripolo proposto é equivalente ao da figura 7.8, no qual vemos claramente dois quadripolos Q_1 e Q_2 em paralelo.
- b) visto que os quadripolos estão em paralelo torna-se claramente vantajoso representá-los em função dos seus parâmetros admitância. Para Q_1 escrevemos

$$i'_1 = y'_{11}v'_1 + y'_{12}v'_2$$

$$i'_2 = y'_{21}v'_1 + y'_{22}v'_2,$$

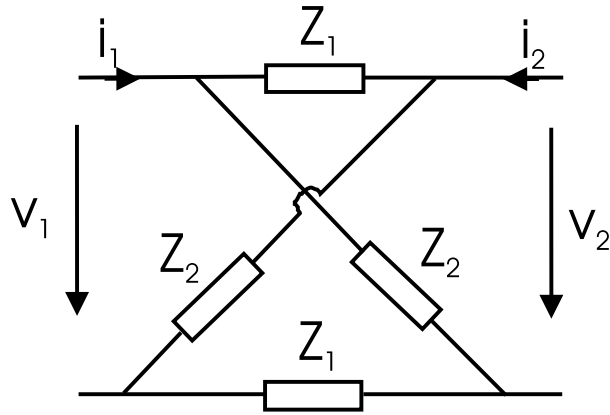


Figura 7.7: quadripolo cruzado.

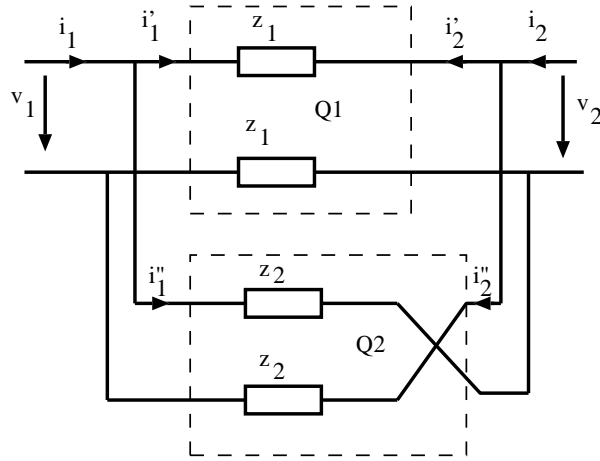


Figura 7.8: simplificação do circuito da figura 7.7.

e directamente $y'_{11} = 1/2Z_1$, $y'_{12} = -1/2Z_1$, $y'_{21} = -1/2Z_1$ e $y'_{22} = 1/2Z_1$.

Para Q_2

$$i''_1 = y''_{11}v''_1 + y''_{12}v''_2$$

$$i''_2 = y''_{21}v''_1 + y''_{22}v''_2,$$

e directamente $y''_{11} = 1/2Z_2$, $y''_{12} = y''_{21} = 1/2Z_2$ e $y''_{22} = 1/2Z_2$.

c) podemos agora escrever $v_1 = v'_1 = v''_1$ e $v_2 = v'_2 = v''_2$ assim como com a lei dos nós $i_1 = i'_1 + i''_1$ e $i_2 = i'_2 + i''_2$, de onde substituindo as correntes pelos seus valores a partir das equações admitância

$$i_1 = (y'_{11} + y''_{11})v_1 + (y'_{12} + y''_{12})v_2$$

$$i_2 = (y'_{21} + y''_{21})v_1 + (y'_{22} + y''_{22})v_2,$$

finalmente por identificação

$$y_{11} = 1/2Z_1 + 1/2Z_2 \quad y_{12} = y_{21} = -1/2Z_1 + 1/2Z_2$$

$$y_{22} = 1/2Z_1 + 1/2Z_2.$$

A Tabelas e relações particulares

A.1 Relações Trigonométricas Usuais

$$\begin{aligned}\sin^2 x + \cos^2 x &= 1 & \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2} & \sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} \\ \sin x &= \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} & \cos x &= \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} & \tan x &= \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{j(e^{jx} + e^{-jx})}\end{aligned}$$

Adição

$$\begin{aligned}\sin(a + b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a & \sin(a - b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a \\ \cos(a + b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b & \cos(a - b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \tan(a + b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} & \tan(a - b) &= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}\end{aligned}$$

Multiplicação: com $\tan a = t$

$$\begin{aligned}\sin(2a) &= 2 \sin a \cos a = \frac{2t}{1 + t^2} \\ \cos(2a) &= \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ \tan(2a) &= \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} = \frac{2t}{1 - t^2} \\ \cos a \cos b &= \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)] & \sin a \sin b &= \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)] \\ \sin a \cos b &= \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)] \\ \cos p + \cos q &= 2 \cos \frac{p + q}{2} \cos \frac{p - q}{2} & \cos p - \cos q &= -2 \sin \frac{p + q}{2} \sin \frac{p - q}{2} \\ \sin p + \sin q &= 2 \sin \frac{p + q}{2} \cos \frac{p - q}{2} & \sin p - \sin q &= 2 \sin \frac{p - q}{2} \cos \frac{p + q}{2} \\ \tan p + \tan q &= \frac{\sin(p + q)}{\cos p \cos q} & \tan p - \tan q &= \frac{\sin(p - q)}{\cos p \cos q}\end{aligned}$$

Trigonometria Hiperbólica

$$\begin{aligned}
 \cosh x + \sinh x &= \exp(x) & \cosh x - \sinh x &= \exp(-x) & \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 \\
 \sinh(a+b) &= \sinh a \cosh b + \sinh b \cosh a & \sinh(a-b) &= \sinh a \cosh b - \sinh b \cosh a \\
 \cosh(a+b) &= \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b & \cosh(a-b) &= \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \\
 \sinh 2a &= 2 \sinh a \cosh a & \cosh 2a &= \cosh^2 a + \sinh^2 a = 1 + 2 \sinh^2 a = 2 \cosh^2 a - 1 \\
 \cosh^2 a &= \frac{1 + \cosh 2a}{2} & \sinh^2 a &= \frac{\cosh 2a - 1}{2} & \tanh^2 a &= \frac{\cosh 2a - 1}{\cosh 2a + 1} \\
 \tanh 2a &= \frac{2 \tanh a}{1 + \tanh^2 a} \\
 \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} & \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} & \tanh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\
 \cosh jx &= \cos x & \sinh jx &= j \sin x & \tanh jx &= j \tan x
 \end{aligned}$$

A.2 Desenvolvimentos em série

$$\begin{aligned}
 \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1} \epsilon(x) \\
 \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n} \epsilon(x) \\
 \tan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - x^5 \epsilon(x) \\
 \sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n-1} \epsilon(x) \\
 \cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n} \epsilon(x) \\
 \tanh x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - x^5 \epsilon(x) \\
 \arcsin x &= x + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{1.3.5 \dots (2n+1)}{2.4.6 \dots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - x^{2n+1} \epsilon(x) \\
 \arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1} \epsilon(x) \\
 \sinh^{-1} x &= x - \frac{x^3}{6} + \dots + (-1)^n \frac{1.3.5 \dots (2n+1)}{2.4.6 \dots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1} \epsilon(x) \\
 \tanh^{-1} x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1} \epsilon(x) \\
 e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \epsilon(x)
 \end{aligned}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^n \epsilon(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1) \frac{x^2}{2} - \dots + \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1) \frac{x^n}{n} + x^n \epsilon(x)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + x^n \epsilon(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + x^n \epsilon(x)$$

A.3 Algumas relações úteis

A.3.1 Integrais

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_0^\infty x e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a}$$

$$\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^{3/2}}$$

$$\int_0^\infty x^3 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a^2}$$

$$\int_0^\infty x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{3}{8a^2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

A.3.2 Séries

Geométrica: $u_1 + qu_1 + q^2u_1 + \dots + q^{n-1}u_1 = u_1 \frac{1-q^n}{1-q}$

Aritmética: $u_1 + qu_1 + 2qu_1 + \dots + (n-1)qu_1 =$

A.3.3 Derivadas

$$[a^{f(x)}]' = \log a a^{f(x)} f'(x)$$

A.3.4 Trigonometria do círculo

| | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|----------|----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $\sin x$ | 0 | 1/2 | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | 1 |
| $\cos x$ | 1 | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | 1/2 | 0 |
| $\tan x$ | 0 | $\sqrt{3}/3$ | 1 | $\sqrt{3}$ | ∞ |
| $\cot x$ | ∞ | $\sqrt{3}$ | 1 | $\sqrt{3}/3$ | 0 |

B Folhas de Exercícios

B.1 Potência, corrente e tensão

Exercício 1:

Se a relação entrada-saída de um sistema for dada por

a) $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

b) $y(t) = x^2(t)$

determine se se tratam de sistemas lineares.

Exercício 2: Calcule a potência média dissipada numa resistência de $12\ \Omega$ por cada uma das correntes periódicas desenhadas na figura B.1.

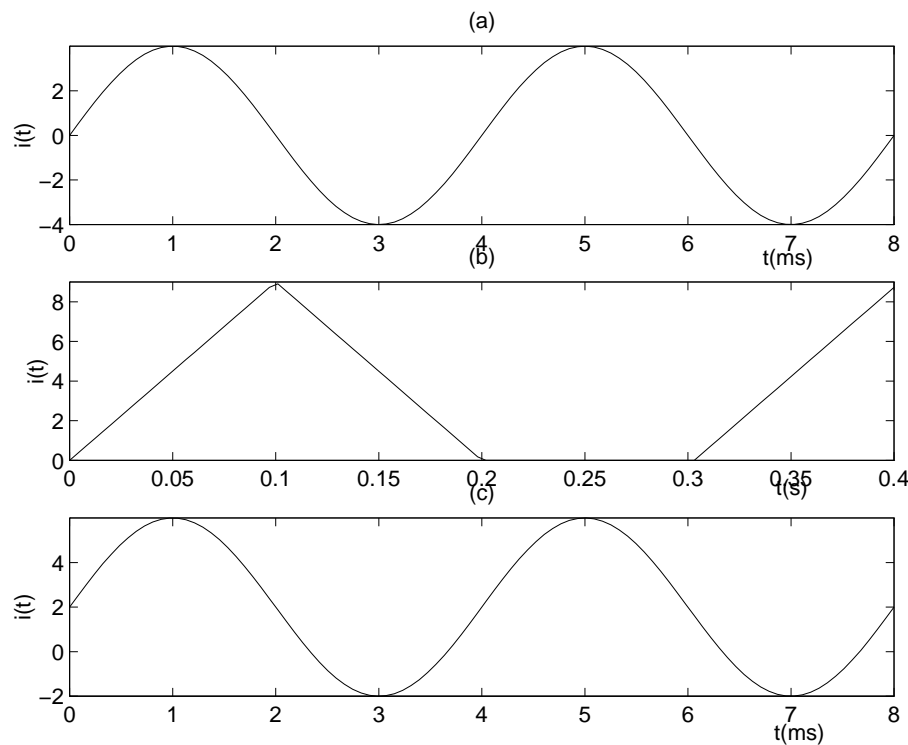


Figura B.1: os valores máximos nos gráficos (a), (b) e (c) são 4, 9 e 6 A, respectivamente.

Exercício 3: para cada uma das correntes do problema anterior calcule os seus valores eficazes.

B.2 Elementos de circuitos

Exercício 1:

Um condensador de capacidade 2F tem aos seus terminais uma tensão $v(t)$ como desenhada na figura B.2. Calcule:

- a corrente $i(t)$ que o atravessa,
- a sua potência $p(t)$ e
- a energia nele armazenada $w(t)$, supondo que o condensador se encontrava descarregado no instante inicial.

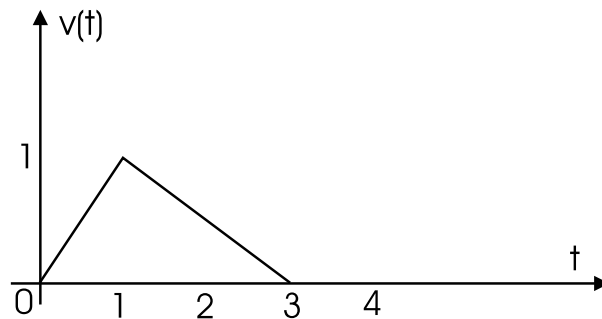


Figura B.2: tensão $v(t)$ aos terminais do condensador.

Exercício 2: Determine a resistência equivalente vista da fonte do circuito e a potência fornecida pela fonte da figura B.3.

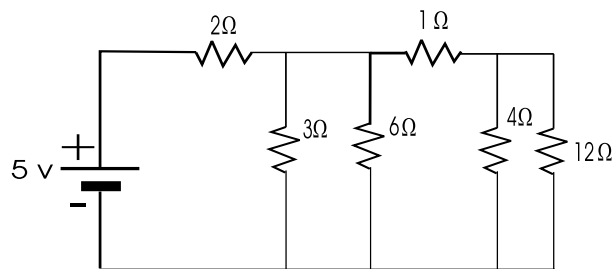


Figura B.3: exercício 2 - folha 2.

B.3 Leis e teoremas fundamentais I

Exercício 1: Considere o dipolo da figura B.4. Calcule $V_A - V_B$.

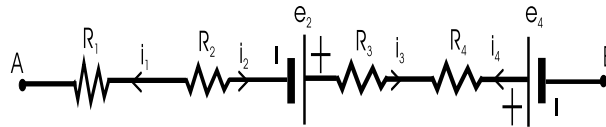


Figura B.4: dipolo AB.

Exercício 2: Considere o circuito da figura B.5.

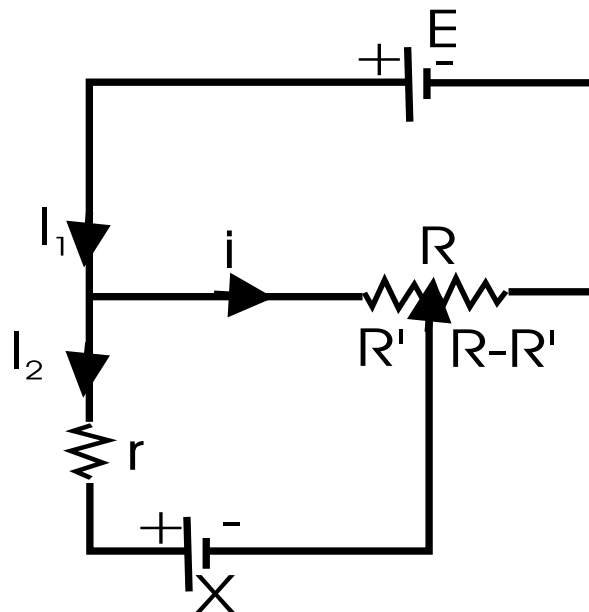


Figura B.5: potenciômetro.

- calcule o valor de x de modo a que $I_2 = 0$.
- determinar o valor de I_2 em função de E e x .
- determinar a sensibilidade dI_2/dR' para valores de I_2 próximos de 0.

Exercício 3: Calcular o valor da diferença de potencial $V_A - V_B$ no circuito da Figura B.6.

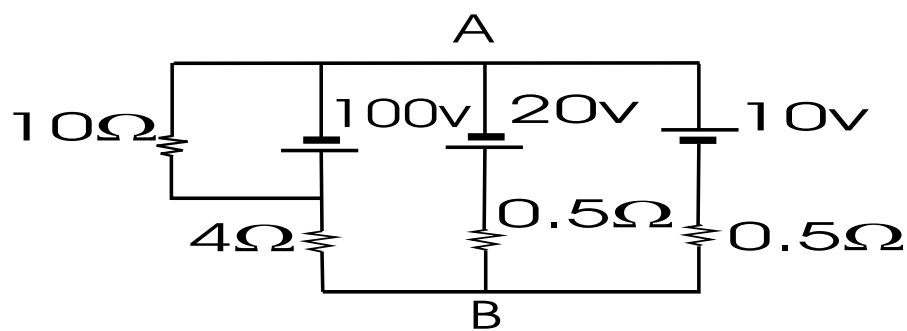
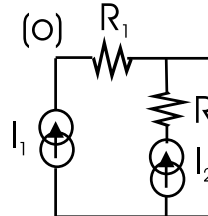
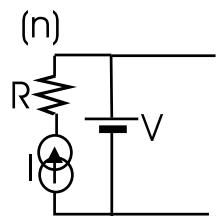
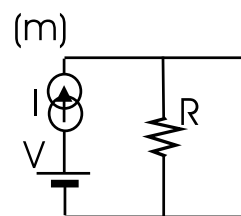
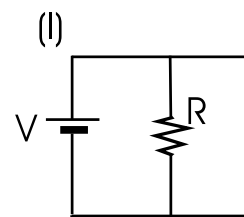
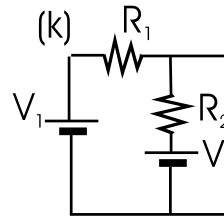
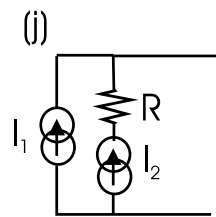
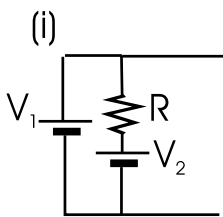
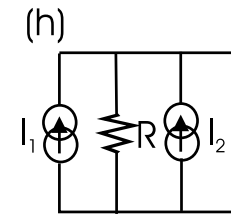
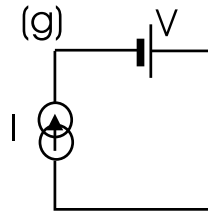
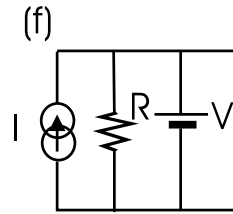
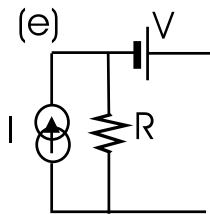
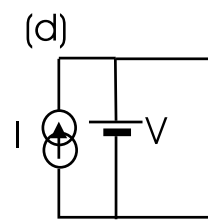
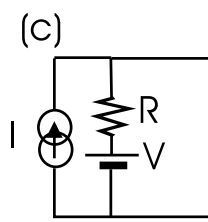
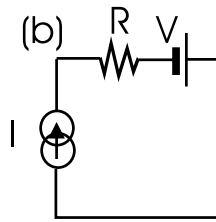
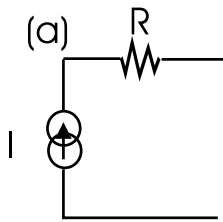


Figura B.6: circuito do exercício 3.

B.4 Leis e teoremas fundamentais II

Exercício: Determine quais os circuitos de Thevenin e/ou Norton equivalentes aos seguintes dipolos:



B.5 Leis e teoremas fundamentais III

Exercício 1: Calcular as correntes nas diferentes porções do circuito da figura B.7.

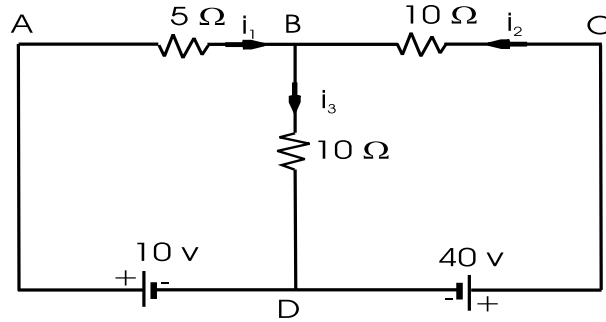
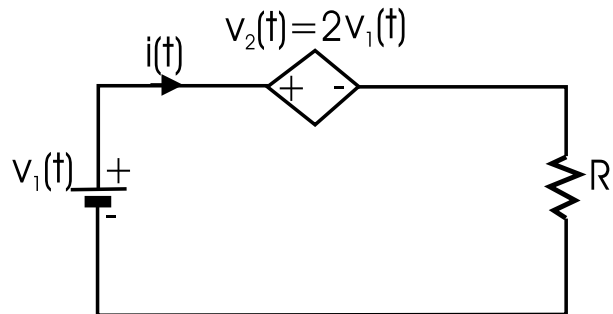
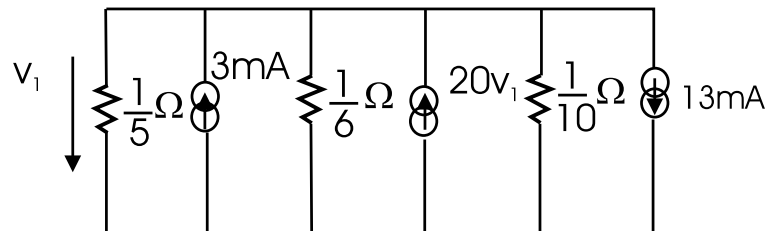


Figura B.7:

Exercício 2: dado o circuito da figura com uma fonte controlada $v_2(t)$, determine a relação $v_1(t)/i(t)$



Exercício 3: calcule a potência fornecida por cada uma das fontes da figura.



B.6 Transformada de Laplace I

Exercício 1: para as seguintes funções

$$g(t) = tu(t) + 2u(t) + 2\delta(t)$$

$$v(t) = 10e^{-5t}\delta(t - 0.1)$$

$$w(t) = \cos(5t)u(t)$$

$$x(t) = \sin(2t)u(t)$$

$$y(t) = [\cos(4t) - \sin(4t)]u(t)$$

$$z(t) = \sqrt{2}\cos(t - \pi/4)u(t)$$

$$i(t) = e^{-2t}\cos(3t)u(t)$$

$$e(t) = [4e^{-t} - e^{-4t} - 3\cos(2t)]u(t)$$

$$p(t) = [2e^{-2t}\cos(t) - e^{-2t}]u(t)$$

a) calcule as suas transformadas de Laplace, exprimindo o resultado sobre forma de fracção racional.

b) represente os seus pólos e zeros no plano s .

Exercício 2: para as três funções $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$ abaixo calcule as suas TL e em seguida a partir do resultado determine os valores iniciais e finais de $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$. Finalmente calcule a área sob cada uma das funções temporais.

$$f(t) = Ae^{-\alpha t}u(t)$$

$$g(t) = B(1 - e^{-\alpha t})u(t)$$

$$h(t) = Cte^{-\alpha t}u(t)$$

B.7 Transformada de Laplace II

Exercício 1: calcule as TLI das seguintes funções

$$W(s) = \frac{10s}{s^2+25}$$

$$X(s) = \frac{2s-10}{s^2+25}$$

$$Y(s) = \frac{s^2+2s+2+6s^{-1}}{s^2}$$

$$Z(s) = \frac{s^2+4s+4}{s^2+2s+2}$$

$$E(s) = \frac{s^3+3s^2+5s+6}{s^2+5s+6}$$

$$F(s) = \frac{(25s^2+10s+2)e^{-5s}}{s^3}$$

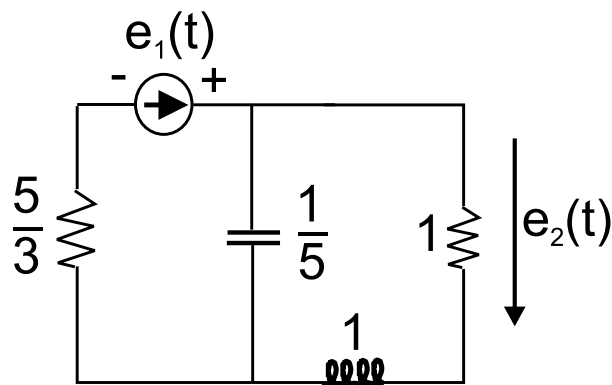
$$G(s) = \frac{[T(s+\alpha)+1]e^{-T(s+\alpha)}}{s^2+2\alpha s+\alpha^2}$$

$$H(s) = 20(s+\alpha)^{-3}$$

$$I(s) = \frac{2s^2+5s+9}{(s+1)^2(s+7)}$$

$$M(s) = \frac{s-1+e^{-s}}{s^2(1-e^{-s})} \text{ (faça um esboço de } m(t)\text{)}$$

Exercício 2: considere o circuito inerte da figura



- calcule $H(s) = E_2(s)/E_1(s)$
- determine $H(0)$ e $H(\infty)$. Verifique o seu resultado com o circuito.
- determine a equação diferencial que liga $e_2(t)$ a $e_1(t)$

B.8 Regime transitório

Exercício 1: considere o circuito inerte da figura B.8 em regime transitório.

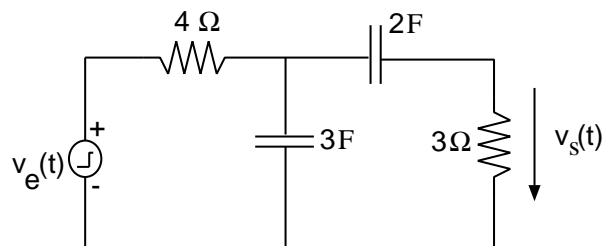


Figura B.8: malha em regime transitório

- utilizando o cálculo simbólico calcule o ganho em tensão $A(s) = V_s(s)/V_e(s)$, onde $V_e(s)$ e $V_s(s)$ são as Transformadas de Laplace de $v_e(t)$ e $v_s(t)$, respectivamente.
- determine e represente no plano complexo os pólos e zeros de $A(s)$.
- determine a resposta $v_s(t)$ ao um degrau de amplitude 3 V, $v_e(t) = 3u(t)$.

Exercício 2: considere o circuito RL paralelo da figura B.9. Quando o interruptor se fecha, e sabendo que as condições iniciais são nulas,

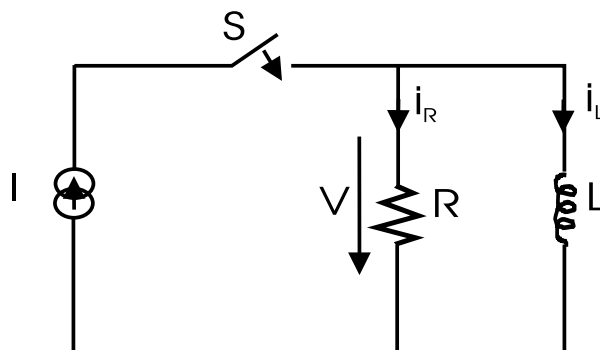


Figura B.9: circuito RL paralelo

- calcule a tensão $v(t)$
- calcule as correntes $i_R(t)$ e $i_L(t)$
- represente estas três grandezas no mesmo gráfico

Exercício 3: considere o circuito RLC paralelo da figura B.10. Segundo os valores relativos de R , L e C calcule e represente a partir do momento em que o interruptor se fecha sabendo que as condições iniciais são nulas:

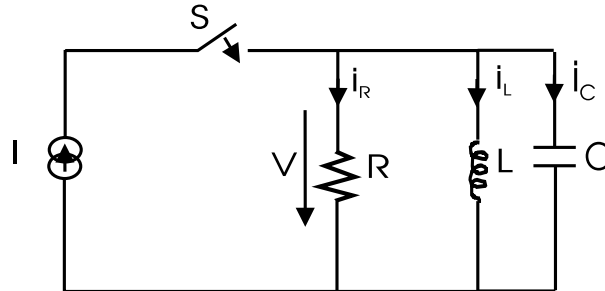
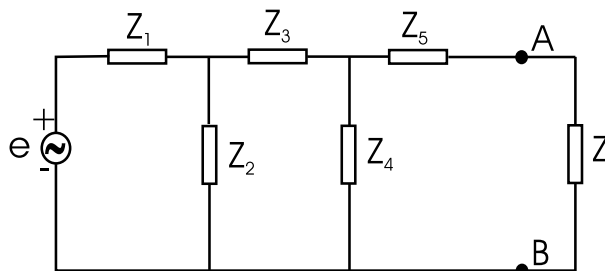


Figura B.10: circuito RLC paralelo

- calcule e represente a tensão $v(t)$
- calcule e represente as correntes $i_R(t)$, $i_C(t)$ e $i_L(t)$

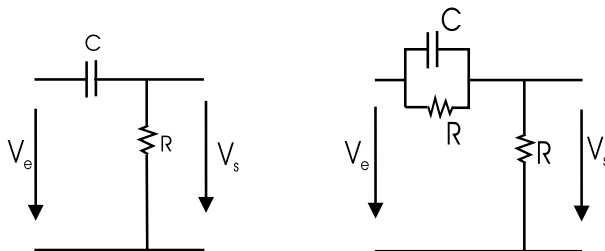
B.9 Regime permanente sinusoidal

Exercício 1: considere a rede da figura abaixo onde e é um gerador de tensão sinusoidal ideal.



- calcule o circuito equivalente de Thevenin visto entre os pontos A e B
- com $Z_1 = Z_4 = Z_5 = R$, $Z_2 = 1/j\omega C$, $Z_3 = 1/j\omega 5C$ e $e(t) = E \sin(\omega t + 0.3)$, calcule numericamente $v_{th}(t)$ e z_{th} sabendo que $R = 1\Omega$ e $C = (\omega\sqrt{5})^{-1}$.
- determine a relação existente entre as impedâncias para que a corrente em Z seja independente de Z .
- determine a relação existente entre os Z_j para que a tensão aos bornos de Z seja independente de Z .

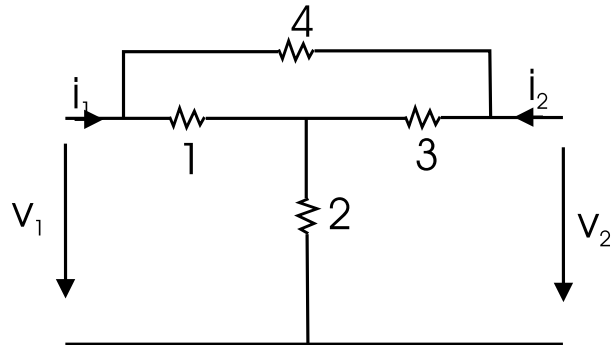
Exercício 2: considere os dois circuitos representados abaixo em regime permanente sinusoidal.



- trace para cada circuito a curva de resposta em frequência V_s/V_e (amplitude e fase)
- a que tipo de filtro pertencem estes circuitos ?
- qual o atraso de fase introduzido por estes circuitos ?
- que utilização particular se poderá fazer do primeiro circuito quando $RC\omega \ll 1$?

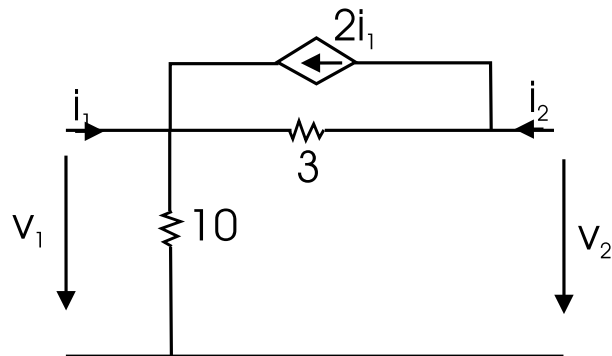
B.10 Quadripolos I

Exercício 1: Considere o circuito da figura abaixo e calcule:



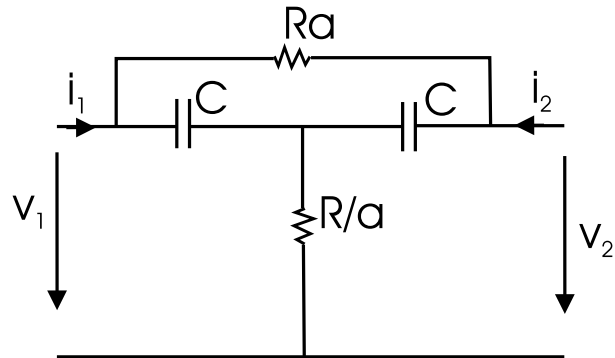
- a) o quadripolo de impedâncias correspondente
- b) o quadripolo de admitâncias correspondente
- c) o quadripolo de parâmetros híbridos correspondente

Exercício 2: Para o circuito da figura determine y_{12} .



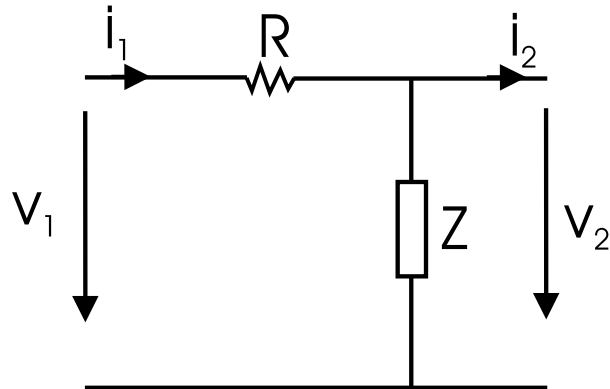
B.11 Quadripolos II

Exercício 1: Considere o quadripolo da figura abaixo



- a) determine a matriz admitância correspondente
- b) deduzir a expressão do quociente V_2/V_1 quando $I_2 = 0$
- c) calcular o módulo de V_2/V_1 e mostrar que este passa por um valor mínimo para um valor ω_0 da pulsação. Determinar ω_0 e $|V_2/V_1|_{\min}$.
- d) qual é a diferença de fase para $\omega = \omega_0$?
- e) estudar a variação de $|V_2/V_1|$ em função de a .
- f) quais os limites de $|V_2/V_1|$ quando $\omega \rightarrow 0$ e $\omega \rightarrow \infty$?
- g) qual a utilidade deste circuito ?
- h) aplicação numérica: $R=5750\Omega$, $C=9400 \text{ pF}$, $a=2.6$ e $a=10$.

Exercício 2: considere o quadripolo da figura abaixo



a) demonstramos que

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R+Z}{Z} & R \\ \frac{1}{Z} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

determinar o quociente $|v_1/i_1|$ para $i_2 = 0$. Aplicação no caso em que $Z = 1/jC\omega$.

b) determine a relação v_s/v_e para dois quadripolos idênticos ao da figura acima em cascata sempre com a corrente de saída nula. Aplicação ao caso $Z = 1/jC\omega$.

C Soluções das Folhas de Exercícios

C.1 Potência, corrente e tensão

Ex.1: demonstração

- a) linear
- b) não linear

Ex.2:

- a) 96 W
- b) 216 W
- c) 144 W

Ex.3:

- a) 2.82 A
- b) $\sqrt{18}$
- c) $\sqrt{12}$

C.2 Elementos de circuitos

Ex.1:

- a) $i(t) = \begin{cases} C & 0 \leq t \leq 1 \\ -C/2 & 1 \leq t \leq 3 \end{cases}$
- b) $p(t) = v(t)i(t) = \begin{cases} 2t & 0 \leq t \leq 1 \\ t/2 - 3/2 & 1 \leq t \leq 3 \end{cases}$
- c) $w(t) = \begin{cases} t^2 & 0 \leq t \leq 1 \\ 1/4(t^2 - 6t + 9) & 1 \leq t \leq 3 \end{cases}$

Ex.2: $R_{eq} = 10/3\Omega$, $P=7.5$ W.

C.3 Leis e teoremas fundamentais I

Ex.1: $V_A - V_B = -R_1 i_1 + R_2 i_2 - e_2 + R_3 i_3 - R_4 i_4 + e_4$

Ex.2:

a) $X = (R'/R)E$

b) $I_2 = \frac{XR - R'E}{-rR - R'(R - R')}$

c) $\frac{dI_2}{dR'} \Big|_{I_2=0} = \frac{-E}{R'^2 - R'R - rR}$

Ex.3: $V_A - V_B = -10.6 \text{ V}$

C.4 Leis e teoremas fundamentais II

| | $\mathbf{V_{th}}$ | $\mathbf{I_N}$ | $\mathbf{R_{th}}$ |
|----|-----------------------------------|---------------------|-------------------|
| a) | ? | I | ∞ |
| b) | ? | I | ∞ |
| c) | $V + RI$ | $I + V/R$ | R |
| d) | V | ∞ | 0 |
| e) | $V + RI$ | $I + V/R$ | R |
| f) | V | ∞ | 0 |
| g) | ? | I | ∞ |
| h) | $R(I_1 + I_2)$ | $I_1 + I_2$ | R |
| i) | V_1 | ∞ | 0 |
| j) | ? | $I_1 + I_2$ | ∞ |
| k) | $(V_2 R_1 + R_2 V_1)/(R_1 + R_2)$ | $V_1/R_1 + V_2/R_2$ | $R_1 // R_2$ |
| l) | V | ∞ | 0 |
| m) | RI | I | R |
| n) | V | I | 0 |
| o) | ? | $I_1 + I_2$ | ∞ |

C.5 Leis e teoremas fundamentais III

Ex.1: $i_1 = -1 \text{ A}; i_2 = 2.5 \text{ A}; i_3 = 1.5 \text{ A}.$

Ex.2: $v_1/i = -R.$

Ex.3: $P_{3mA} = 30\mu\text{W}$; $P_{13mA} = -130\mu\text{W}$; $P_{20v_1} = -2\text{mW}$.

C.6 Transformada de Laplace I

Ex.1: a)

g) $G(s) = (2s^2 + 2s + 1)/s^2$

v) $V(s) = (10/\sqrt{e})e^{-0.1s}$

w) $W(s) = s/(s^2 + 25)$

x) $X(s) = 2/(s^2 + 4)$

y) $Y(s) = (s - 4)/(s^2 + 16)$

z) $Z(s) = (s + 1)/(s^2 + 1)$

i) $I(s) = (s + 2)/(s^2 + 4s + 13)$

e) $E(s) = 60/[(s + 1)(s + 4)(s^2 + 4)]$

p) $P(s) = (s^2 + 42s + 3)/[(s^2 + 4s + 5)(s + 2)]$

b) representação gráfica.

Ex.2:

f) $F(s) = A/(s + \alpha)$; $f(0) = A$; $f(\infty) = 0$; $\text{Sup} = A/\alpha$;

g) $G(s) = B\alpha/[s(s + \alpha)]$; $g(0) = 0$; $g(\infty) = B$; $\text{Sup} = \infty$;

h) $H(s) = C/(s + \alpha)^2$; $h(0) = 0$; $h(\infty) = 0$; $\text{Sup} = C/\alpha^2$;

C.7 Transformada de Laplace II

Ex.1:

W) $w(t) = 10 \cos(5t)u(t)$

X) $x(t) = 2\sqrt{2} \cos(5t + \pi/4)u(t)$

Y) $y(t) = \delta(t) + 2u(t) + 2tu(t) + 3t^2u(t)$

Z) $z(t) = \delta(t) + 2 \exp(-t) \cos(t)u(t)$

E) $e(t) = \delta'(t) - 2\delta(t) + 9 \exp(-3jt)u(t)$

F) $f(t) = [25 + 10(t - 5) + (t - 5)^2]u(t - 5)$

G) $g(t) = [T \exp[-\alpha(t + T) + (t - T) \exp(-\alpha t)]u(t - T)$

H) $h(t) = 10t^2 \exp(-\alpha t)u(t)$

I) $i(t) = [t \exp(-t) + 2 \exp(-7t)]u(t)$

M) $m(t) = (1 - t)u(t) + (t - 1)u(t - 1)$

Ex.2:

a) $H(s) = 3/(s^2 + 4s + 8)$

b) $H(0) = 3/8; H(\infty) = 0;$

c) $\frac{d^2 e_2}{dt^2} + \frac{de_2}{dt} - 12.5e_2 = -3/2 \frac{de_1}{dt}$

C.8 Regime transitório

Ex.1:

a) $A(s) = \frac{6s}{72s^2 + 26s + 1}$

b) gráfico; um zero em $s_0 = 0$ e dois pólos reais em $s_1 \approx 0.0437$ e $s_2 \approx 0.317$

c) $v_s(t) = 65.8(e^{-0.0437t} - e^{-0.317t})$

Ex.2:

a) $v(t) = RI \exp(-t/\tau)$ com $\tau = L/R;$

b) $i_R(t) = I \exp(-t/\tau); i_L(t) = -I(\exp(-t/\tau) - 1);$

c) gráfico;

Ex.3: $\alpha = 1/(2RC) = 0$

a) $v(t) = \frac{I}{C\omega_0} \sin(\omega_0 t)$ com $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$;

b) $i_R(t) = 0$; $i_C(t) = I \cos(\omega_0 t)$; $i_L(t) = I[1 - \cos(\omega_0 t)]$; gráfico.

$\alpha = 1/(2RC) > \omega_0$

a) $v(t) = \frac{I}{C(r_1 - r_2)}(e^{r_1 t} - e^{r_2 t})$;

b) $i_R(t) = \frac{I}{RC(r_1 - r_2)}(e^{r_1 t} - e^{r_2 t})$; $i_C(t) = \frac{I}{r_1 - r_2}(r_1 e^{r_1 t} - r_2 e^{r_2 t})$; $i_L(t) = \frac{I}{LC(r_1 - r_2)}(r_1^{-1} e^{r_1 t} - r_2^{-1} e^{r_2 t})$;

$\alpha = 1/(2RC) = \omega_0$

a) $v(t) = I/Ct \exp(-\alpha t)$;

b) $i_R(t) = (I/RC)t \exp(-\alpha t)$;

$i_C(t) = I \exp(-\alpha t)(1 - \alpha t)$;

$i_L(t) = I[1 - \exp(-\alpha t)(1 - \alpha t/2)]$; gráfico.

$\alpha = 1/(2RC) < \omega_0$

a) $v(t) = I/(C\omega_d) \exp(-\alpha t) \sin(\omega_d t)$ com $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$;

b) $i_R(t) = (I/RC\omega_d) \exp(-\alpha t) \sin(\omega_d t)$;

$i_C(t) = -I/\sin(\phi) \exp(-\alpha t) \sin(\omega_d t - \phi)$ com

$\phi = \arctan(\omega_d/\alpha)$;

$i_L(t) = I\{1 - [\exp(-\alpha t)/\sin(\phi)] \sin(\omega_d t - \phi)\}$; gráfico.

C.9 Regime permanente sinusoidal

Ex.1:

a) $V_{th} = (z_4 z_2 e)/[(z_4 + z_3)(z_1 + z_2) + z_1 z_2]$; $z_{th} = z_5 + z_4/(z_3 + z_1/z_2)$;

b) $v_{th}(t) = 5/\pi \cos(\omega t + 0.3 - \pi/2)$ e $z_{th} = (17 - j\sqrt{5})/11$.

c) $z_{th} \gg Z \Rightarrow z_5 \gg Z$;

d) para $v = v_{th} \Rightarrow z_{th} \ll Z \Rightarrow z_5 \rightarrow 0$ e $z_4/(z_3 + z_1/z_2) \ll Z$;

Ex.2:

- a) $T_1(j\omega) = jRC\omega/(1 + jRC\omega)$; $T_2(j\omega) = (1 + jRC\omega)/(2 + jRC\omega)$; gráficos;
- b) T_1 passa-alto; T_2 "amplifica alto";
- c) no máximo $\pi/2$;
- d) a saída é proporcional à derivada da entrada;

C.10 Quadripolos I**Ex.1:**

- a) $z_{11} = 23/8$, $z_{12} = z_{21} = 19/8$, $z_{22} = 31/8$;
- b) $y_{11} = 31/44$, $y_{12} = y_{21} = -19/44$, $y_{22} = 23/44$;
- c) $h_{11} = 44/31$, $h_{12} = 19/31$, $h_{21} = -19/31$, $h_{22} = 8/31$;

Ex.2: $y_{12} = -1/9$.**C.11 Quadripolos II****Ex.1:**

a)

$$y_{11} = \frac{jaRC\omega(a + jRC\omega) + a + 2jRC\omega}{aR(a + 2jRC\omega)}$$

$$y_{12} = [1 - 1/a^2 - (1/jC\omega + R/a)(y_{22} - 1/aR)]/(R/a);$$

$$Y_{21} = -y_{12}; y_{22} = y_{11}$$

b) $v_2/v_1|_{i_2=0} = -y_{21}/y_{22}$

c)

$$\left|\frac{v_2}{v_1}\right|^2 = \frac{a^2[1 - (\omega/\omega_0)^2]^2 + 4(\omega/\omega_0)^2}{a^2[1 - (\omega/\omega_0)^2]^2 + (a^2 + 2)^2(\omega/\omega_0)^2}$$

$$\omega_0 = 1/RC, |v_2/v_1|_{\min} = 2/(2 + a^2);$$

- d) $\phi(\omega_0) = 0$;
- e) $a \rightarrow 0, |v_2/v_1| \rightarrow 1$; $a \rightarrow \infty, |v_2/v_1| \rightarrow 0$.
- f) $\omega \rightarrow 0, |v_2/v_1| \rightarrow 1$; $\omega \rightarrow \infty, |v_2/v_1| \rightarrow 1$.
- g) circuito corta banda.
- h) (algum candidato?)

Ex.2:

- a) $v_1/i_1 = R + Z$;
- b) $v_s/v_e = (R^2 + 2ZR + Z^2 + Z^2R^2)/(R + 2Z)$;

D Temas de avaliação em anos anteriores

D.1 Exame, Época normal de 2002

Faro, 21 de Junho de 2002

Engenharia de Sistemas e Computação
Engenharia Física Tecnológica

Exame de Análise de Circuitos

Consulta: nenhum documento autorizado.

Duração: 2 horas e 30 minutos

Problema 1: considere o circuito **inerte** da figura D.1 em regime transitório.

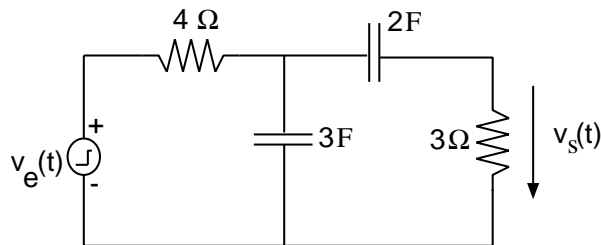


Figura D.1: malha em regime transitório

- utilizando o cálculo simbólico calcule o ganho em tensão $A(s) = V_s(s)/V_e(s)$, onde $V_e(s)$ e $V_s(s)$ são as Transformadas de Laplace de $v_e(t)$ e $v_s(t)$, respectivamente.
- determine e represente no plano complexo os pólos e zeros de $A(s)$.
- determine a resposta $v_s(t)$ ao um degrau de amplitude 3 V, $v_e(t) = 3u(t)$.

Problema 2: considere a figura D.2.

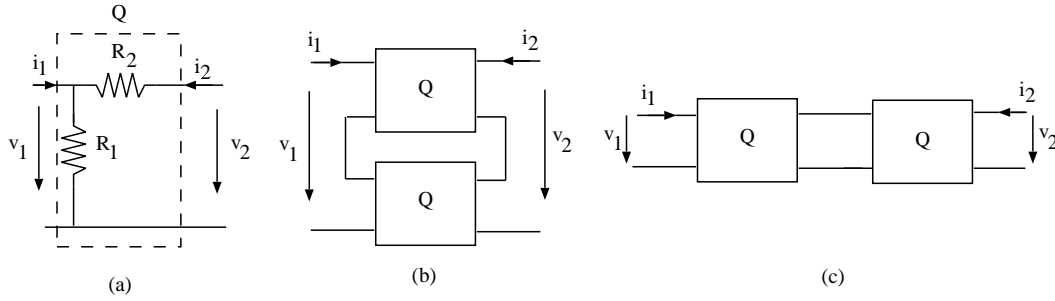


Figura D.2: quadripolo (a), quadripolos em série (b) e quadripolos em cascata (c).

- calcule a matriz impedância Z do quadripolo da figura D.2(a).
- colocando dois quadripolos idênticos ao da figura D.2(a) conforme representado na figura D.2(b) (série), determine a matriz Z_2 do novo quadripolo assim formado.
- deduza da alínea anterior a expressão da matriz impedância Z_N de N quadripolos idênticos montados de forma semelhante ao da figura D.2(b).
- coloque agora dois quadripolos iguais ao da figura D.2(a), conforme indicado na figura D.2(c) (cascata). Calcule a nova matriz impedância do quadripolo assim formado.
- poderá, como fez em c), determinar a matriz impedância equivalente a N quadripolos idênticos a Z em cascata ? Explique porquê.

D.2 Exame, Época de Recurso 2002

Faro, 8 de Julho de 2002

Engenharia de Sistemas e Computação Engenharia Física Tecnológica

Exame de Análise de Circuitos

Consulta: nenhum documento autorizado.

Duração: 2 horas e 30 minutos

Calculadora: não autorizada.

Problema 1: considere o circuito da figura D.3 em regime permanente sinusoidal com $v_e(t) = 2 \cos(\omega t + \pi/4)$

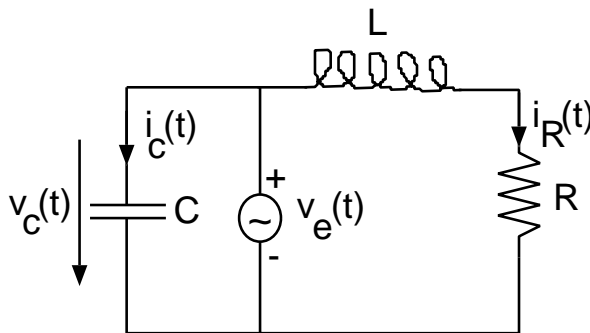


Figura D.3: malha em regime permanente sinusoidal.

- determine a tensão $v_C(t)$ aos terminais do condensador C .
- calcule a corrente $i_C(t)$ no condensador C .
- com $f = \pi/50$, $C = 5$ mF, $R = 1$ k Ω e $L = 0.1$ H, faça um esboço de $i_C(t)$ e de $v_C(t)$ no mesmo gráfico. Qual a diferença de fase entre $i_C(t)$ e $v_C(t)$?
- calcule os valores literais de I_0 e ϕ_0 da corrente $i_R(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi_0)$ na resistência R .

Problema 2: considere a figura D.4.

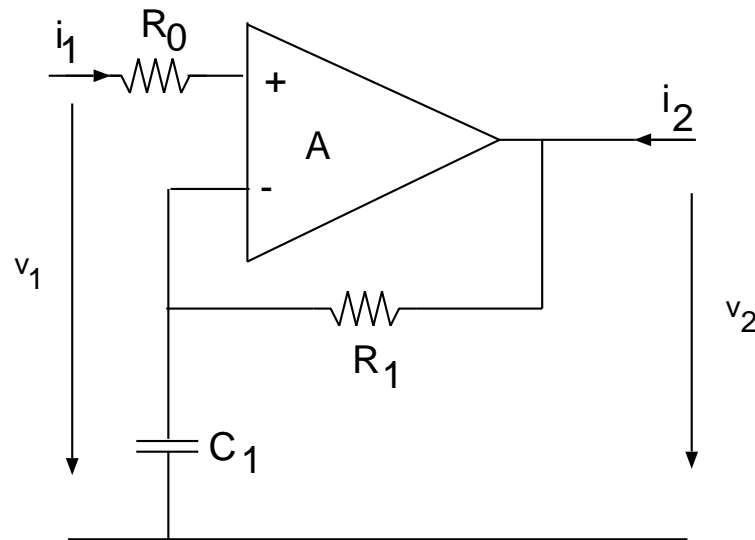


Figura D.4: montagem com amp-op.

- considerando o amp-op ideal, calcule o ganho em tensão em regime permanente sinusoidal $A(j\omega) = V_2(j\omega)/V_1(j\omega)$ na montagem da figura D.4.
- calcule o módulo e a fase de $A(j\omega)$.
- trace o gráfico de Bode assintótico do módulo e da fase de $A(j\omega)$ fazendo ressaltar a frequência de corte e a inclinação das assíntotas.
- a partir do gráfico assintótico da alínea c) desenhe o gráfico real aproximado.

NOTA: $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2 \approx 0.707$.

D.3 Mini-teste de avaliação contínua, Março de 2003

Engenharia de Sistemas e Computação Engenharia Física

Mini-Teste de Análise de Circuitos

Data: 26 de Março de 2003
Consulta: nenhum documento autorizado.
Calculadora: não autorizada
Duração: 45 minutos

Exercício 1: considere o circuito da figura D.5.

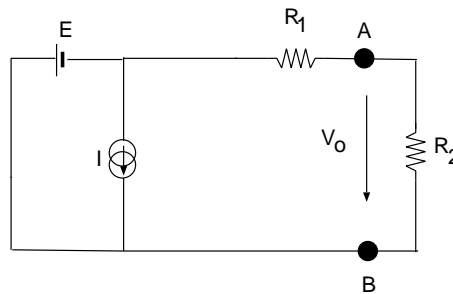


Figura D.5:

Calcule a tensão V_0

- a) utilizando as leis das malhas e dos nós
- b) utilizando o princípio de sobreposição
- c) aplicação numérica: $E = 5 \text{ V}$, $I = 1 \text{ A}$, $R_1 = 100\Omega$, $R_2 = 200\Omega$.

Exercício 2: considere o circuito da figura D.6 com $C = 2 \text{ F}$ e $I = 2 \text{ A}$.

- a) escreva a equação que permite calcular a tensão $v(t)$ aos terminais do condensador C .

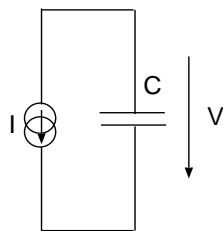


Figura D.6:

- b) calcule $v(t)$ sabendo que o condensador C se encontra carregado a uma tensão $v(0) = 5$ V no momento inicial $t = 0$.
- c) represente a tensão $v(t)$ calculada em b), para $t \in [0, 10]$ segundos.

D.4 Mini-teste de avaliação contínua, Abril de 2003

Engenharia de Sistemas e Computação Engenharia Física

Mini-Teste de Análise de Circuitos

Data: 29 de Abril de 2003
Consulta: nenhum documento autorizado.
Calculadora: não autorizada
Duração: 45 minutos

Exercício : considere o circuito da figura D.7(a) com condições iniciais nulas.

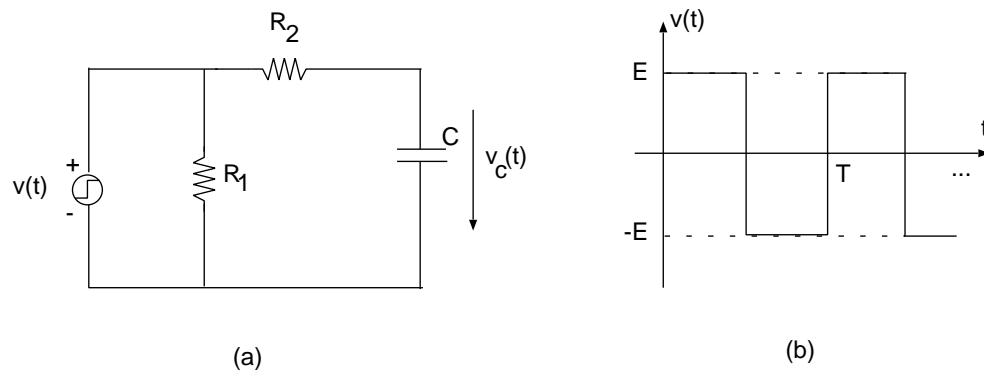


Figura D.7: (a) $E=10$ V, $R_1 = 5$ k Ω , $R_2 = 10$ k Ω , $C=100$ nF e em (b) $T=2$ ms.

- escreva a equação diferencial que permite calcular a tensão $v_C(t)$ em função de $v(t)$.
- resolvendo a equação da alínea a) calcule $v_C(t)$ no intervalo $0 \leq t \leq T/2$ com o sinal $v(t)$ dado na figura D.7(b). Qual a constante de tempo do circuito ?
- calcule agora $v_C(t)$ no intervalo $T/2 \leq t \leq T$. Qual o valor da tensão aos terminais do condensador quando $t = 1$ ms ? E ao fim de 2 ms ?
- desenhe $v_C(t)$ para $0 \leq t \leq T$.

NOTA: utilize as seguintes aproximações: $1 - e^{-1} = 0.63$; $e^{-1} = 0.23$.

D.5 Exame, Época normal de 2003

Faro, 4 de Julho de 2003

Engenharia de Sistemas e Computação

Engenharia Física

Exame de Análise de Circuitos (Época Normal)

Consulta: nenhum documento autorizado.

Duração: 2 horas e 30 minutos

Problema 1: considere o circuito da figura D.8 em regime transitório.

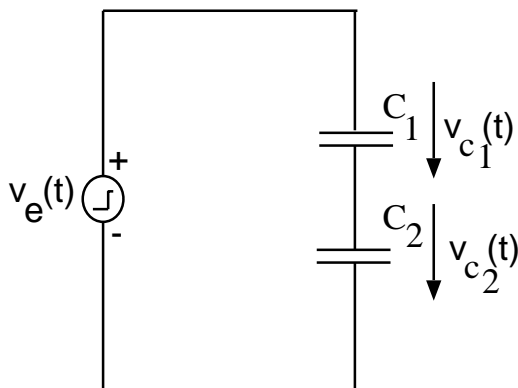


Figura D.8: malha em regime transitório

- a) utilizando a equação das malhas na figura D.8, demonstre que os dois condensadores C_1 e C_2 colocados em série são equivalentes a um único condensador de valor

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

- b) escreva a equação diferencial que permite determinar a tensão $v_{C1}(t)$ aos terminais do condensador C_1 em função do sinal de entrada $v_e(t)$.
- c) resolva a equação determinada em b).

- d) determine a forma de $v_{C1}(t)$ considerando que no instante $t = 0$ o condensador C_2 se encontra descarregado, o condensador C_1 se encontra carregado a uma tensão $v_{C1}(0) = 3 \text{ V}$ e o sinal de entrada $v_e(t)$ é um degrau de amplitude 3 volts, i.e., $v_e(t) = 3u(t)$ [$u(t)$ é o degrau unidade].
- e) desenhe $v_e(t)$, $v_{C1}(t)$ e $v_{C2}(t)$ para $-2 \leq t \leq 2$ segundos e com $C_1 = C_2$.

Problema 2: considere os circuitos da figura D.9 em regime permanente sinusoidal.

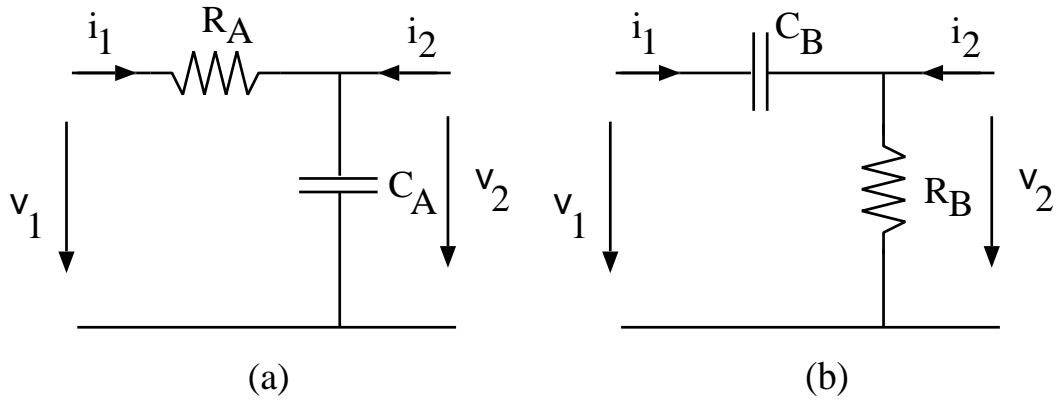


Figura D.9: quadripolo RC (a), quadripolos CR (b).

- a) calcule a impedância de entrada em aberto $Z_{eo} = v_1/i_1$, a impedância de saída $Z_s = v_2/i_2$ e o ganho em tensão em aberto $A_{voRC} = v_2/v_1$ do quadripolo RC da figura D.9(a).
- b) represente os diagramas cartesianos de $Z_{eo}(\omega)$ e de $Z_s(\omega)$
- c) calcule as mesmas quantidades que em a) para o quadripolo CR da figura D.9(b).
- d) considere agora que os quadripolos da figura D.9 se encontram fechados numa impedância de carga de valor Z_L . Calcular os novos valores da impedância de entrada Z_{eL} e do ganho em tensão A_{vL} em carga.
- e) supondo que os dois quadripolos, RC e CR, são colocados em cascata (nessa ordem), sob que condição poderíamos ter o ganho em tensão total A_v dado por $A_v = A_{voRC} A_{voCR}$.
- f) no caso da alínea e) com a saída do quadripolo CR em aberto ($Z_L \rightarrow \infty$), demonstre que para que $A_v = A_{voRC} A_{voCR}$ basta que $R_B \gg R_A$.

D.6 Exame, Época de Recurso de 2003

Faro, 17 de Julho de 2003

Engenharia de Sistemas e Computação

Engenharia Física

Exame de Análise de Circuitos (Época de recurso)

Consulta: nenhum documento autorizado.

Duração: 2 horas e 30 minutos

Problema 1: considere o circuito da figura D.10 em regime permanente sinusoidal.

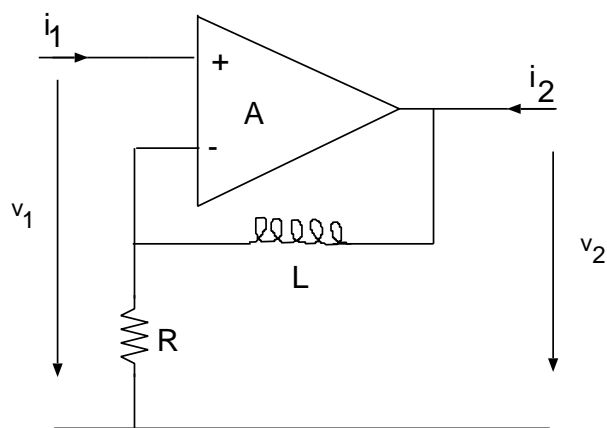


Figura D.10: amp-op em regime sinusoidal.

- calcule o ganho em tensão $A_v = \bar{V}_2 / \bar{V}_1$ do circuito da figura D.10 considerando o amp-op ideal.
- represente o diagrama de Bode (amplitude e fase) de A_v .
- calcule a impedância de entrada $Z_e = \bar{V}_1 / \bar{I}_1$ considerando o amp-op não ideal com uma resistência de entrada diferencial R_D .

- d) considerando $A \gg 1$ e $R_D \gg R$ calcule a parte real X e a parte imaginária Y da impedância de entrada, tal que $Z_e = X + jY$. Represente o diagrama cartesiano de Z_e .

Problema 2: considere o circuito da figura D.11.

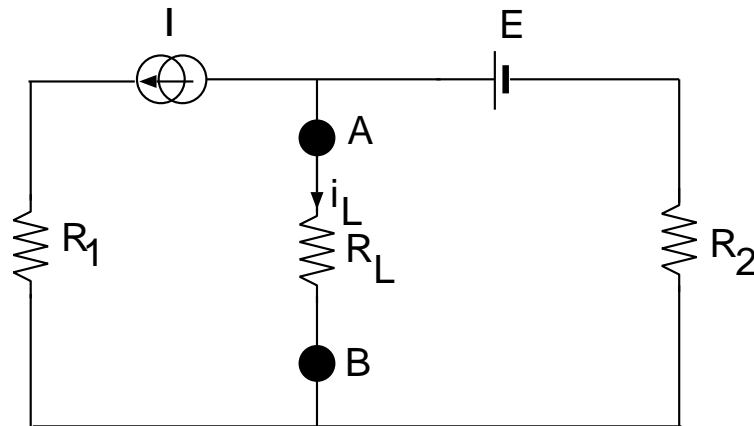


Figura D.11: circuito com duas malhas.

- utilizando apenas as leis dos nós e das malhas determine a expressão da corrente i_L na resistência R_L . Quais os valores das resistências R_1 e R_2 que permitem obter $i_L = 0$?
- utilizando agora o teorema de sobreposição volte a calcular a expressão de i_L verificando o resultado encontrado em a)
- calcule o dipolo de Norton equivalente ao circuito da figura D.11 visto entre os pontos A e B (retirando R_L).
- represente o dipolo calculado em c) e verifique o resultado encontrado em a) e b).
- aplicação numérica: $R_1 = R_2 = 5\Omega$, $R_L = 20\Omega$, $E = 10\text{ V}$ e $I = 1.5\text{ A}$. Calcule i_L , I_N e R_{th} .

E Folhas de Trabalhos Práticos

| | |
|----|---|
| 1 | Instrumentos e técnicas de medida I |
| 2 | Instrumentos e técnicas de medida II |
| 3 | Instrumentos e técnicas de medida III |
| 4 | Teoremas gerais I |
| 5 | Teoremas gerais II |
| 6 | Circuitos RC/CR - em regime transitório |
| 7 | Circuito RLC |
| 8 | Filtros RC/CR - em regime sinusoidal |
| 9 | Filtro RLC em regime sinusoidal |
| 10 | Quadripolos |

Funcionamento

No início do semestre o responsável da disciplina colocará na secretaria da Faculdade uma folha para inscrição dos alunos nos diferentes turnos. Cada turno terá no máximo 16 alunos divididos em 8 grupos de 2. No final de cada aula o material deverá ser deixado desligado e arrumado.

Relatório

Cada grupo de trabalho (2 alunos) fará durante a sessão de Trabalhos Práticos um relatório sobre o trabalho efectuado. A sebenta descreve detalhadamente o trabalho a realizar. Este divide-se em duas partes: o trabalho preparatório (preparação) a realizar individualmente antes da aula e o trabalho prático a realizar durante a aula e que fará o objecto do relatório.

No início da aula cada aluno deverá entregar ao docente a sua preparação, relativa ao trabalho prático marcado para essa sessão. O relatório (feito em folha de teste) deverá incluir:

- nome do trabalho
- nomes e números dos autores
- data
- lista de material empregue (nome do aparelho, tipo, marca, características principais, etc...)
- relativamente a cada pergunta: esquema de montagem com colocação dos aparelhos de medida, descrição da medida efectuada, resultados, tabelas, gráficos (eventualmente em folhas anexas), conclusões sobre as medidas e resultados, etc...

O relatório será entregue ao docente no final da aula que o corrigirá, conjuntamente com a preparação, classificará e entregará na aula seguinte. As notas dos trabalhos serão afixadas na página web da disciplina. Só será permitida a recuperação de trabalhos em casos devidamente justificados.

E.1 Instrumentos e técnicas de medida I

E.1.1 Preparação

As três quantidades básicas da electricidade - corrente, resistência e tensão - podem ser medidas através de três tipos de instrumentos: o amperímetro, o ohmímetro e o voltímetro respectivamente (figura E.1).



Figura E.1: símbolos do amperímetro, voltímetro e ohmímetro.

Em geral estes três tipos de medida podem ser efectuados usando um único aparelho que por isso se chama multímetro. Salvo no caso do ohmímetro, dever-se-á ter em atenção a polaridade do aparelho de medida em relação ao circuito a medir: os polos positivos deverão ser ligados entre si e os polos negativos também. Um engano na polaridade comportará, no caso dos aparelhos de agulha, um desvio no sentido negativo e nos aparelhos digitais um sinal de - antes do valor da corrente ou tensão medida.

Amperímetro

Um amperímetro coloca-se em série no circuito a medir (figura E.2) e por isso deverá apresentar, no caso ideal, uma resistência nula para não perturbar o circuito. A unidade de medida da corrente eléctrica é o Ampere (A).

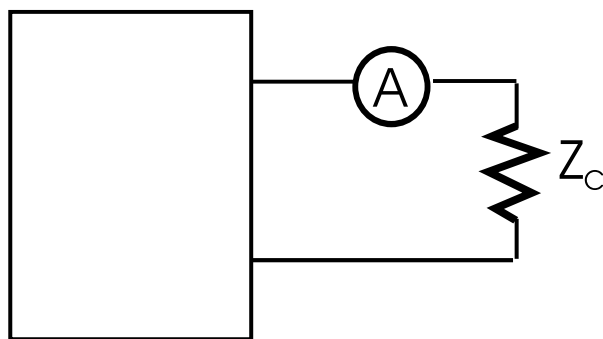


Figura E.2: montagem em série de um amperímetro.

Voltímetro

O voltímetro, ao contrário do amperímetro, deverá ser colocado em paralelo no circuito a medir (figura E.3). Assim, o voltímetro ideal deverá apresentar uma resistência infinita para não derivar nenhuma corrente do circuito em teste e não o perturbar. A unidade de medida da voltagem eléctrica é o Volt (V).

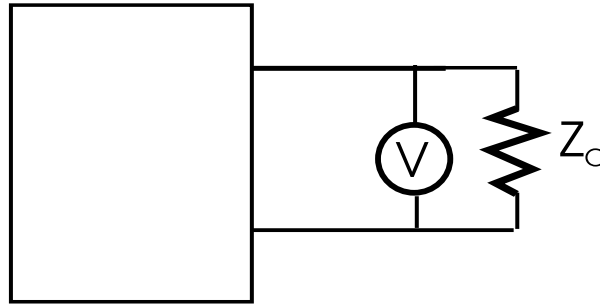


Figura E.3: montagem em paralelo de um voltímetro.

Ohmímetro

A resistência é a oposição que um elemento oferece à passagem da corrente eléctrica. Em geral, torna-se necessário retirar o elemento a medir do circuito onde possa estar inserido e colocá-lo em paralelo aos terminais do ohmímetro. O ohmímetro gera uma diferença de potencial aos seus terminais fazendo passar uma certa corrente na resistência. Através da lei de Ohm, calcula a resistência, e mostra o seu valor no écran. A unidade de medida da resistência eléctrica é o Ohm (Ω).

Fonte de alimentação contínua

Uma fonte de alimentação contínua de boa qualidade pode ser comutada como fonte de tensão ou fonte de corrente. No caso ideal, uma fonte de tensão deverá fornecer uma tensão constante qualquer que seja a corrente pedida. Isto implica que a sua resistência interna (em série) deverá ser nula. Contrariamente, uma fonte de corrente ideal deverá fornecer uma corrente constante qualquer que seja a diferença de potencial aos seus terminais e portanto deverá apresentar uma resistência interna (em paralelo) infinita. É claro que na prática a corrente e a tensão que podem ser fornecidos por uma fonte de alimentação encontram-se limitadas pelas características técnicas do aparelho em questão. Os circuitos equivalentes de uma fonte de alimentação de tensão e corrente encontram-se representados na figura E.4.

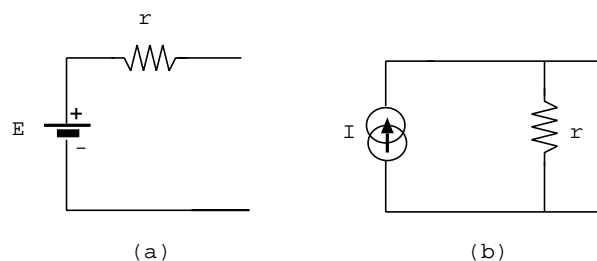


Figura E.4: fontes de alimentação equivalentes (a) de tensão e (b) de corrente.

Exercício 1: considere a montagem da figura E.5 onde a fonte de tensão é consid-

erada ideal.

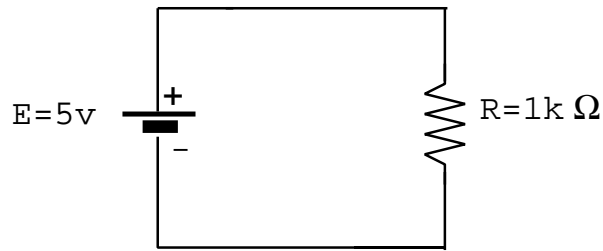


Figura E.5: medida de tensão e corrente

- a) refaça um desenho do circuito com um amperímetro (ideal) para medir a corrente na resistência R e calcule o valor da corrente.
- b) no desenho de a) coloque também um voltímetro (ideal) para medir a diferença de potencial aos terminais de R . Qual o valor que se deve encontrar ?

Exercício 2: considere agora a montagem da figura E.6.

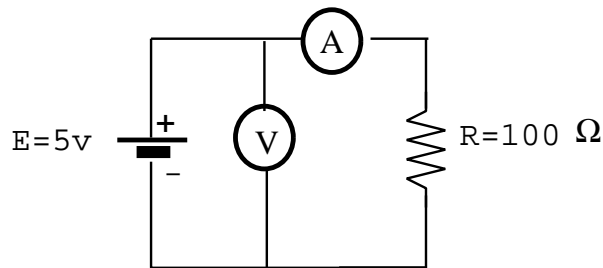


Figura E.6: medida de tensão e corrente.

- a) quais os valores medidos em V e A ?
- b) na figura E.6 (fonte de tensão ideal) considere que a fonte de tensão não é ideal mas sim formada por uma fonte ideal de 5 V em série com uma resistência interna de 50 Ω. Quais os novos valores medidos em V e A ?
- c) voltando à figura E.6 com a fonte de tensão ideal, considere que o amperímetro A não é ideal e tem uma resistência interna de 5 Ω. Quais os novos valores de tensão e corrente medidos em V e A ?

E.1.2 Trabalho prático

1. Característica tensão-corrente numa resistência

- realize a montagem da figura E.5. Fazendo variar o valor da tensão nominal da fonte entre 0 e 10 V, de um em um volt; medir a corrente e a tensão para cada valor utilizando a montagem dos aparelhos de medida exemplificada na figura E.6¹. Traçar a curva $I = f(V)$. A lei de Ohm é verificada ? Porquê ?
- deduzir experimentalmente o valor médio da resistência a partir da curva $I = f(V)$ de a) através do ajuste linear nos pontos medidos. Comparar o valor obtido com o valor obtido num ponto, com o valor nominal e com o valor real (utilizando o ohmímetro). Qual o valor mais preciso ? Conclusão.
- na mesma montagem de a), coloque agora os aparelhos de medida A e V de tal modo que o amperímetro fique em série antes do voltímetro. Refaça o traçado de $I = f(V)$. Deduza novamente o valor da resistência dos dados experimentais e faça a mesma comparação com os vários valores da resistência. Conclusão sobre a precisão de medida obtida pelas montagens: amperímetro antes e depois do voltímetro.

2. Característica tensão-corrente num diodo

Realize a montagem da figura E.7 tomando em atenção a polaridade do diodo.

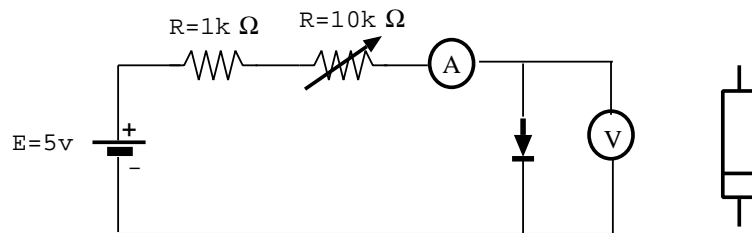


Figura E.7: característica tensão-corrente num diodo.

- fazendo variar o valor do potenciômetro trace a característica $I = f(V)$. Compare com a curva obtida em E.1.2 1. a) e c). Conclusão.
- utilizando os valores medidos em a) trace a mesma curva mas em papel semi-logarítmico $\log(I) = f(V)$. Qual a forma da curva obtida ? Conclusão.

¹para medir corrente e tensão no mesmo ponto, utilizar o multímetro simultaneamente como voltímetro e amperímetro utilizando o ponto comum ligado à massa e as saídas V e I respectivamente em paralelo e em série, bastando selecionar a função desejada com o respectivo botão para efectura a leitura seja da tensão seja da corrente.

E.2 Instrumentos e técnicas de medida II

E.2.1 Preparação

O osciloscópio é um elemento essencial na gama de instrumentos de medida utilizados em laboratórios de electrónica. A função essencial do osciloscópio é a de permitir visualizar a forma de onda ao longo do tempo. Quando essa visualização se efectua de forma calibrada, o osciloscópio é igualmente um importante aparelho de medida. Pode medir amplitudes, tempos, frequências, fases, etc... Uma das características importantes do osciloscópio é também a de permitir visualizar simultaneamente dois sinais, permitindo assim a sua comparação em termos de amplitude, atraso temporal, etc...

Durante muitos anos os osciloscópios eram completamente analógicos. Depois apareceram os osciloscópios com memória digital, que permitiam gravar uma parte do sinal em memória e depois visualizá-lo em detalhe. Esta função era particularmente útil para a análise de sinais transitórios. Hoje em dia existem já muitos osciloscópios completamente digitais. Qualquer um destes tipos de osciloscópios tem funcionalidades idênticas às do antigo osciloscópio analógico e por isso encontra-se em anexo uma descrição detalhada do princípio de funcionamento do osciloscópio catódico.

Neste trabalho prático vamos aprender a utilizar o osciloscópio para observar e medir formas de onda variadas.

Valores pico, eficazes, frequência e geradores ideais

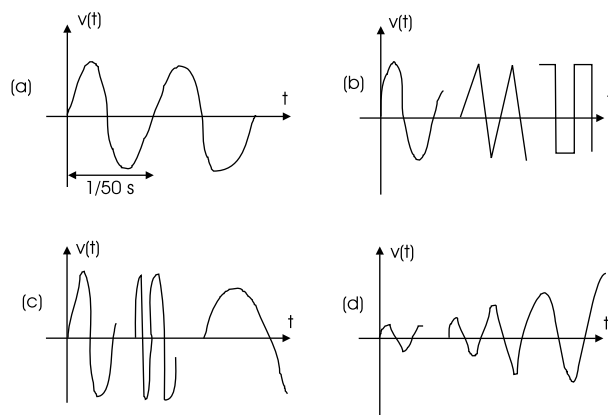


Figura E.8: (a) corrente doméstica, (b) formas de onda, (c) variação da frequência e (d) valor nominal.

A corrente contínua (DC) é produzida pela passagem de electrões do polo negativo para o polo positivo de uma fonte de alimentação ou pilha. A corrente tem, neste

caso, um só sentido. No caso da corrente alterna (AC), o sentido de passagem da corrente alterna do positivo para o negativo e depois do negativo para o positivo. A corrente alterna é em geral produzida por um gerador de frequência e o exemplo mais conhecido é a corrente de alimentação doméstica que em Portugal é à tensão nominal de 230 V e à frequência de 50 Hz de (figura E.8a). Na corrente alterna podemos fazer variar a forma de onda (figura E.8b), a frequência (figura E.8c) e o valor de pico (figura E.8d).

Gerador de sinais

Um exemplo de fonte de tensão alterna é o gerador de sinais que possuímos em sala de Trabalhos Práticos. Em geral a corrente que estes geradores podem produzir é bastante limitada e por isso são chamados fontes de tensão pois encontram-se mais próximos de uma fonte de tensão ideal (resistência interna fraca) do que de uma fonte de corrente ideal (grande resistência interna). As características mais importantes num gerador de sinais são: as formas de onda que pode produzir, a gama de frequências que abrange e a tensão máxima que pode fornecer.

Exercício 1: divisor de tensão

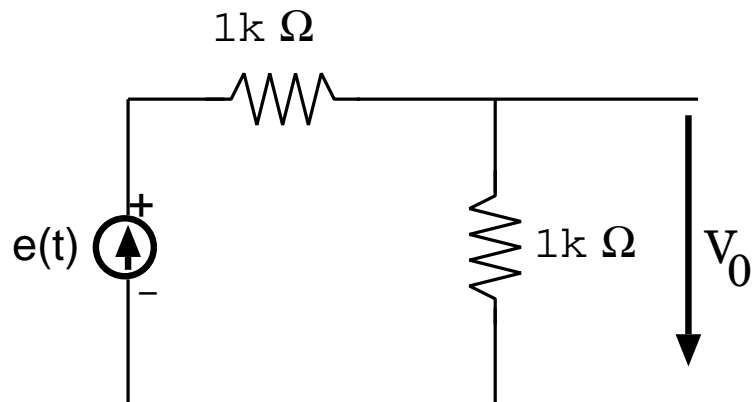


Figura E.9: divisor de tensão alterno.

Sabendo que o gerador de sinais debita uma tensão $e(t) = 3 \sin(6280t)$.

- calcule a tensão medida por um voltímetro colocado aos terminais do gerador.
- qual a amplitude pico medida por um osciloscópio colocado no mesmo ponto do voltímetro. Qual o rácio entre este valor e aquele observado em a) ?
- qual o valor do período da forma de onda observada no osciloscópio ?

- d) colocamos agora o multímetro de modo a medir a tensão V_0 . Qual o valor medido ? E se colocarmos o osciloscópio no mesmo ponto, qual o valor pico a pico da forma da onda que podemos observar.

Exercício 2: sinal sinusoidal com um valor de offset

Considere uma tensão sinusoidal $v(t)$

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) + V_0$$

- a) calcule o seu valor médio \bar{v}
- b) calcule o seu valor eficaz v_{eff}

Uso racional de um osciloscópio

Depois de ter observado todos os botões de comando assim como todos os terminais de ligação do osciloscópio, assegurar-se de que:

1. a massa está ligada à terra
2. os botões de desvio vertical e horizontal estão a meio
3. os botões de luminosidade e concentração encontram-se no ponto médio.
4. os amplificadores estão desligados
5. o comutador da base de tempo encontra-se regulado no período do sinal a observar.
6. o botão de variação contínua da base de tempo encontra-se completamente à esquerda.
7. o comutador de seleção do varrimento encontra-se na posição de varrimento interior.

Ligar o aparelho e esperar que ele aqueça. Ajustar os potenciômetros de luminosidade e concentração para o aparecimento de um traço fino no ecrã. ATENÇÃO: nunca aumentar muito a luminosidade do traço e sobretudo nunca deixar um ponto luminoso imóvel no ecrã.

E.2.2 Trabalho Prático

1. Funcionamento do osciloscópio

Ligar o osciloscópio seguindo os passos descritos no parágrafo “Uso racional do osciloscópio” da preparação. Identificar os diferentes botões e o seu efeito. Obter um traço contínuo no ecrã.

2. Medida de amplitudes

Aplicar num dos canais do osciloscópio uma tensão sinusoidal. Regular a amplitude do sinal de modo a obter uma tensão de 1 volt eficaz. Qual o valor pico a pico nesse caso ? Verificar o valor da tensão usando o voltímetro. Verificar a utilização do botão de calibração dos canais verticais.

3. Medida de frequências

A medida de frequências pode ser feita de forma directa introduzindo um sinal sinusoidal no canal A do osciloscópio e medindo o período do sinal, calcular a frequência. Comparar com o valor marcado no gerador de sinais. Trata-se de uma medida precisa ? Quais são os erros de medida mais importantes neste tipo de medida ? Como podem ser minimizados ? Veremos no próximo trabalho prático uma forma diferente de efectuar a medida de frequências que reduz os erros de experimentais.

4. Divisor de tensão alterno

Realize a montagem da figura E.9.

- a) regule o gerador de sinais de forma a gerar a onda $e(t) = 3 \sin(6280t)$. Para tal utilize o multímetro e o osciloscópio. Explique o procedimento.
- b) meça a tensão aos terminais do gerador de sinais e aos terminais da resistência, V_o utilizando o multímetro. Calcule os valores de pico correspondentes. Verifique os resultados com o osciloscópio. Qual dos dois aparelhos tem maior precisão ? Conclusão.
- c) utilizando o botão de *offset* do gerador adicione ao sinal $e(t)$ uma tensão contínua de 2 V. Verifique utilizando o osciloscópio em posição DC. Qual é o novo valor eficaz de $e(t)$? Calcule e verifique experimentalmente utilizando o multímetro. Quais os valores eficazes, pico e pico-pico medidos em V_o ?
- d) sempre com a tensão $e(t) = 3 \sin(6280t)$ mude para onda quadrada. Meça de novo V_o com o multímetro e com o osciloscópio. Conclusão.

Anexo

Princípio de funcionamento do osciloscópio catódico

O tubo catódico (figura E.10)

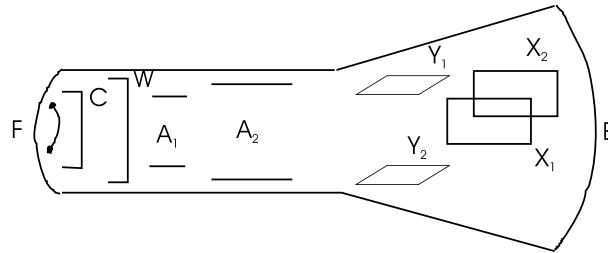


Figura E.10: esquema interno do tubo catódico.

O canhão de electrões

Chama-se canhão de electrões ao conjunto de elementos que permite obter um feixe de electrões a grande velocidade. Este comporta:

- a) um filamento F aquecido por uma tensão alterna ou contínua geralmente de 2.5 ou 6.3 volts.
- b) um cátodo C, de forma cilíndrica, colocado em torno do filamento e emitindo electrões por efeito termo iónico.
- c) o cilindro de Wehnelt W, chamado correntemente Wehnelt, que é a grelha de comando do tubo e que regula a intensidade do feixe de electrões. A sua tensão em relação ao cátodo é de cerca de -50 a -120 volts.
- d) um eléctrodo de concentração A_1 . Este tem o papel de uma lente electrostática e produz a focalização do feixe de electrões no ecrã fluorescente E. A sua tensão em relação ao cátodo é de cerca de +30 a +1000 volts.
- e) um eléctrodo de aceleração A_2 que dá aos electrões uma grande velocidade. A sua tensão em relação ao cátodo é de +600 a +3000 volts.

As placas de desvio

- a) um par de placas horizontais Y_1 e Y_2 produzindo o desvio vertical do spot luminoso quando é estabelecido um campo eléctrico entre elas.

- b) um par de placas verticais X_1 e X_2 , produzindo o desvio horizontal do spot luminoso quando um campo eléctrico existe entre elas.

Um eléctrodo de pós-aceleração A_3

A presença deste eléctrodo é dispensável. Tem a forma de um anel mais ou menos largo constituído geralmente por uma camada condutora na face interna do tubo catódico. Aplicada uma diferença de potencial de alguns milhares de volts (5000 a 30000) ele aumenta o brilho do spot através do aumento da energia cinética dos electrões.

O ecrã de observação

A face anterior do tubo de vidro está coberta de uma matéria que se torna luminosa quando recebe o choque de electrões a alta velocidade. O impacto no ecrã do feixe de electrões traduz-se assim por um ponto luminoso (spot).

Montagem prática. Protecção

O tubo catódico é revestido de uma camisa de protecção magnética em μ metal destinada a reduzir ao máximo a influência dos campos magnéticos exteriores e inclusivé do campo terrestre. Em aparelhos antigos o tubo catódico encontra-se protegido por uma camada de vidro espesso e transparente de modo a proteger o utilizador dos riscos de implosão do tubo.

O circuito de varrimento

O varrimento normal

O varrimento normal destina-se a produzir uma tensão que aplicada entre as placas X_1 e X_2 provoca o desvio horizontal do spot luminoso proporcional ao tempo sob todo o ecrã E. Esta tensão deverá portanto variar linearmente em função do tempo e cair a zero num tempo muito curto: é o que se chama uma tensão em “dentes de serra”. O circuito que produz esta tensão chama-se **base de tempo**.

O varrimento desencadeado

Em muitas aplicações, e em especial no estudo dos fenómenos transitórios não periódicos, é necessário dispôr de um dispositivo tal que o varrimento seja desencadeado pelo fenómeno a observar. Em geral o sinal a observar é injectado no circuito de base de tempo de modo a desencadear o varrimento do ecrã. O tempo entre a chegada do impulso e o varrimento pode ser regulável assim como o nível de sensibilidade a partir do qual o varrimento será efectuado.

Varrimento 50 Hz

A maioria dos osciloscópios possui um dispositivo de varrimento sinusoidal com a

frequência da tensão de alimentação 50 Hz que é uma frequência de referência que serve para observar figuras de Lissajoux.

Varrimento exterior

Neste caso pode-se eliminar todo e qualquer circuito de varrimento interno e controlar o varrimento através de uma tensão externa.

Os amplificadores

A presença de amplificadores nos circuitos de varrimento horizontal e vertical é indispensável na maior parte dos casos de modo a tornar a tensão de controle do tubo o mais independente possível do circuito a observar. As características em frequência destes amplificadores dão ao osciloscópio a sua banda passante que pode ir entre 20 MHz e o GHz. As diferenças de fase introduzidas por estes amplificadores devem ser muito pequenas de modo a que as medidas sejam o mais fiéis possíveis.

Os circuitos de sincronização

Sincronização interna

A sincronização interna permite obter uma “relação temporal constante” entre o sinal a observar e o circuito de varrimento de modo a poder obter uma figura estável no ecrã e permitir a observação e medida de amplitudes, tempos, diferenças de fase, etc...

Sincronização 50 Hz

Este dispositivo permite controlar o varrimento independentemente da tensão a observar, a partir da frequência do sector de alimentação 220V.

Sincronização externa

A frequência de um sinal exterior pode ser também usada para sincronizar o sinal a observar.

Circuito de alimentação

O circuito de alimentação do osciloscópio permite obter um número de tensões variadas, entre alguns volts para os circuitos electrónicos de base de tempo e sincronização, e até alguns milhares de volt para a alimentação do tubo catódico e das placas de aceleração.

Os comandos dum osciloscópio

Interruptor ON/OFF

Permite ligar o aparelho que demorará alguns segundos a aquecer o filamento do

tubo catódico.

Potênciometro de luminosidade

Este potênciometro permite controlar a intensidade luminosa do spot.

Potênciometro X

Permite agir sobre as placas “X” e regular o spot no sentido horizontal.

Potênciometro Y

Permite agir sobre as placas “Y” e regular o spot no sentido vertical.

Potênciometro “Focus”

Este potênciometro permite realizar a focalização do feixe de electrões no ecrã de observação.

Varrimento e sincronização

Esta parte do osciloscópio comporta em geral:

- a) um comutador que permite escolher o modo de varrimento: interno, desencadeado, 50 Hz, externo e o modo de sincronização: interno, 50 Hz, externo
- b) para a base de tempo interna um comutador de gama de frequências, um potênciometro permitindo uma variação contínua da frequência no interior de cada gama e um potênciometro para o controle da amplitude horizontal do varrimento.
- c) para o varrimento externo: um potênciometro de comando do ganho do amplificador horizontal (se ele existe).
- d) para a sincronização (interna ou externa): um potênciometro de controle da taxa de sincronização.

Amplificador vertical

- a) um comutador de modificação do ganho
- b) um potênciometro de variação precisa do ganho no interior de uma gama de ganho.
- c) um comutador AC/DC/GROUND permitindo calibrar o amplificador em posição GROUND, visualizar todo o sinal em posição DC e sómente a sua componente alterna em posição AC.

Dispositivos complementares

Outros osciloscópios mais sofisticados poderão comportar dispositivos mais específicos segundo a função a que se destinam. Entre outros podemos ter:

1. calibração em tensão possível através de uma fonte de tensão interna muito estável.
2. varrimento monotraço que permite desencadear um varrimento à escolha do utilizador cada vez que este carrega num botão.
3. dois canais de visualização simultânea. Hoje em dia quase todos os osciloscópios são bicanal nos quais é usado um comutador electrónico que permite aplicar ao amplificador vertical uma ou outra das tensões a visualizar. A comutação faz-se a alta velocidade de forma que o utilizador não se aperceba. Os osciloscópios com dois canhões de electrões no mesmo tubo catódico são muito raros hoje em dia devido ao seu custo elevado.
4. hoje em dia existem osciloscópios completamente digitais que permitem uma manipulação do sinal observado seja na memória para obter zooms, sobreposições, impressões em papel, espectros, etc...
5. é também possível em alguns osciloscópios modular a intensidade do spot aplicando no Wehnelt uma tensão entre 10 e 50 volts.

E.3 Instrumentos e técnicas de medida III

E.3.1 Preparação

1. Medida de diferenças de fase com o método directo

Para medir a diferença de fase entre dois sinais podemos utilizar o método de medida directa aplicando cada um dos sinais aos canais X e Y do osciloscópio. Ajusta-se a base de tempo de forma a que o meio período de um dos sinais preencha completamente o ecrã na horizontal. De forma a obter uma maior precisão na medida amplificam-se verticalmente os sinais de modo a obter uma intersecção franca quase a 90 graus do traço luminoso com o eixo horizontal do tempo. Conta-se o número de quadriculas horizontais que separam os traços dos dois sinais. A diferença de fase obtem-se sabendo que o ecrã completo, i.e., dez quadriculas, corresponde a π e fazendo a proporção. O resultado é directamente obtido em radianos. Este método também pode ser utilizado para medir o atraso temporal entre os dois sinais. Em todas as medidas com o osciloscópio deveremos colocar-nos de modo a obter uma visão frontal do ecrã e nunca de lado, de forma a evitar erros de paralaxe nas medidas.

2. Medida de diferenças de fase com o método da elipse

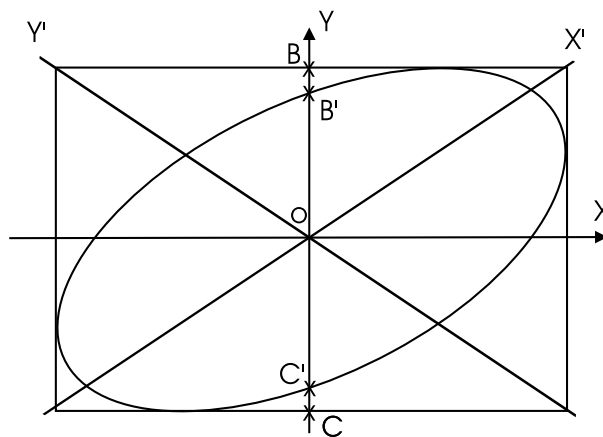


Figura E.11: método da elipse.

Consideremos dois sinais sinusoidais aplicados nos canais X e Y de um osciloscópio (eixos ortogonais OX e OY da figura E.11),

$$\begin{cases} x(t) = A \cos \omega t \\ y(t) = B \cos(\omega t - \phi) \end{cases}$$

A composição destas duas equações obtem-se eliminando o tempo t entre elas, i.e., o ponto luminoso no ecrã vai ser desviado horizontal e verticalmente em simultâneo, formando assim uma figura parameterizada pela variável tempo.

a) comece por definir

$$x' = \frac{x}{A} = \cos \omega t$$

$$y' = \frac{y}{B} = \cos(\omega t - \phi) = x' \cos \phi + \sin \omega t \sin \phi,$$

e demonstre que

$$x'^2 + y'^2 - 2x'y' \cos \phi - \sin^2 \phi = 0.$$

b) sabendo que a equação anterior é a equação de uma elipse rodada de $\pi/4$, faça uma mudança de variável

$$x' = x'' \cos \frac{\pi}{4} - y'' \sin \frac{\pi}{4} = \frac{x'' - y''}{\sqrt{2}}$$

$$y' = x'' \sin \frac{\pi}{4} + y'' \cos \frac{\pi}{4} = \frac{x'' + y''}{\sqrt{2}},$$

demonstre que

$$\frac{x''^2}{2 \cos^2 \frac{\phi}{2}} + \frac{y''^2}{2 \sin^2 \frac{\phi}{2}} = 1.$$

c) que é agora uma elipse segundo os eixos OX''/OY'' . Calcule os meios eixos segundo OX'' e OY'' , respectivamente a e b . Demonstre que o valor do atraso ϕ entre as duas formas de onda se calcula como sendo

$$\tan \frac{\phi}{2} = \frac{b}{a}$$

E.3.2 Trabalho prático

1. Medida de frequência comparada: figuras de Lissajoux

Pretende-se determinar a frequência de um sinal de uma forma precisa e assim aplica-se o método dito de Lissajoux, que não é mais do que uma extensão do método da elipse a sinais de frequência diferente. Para efectuar esta medida é necessário possuir uma frequência de referência em relação à qual se efectua a medida. Para efectuar este trabalho será necessário o uso de dois geradores. Demonstra-se que a composição de duas vibrações sinusoidais de frequências F_x e F_y segundo dois eixos ortogonais resulta numa curva inscrita num rectângulo cujos lados são iguais às amplitudes das vibrações. Se a relação F_x/F_y for igual à relação entre dois números inteiros m/n (supostos primos), a curva de Lissajoux será fechada e terá exactamente m pontos de contacto com os lados verticais do rectângulo e n pontos de contacto com os lados horizontais. Se uma das frequências for conhecida com precisão, podemos determinar a outra também com grande precisão.

$$F_x = F_y \times \frac{\text{numero de pontos de contacto com os lados verticais}}{\text{numero de pontos de contacto com os lados horizontais}} \quad (4)$$

Se $F_x = F_y$ a curva é em geral uma elipse salvo no caso em que a diferença de fase entre os dois sinais é 0 ou π onde se obterá um recta na diagonal do rectângulo.

NOTA: a figura de Lissajoux será rigorosamente estável se os geradores estudados não tiverem nenhuma deriva em frequência.

Realize três figuras distintas e estáveis no ecrã. Desenhe e explique.

2. Medida de diferenças de fase

Realizar a montagem da figura E.12. Introduzir à entrada um sinal $V_e = 2.5 \sin(12566t)$.

a) determinar o valor da diferença de fase utilizando o método de medida directa.

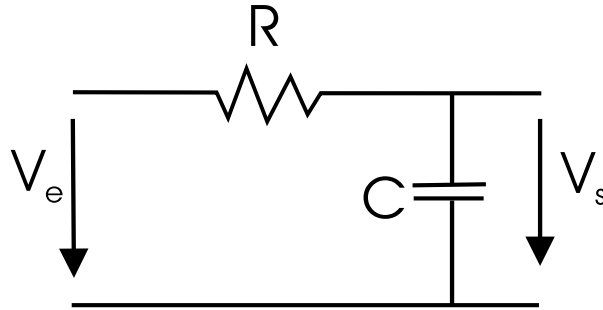


Figura E.12: $R = 1k\Omega$ e $C = 220nF$

- b) empregar agora o método estudado na preparação fazendo uma elipse de Lissajoux. Calcular de novo ϕ .
- c) medir a amplitude dos sinais de entrada e de saída. Fazer variar a frequência e observar a variação do sinal de saída em relação ao sinal de entrada tanto em amplitude como em diferença de fase. Colocar os valores de amplitude e fase numa tabela para vários valores da frequência. Conclusão.

NOTAS:

- i) um método alternativo ao da preparação consiste em verificar nas equações que quando $x = 0$ temos $A \sin \omega t = 0$ o que implica que o segmento OB' na figura E.11 é $B \sin \omega t$ e como $B=OB$ então

$$\sin \phi = \frac{OB'}{OB} = \frac{B'C'}{BC} \quad (5)$$

- ii) se a elipse tem o seu eixo principal no segundo quadrante então

$$\phi \text{ (real)} = \pi - \phi \text{ (medido)} \quad (6)$$

- iii) no método da elipse, a medida é facilitada se os dois sinais aplicados tiverem a mesma amplitude.

3. Medidas de sinais transitórios

Utilizar a mesma montagem da figura E.12 com $C = 22 \text{ nF}$. Aplicar em V_e uma onda quadrada de frequência 500 Hz. Observar e desenhar o sinal V_s . Aumentar progressivamente a frequência até 50 kHz. Desenhar o sinal de saída para $f=2, 5, 10, 20$ e 50 kHz observado as amplitudes e formas relativas da entrada e saída. Conclusão.

E.4 Teoremas Gerais I

E.4.1 Preparação

1. Teorema de sobreposição

Considerando um circuito linear com vários geradores de tensão e/ou corrente independentes, o teorema de sobreposição diz que a corrente eléctrica num ramo do circuito é igual à soma da corrente produzida nesse ramo por cada um dos geradores agindo isoladamente.

2. Teorema de Thevenin

Seja um circuito linear com vários geradores de tensão e/ou corrente independentes. Para um dado ramo do circuito, de impedância Z_c , o resto do circuito comporta-se como um gerador de força electromotriz V_{TH} e de impedância interna Z_{TH} , chamado gerador de Thevenin (figura E.13).

- cálculo de V_{TH} : retira-se Z_c e calcula-se a tensão entre AB à qual se chama V_{TH} .
- cálculo de Z_{TH} : mantendo sempre o circuito em aberto entre AB, anulando todas as fontes de tensão e de corrente independentes do circuito calcula-se a impedância entre AB à qual se chama Z_{TH} .

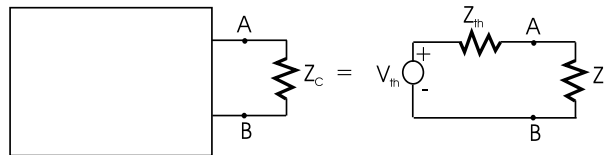


Figura E.13: teorema de Thevenin

3. Teorema de Norton

Considerando o circuito precedente pode-se substituir o gerador de Thevenin por um gerador de corrente equivalente de valor $I_N = V_{TH}/Z_{TH}$ e colocá-lo em paralelo com a impedância Z_{TH} .

4. Aplicação

Considere o circuito da figura E.14.

- calcular a corrente I na resistência R_4 utilizando o teorema de sobreposição.
- verificar o resultado usando o teorema de Thevenin.

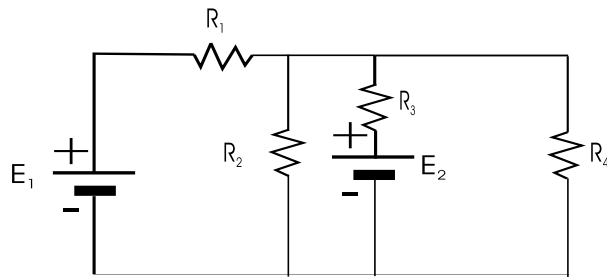


Figura E.14: montagem de aplicação

c) aplicação numérica:

$$\begin{aligned} R_1 &= 120\Omega & E_1 &= 9 \text{ v} \\ R_2 &= 180\Omega & E_2 &= 4.5 \text{ v} \\ R_3 &= 220\Omega \\ R_4 &= 120\Omega \end{aligned}$$

Anotar os valores das correntes e tensões nos diferentes casos para verificação durante o trabalho prático.

E.4.2 Trabalho Prático

Trata-se da verificação prática dos resultados teóricos calculados com os valores numéricos da preparação.

NOTAS:

- i) para efectuar a medida de uma corrente I numa resistência não usar um amperímetro em série com a resistência mas sim um voltímetro colocado aos terminais da resistência e utilizar a lei de Ohm. Isto de modo que a resistência interna do amperímetro não introduza um erro suplementar na medida da corrente.
- ii) antes de colocar uma resistência ou potenciômetro num circuito fazer o cálculo da potência dissipada para escolher o valor de potência da resistência.
- iii) os vários resultados (teóricos e experimentais) devem ser apresentados sob forma de tabela.

Realizar a montagem da figura E.14 com os valores de 4.c) da preparação.

1. Teorema de sobreposição

- a) medir os valores das correntes na resistência R_4 , devidas alternativamente a uma e a outra fonte de tensão. Explicar os métodos de medida e estimar os erros da medida efectuados.
- b) medir agora a corrente em R_4 com as duas fontes ligadas de acordo com o circuito da figura E.14 e verificar os resultados experimentais obtidos nesta e na alínea a), por comparação com os resultados teóricos obtidos na preparação.

2. Teorema de Thevenin e Norton

Sempre na montagem da figura E.14:

- a) medir a tensão de Thevenin V_{TH} e a resistência de Thevenin R_{TH} visto de R_4 . Explicar os métodos de medida e os possíveis erros cometidos.
- b) medir a corrente de Norton. Comparar com o valor deduzido de a).
- c) comparar os resultados obtidos com os valores teóricos da preparação. Conclusão.
- d) utilizando os equivalentes de Thevenin e Norton, determine a corrente em R_4 . Compare com o valor obtido com aquele medido para essa corrente, na prova do teorema de sobreposição.

E.5 Teoremas Gerais II

E.5.1 Preparação

Considere os circuitos da figura E.15.

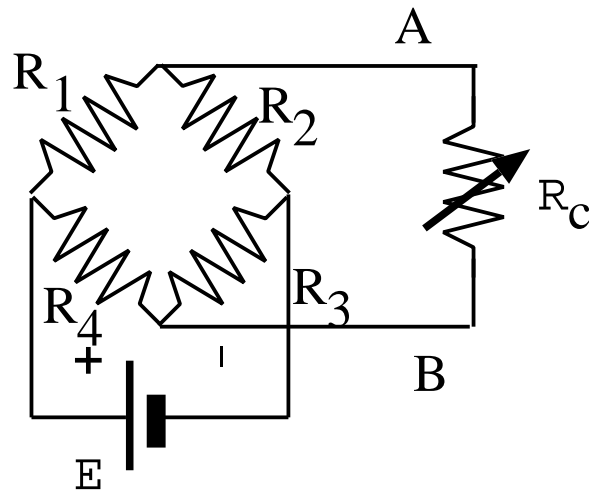


Figura E.15: ponte de Wheatstone

- i) calcular o gerador de Thevenin e Norton equivalentes ao dipólos da figura E.15.
- ii) a partir do resultado obtido em i) calcular a potência $P=VI$ dissipada na carga R_c .
- iii) para que valor da carga se obtem a condição de adaptação ?
- iv) qual é o valor máximo dissipado na carga ?
- v) aplicação numérica: para os casos de i) a iv) utilizar os valores:

$$\begin{aligned}R_1 &= 120\Omega & E &= 10 \text{ v} \\R_2 &= 180\Omega \\R_3 &= 120\Omega \\R_4 &= 220\Omega\end{aligned}$$

Anotar os valores obtidos de V_{th} , I_N , R_{th} e P_{max} , para posterior verificação experimental durante o trabalho prático.

E.5.2 Trabalho Prático

Trata-se da verificação experimental dos resultados teóricos calculados na preparação. Realizar a montagem da figura E.15.

- a) traçar a curva $V=f(I)$ aos bornos da carga, fazendo variar R_c de 0 a ∞ , notando os valores de V, I, R_c numa tabela. Deduzir da curvas os elementos de Thevenin e Norton. Comparar com os valores teóricos utilizando os resultados da preparação.
- b) realizar os geradores de Thevenin e de Norton com os valores determinados em a) e traçar de novo $V = f(I)$ no mesmo gráfico da alínea a) ². Conclusão.
- c) traçar a curva $P = f(R_c)$ utilizando os resultados medidos em a). A partir da curva determinar o valor de R_c que dá a adaptação máxima e comparar com o valor teórico. Conclusão.

²as fontes de alimentação da sala de TP podem ser utilizadas como fontes de corrente estabilizadas fazendo um curto circuito aos bornos e ajustando a corrente ao valor pretendido. Não se deve tocar mais no botão da corrente estando o botão de tensão colocado num valor elevado.

E.6 Circuitos RC/CR em regime transitório

E.6.1 Preparação

1. Circuito integrador passivo RC

Considere a montagem da figura E.16.

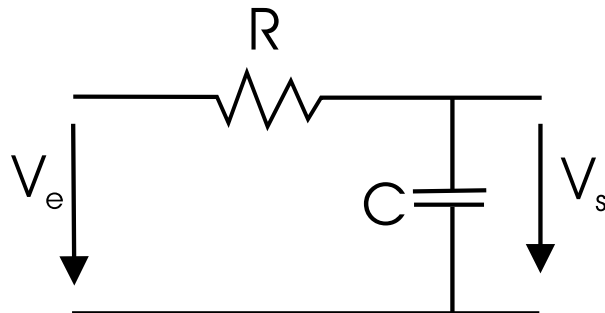


Figura E.16: circuito RC: $R = 1\text{ k}\Omega$ e $C = 100\text{ nF}$.

Aplicamos uma tensão V_e à entrada do circuito e observa-se uma tensão V_s à saída.

- calcular a resposta V_s quando V_e muda bruscamente de 0 para uma tensão constante V_0 , sabendo que o condensador C se encontra inicialmente descarregado.
- calcular a equação da recta tangente na origem e determinar a sua intersecção com a recta $V_s = V_0$. Desenhar o gráfico da tensão de saída para $V_0 = 5\text{ volts}$.
- a partir de b) determinar para que valores do tempo t (em relação à constante de tempo $\tau = RC$) o sinal de saída se comporta como o integral do sinal de entrada.

2. Circuito derivador passivo CR

Considere a montagem da figura E.17. Aplicamos uma tensão V_e à entrada do circuito e observa-se uma tensão V_s de saída.

- calcular a resposta V_s quando V_e muda bruscamente de 0 para uma tensão constante V_0 .
- calcular a equação da tangente na origem e determinar a sua intersecção com a recta $V_s = 0$. Desenhar o gráfico da tensão de saída para $V_0 = 5\text{ volts}$.

- c) a partir de b) determinar para que valores do tempo t (em relação à constante de tempo $\tau = RC$) o sinal de saída se comporta como a derivada do sinal de entrada.

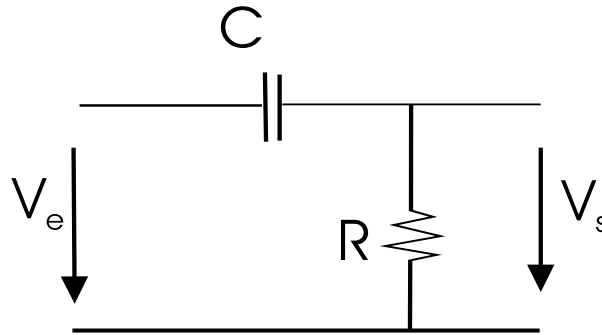


Figura E.17: circuito CR: $R = 1\text{ k}\Omega$ e $C = 100\text{ nF}$.

E.6.2 Trabalho prático

NOTAS:

1. define-se o tempo de subida como o tempo que o sinal demora a passar de 10 a 90% do seu valor final. Para realizar a medida de forma precisa no osciloscópio dever-se-á aumentar o sinal de modo a ocupar o ecrã entre os tracejados na parte inferior e superior. O tempo de subida encontra-se medindo o intervalo de tempo entre as intersecções da curva com as linhas contínuas logo acima e logo abaixo das linhas tracejadas no ecrã.
2. o símbolo \ll em electrónica pode ser interpretado como 10 vezes inferior.

1. Circuito RC

Realizar a montagem da figura E.16.

- a) aplicar à entrada uma tensão V_e quadrada de período 0.4 ms. Desenhar os sinais de saída observados. Medir com o osciloscópio os tempos de subida para valores de $C = 22, 100$ e 220 nF .
- b) para $C = 100\text{ nF}$, comparar o valor da constante de tempo com o período do sinal e em seguida fazer variar este período. Desenhar e explicar os casos $RC \ll T/2$, $RC = T/2$ e $RC \gg T/2$ onde RC é a constante de tempo dada na preparação. Em que caso o sinal de saída se comporta como o integral do sinal de entrada.

- c) aplicar à entrada uma onda triangular. Observar o sinal de saída no caso em que este se comporta como o integral do sinal de entrada. Explicar.

2. Circuito CR

Realizar a montagem da figura E.17.

- a) aplicar à entrada uma tensão V_e quadrada de período 0.4 ms. Medir com o osciloscópio os tempos de descida do sinal de saída para valores de $C = 22, 100$ e 220 nF.
- b) para $C = 100$ nF, comparar o valor da constante de tempo com o período do sinal e em seguida fazer variar este período. Desenhar e explicar os casos $RC \ll T/2$, $RC = T/2$ e $RC \gg T/2$. Em que caso o sinal de saída se comporta como a derivada do sinal de entrada.
- c) aplicar à entrada uma onda triangular. Observar o sinal de saída no caso em que este se comporta como a derivada do sinal de entrada. Explicar.

E.7 Circuito RLC

E.7.1 Preparação

Considere a montagem da figura E.18. Sabendo que o sinal aplicado em $v_e(t)$ muda bruscamente de 0 para 5 V e designando por R_0 o valor de $P + R$ em série, calcule:

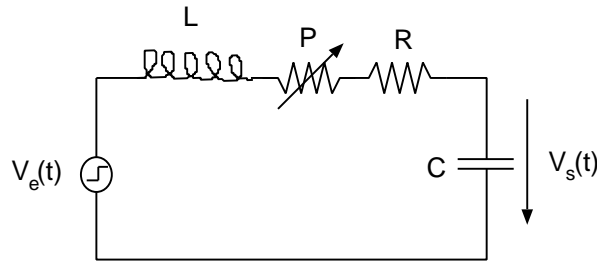


Figura E.18: Circuito RLC série: $R=1\text{ k}\Omega$, P potenciômetro linear de $2.2\text{ k}\Omega$, $L=0.1\text{ H}$, $C = 220\text{ nF}$.

- a) a forma literal da tensão $v_s(t)$ considerando que o circuito se encontra em repouso no instante inicial.
- b) a forma literal e o valor numérico da resistência crítica R_c para a qual o regime de funcionamento é exponencial limite antes de se tornar oscilatório.
- c) uma tabela com os quatro regimes de funcionamento possíveis e os valores de amplitudes, durações e pulsações (caso existam) do sinal de saída, tendo em conta os valores numéricos dos elementos da montagem e do sinal $v_e(t)$.

E.7.2 Trabalho Prático

Realize a montagem da figura E.18.

1. Regime sobre amortecido

Neste caso o potenciômetro P deverá ser colocado no seu valor máximo aumentando assim a resistência no circuito para um valor bem superior à resistência crítica R_c .

- a) observar e desenhar o sinal de saída $v_s(t)$. Medir o tempo de subida.
- b) verificar e comentar o efeito de uma variação da resistência $R + P$ no tempo de subida. Desenhar e medir o tempo de subida para um caso extremo relativamente à alínea anterior.

2. Regime crítico

- a) coloque o potenciômetro P no valor máximo e retire a resistência R do circuito. Faça variar a resistência do circuito através do potenciômetro P , até obter uma resposta $v_s(t)$ imediatamente antes de se verificar oscilação. Medir o valor de P e deduzir o valor da resistência crítica. Comparar com o valor encontrado na preparação.
- b) medir o tempo de subida para $R = R_c$.

3. Regime sub amortecido

Considere para R_c o valor calculado na preparação

- a) para $R < R_c/2$, desenhar o sinal de saída obtido. Medir o tempo de subida, o valor máximo atingido e a pulsação do sinal de saída. Comparar com os valores teóricos calculados na preparação.
- b) fazer variar R para valores $R_c/5$ e $R_c/10$. Observar e desenhar o sinal de saída. Apresente numa tabela os valores do tempo de subida, valores máximos e pulsações para os valores de resistência considerados.

4. Regime não amortecido

Curto-circuitar a resistência R e diminuir progressivamente o valor do potenciômetro P até zero. Observar o sinal de saída. Que sinal se deveria obter ? O que é que se obtém e porquê ?

E.8 Filtros RC/CR em regime sinusoidal

E.8.1 Preparação

1. Revisões: notação complexa

Em regime permanente sinusoidal uma tensão em qualquer ponto de um circuito pode ser representada por

$$v(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi) \quad (\text{E-8.1})$$

e caracterizada completamente através da sua amplitude V_0 e fase ϕ . Para efeitos de cálculo, podemos representar o sinal $v(t)$ pelo valor complexo

$$\bar{V} = V_0 e^{j\phi} \quad (\text{E-8.2})$$

que é um número que pode ser representado no plano complexo como indicado na figura E.19.

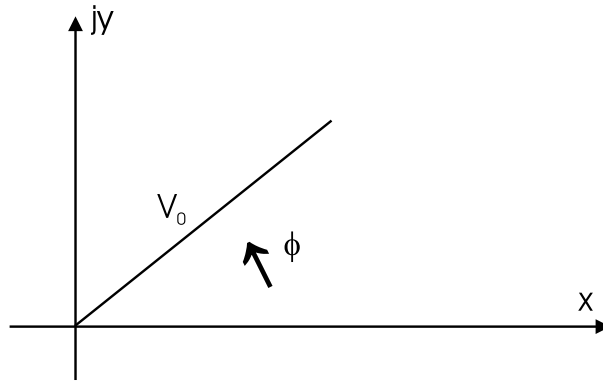


Figura E.19: representação de fasor.

A passagem da notação complexa \bar{V} à notação trigonométrica $v(t)$ faz-se multiplicando \bar{V} por $e^{j\omega t}$ e tomando a parte real do resultado obtido. O valor \bar{V} obedece a todas as regras de cálculo dos números complexos e representa um potente utensílio na análise de circuitos em regime permanente sinusoidal (e só nesse caso!).

Se aplicarmos uma tensão sinusoidal $v(t) = V_0 \cos(\omega t)$ aos terminais de uma resistência R obtemos uma corrente $i(t)$ também sinusoidal de amplitude V_0/R e em fase com $v(t)$. Em notação complexa podemos dizer que

$$\bar{V} = R\bar{I} \quad (\text{E-8.3})$$

Se em vez da resistência tivermos um condensador C , podemos escrever que

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} = -C\omega V_0 \sin(\omega t) \quad (\text{E-8.4})$$

Utilizando a relação $\sin(\omega t) = -\cos(\omega t + \pi/2)$, podemos escrever em notação complexa que o fasor associado com a tensão sinusoidal $\sin(\omega t)$ se escreve $-\bar{V} \exp j\pi/2$. Substituindo em (E-8.4) temos que

$$\bar{I} = -C\omega(-\bar{V}e^{j\frac{\pi}{2}}) \quad (\text{E-8.5})$$

$$= jC\omega\bar{V} \quad (\text{E-8.6})$$

de onde

$$\bar{V} = \frac{1}{jC\omega}\bar{I} \quad (\text{E-8.7})$$

Diz-se que um condensador tem uma impedância equivalente em sinusoidal igual a $Z_C = 1/jC\omega$ e que a tensão tem um atraso de fase de $\pi/2$ em relação à corrente. No caso da bobine de valor L temos que

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \rightarrow i(t) = \frac{1}{L} \int v(t) dt \quad (\text{E-8.8})$$

substituindo $v(t)$

$$i(t) = \frac{V_0}{\omega L} \sin(\omega t) = \frac{V_0}{\omega L} \cos(\omega t) e^{j\frac{\pi}{2}} \quad (\text{E-8.9})$$

e finalmente

$$\bar{V} = j\omega L \bar{I} \quad (\text{E-8.10})$$

e diz-se neste caso que a impedância equivalente a uma bobine em regime sinusoidal permanente é $Z_L = j\omega L$ e que a tensão tem um avanço de fase de $\pi/2$ em relação à corrente. Destas duas expressões Z_C e Z_L pode ver-se que a impedância da bobine aumenta com a frequência e a do condensador diminui com a frequência.

2. Revisões: representação de Bode

Um sistema, dito de primeira ordem, tem uma representação do tipo

$$A = \frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{1 + j\tau\omega},$$

onde $\tau = RC$ é a constante de tempo do sistema. O estudo em regime permanente sinusoidal deste sistema faz-se normalmente através da representação de A num diagrama da Bode, *i.e.*, representando separadamente a amplitude (em dB) e a fase de A .

O ganho em décibéis (dB) obtem-se a partir do módulo $|A|$ como $G_{\text{dB}} = 20 \log |A|$ e assim,

$$G_{\text{dB}} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}},$$

ou seja

$$G_{\text{dB}} = -10 \log(1 + \tau^2 \omega^2).$$

Quando $\omega \rightarrow 0$ temos que $G_{\text{dB}} \rightarrow 0$ dB e quando $\omega \rightarrow \infty$ temos que $G_{\text{dB}} \rightarrow -\infty$ dB.

A inclinação das assíntotas é de 0 dB quando $\omega \rightarrow 0$ e de -20 dB por década (passagem de uma frequência f a uma frequência $10f$) quando $\omega \rightarrow \infty$. Isto pode-se determinar observando que quando $\omega \rightarrow \infty$

$$G_{\text{dB}} \rightarrow -10 \log \omega^2 + 10 \log \omega_0^2$$

onde $\omega_0 = 1/\tau$. Num gráfico semi-logarítmico podemos escrever $X = \log \omega$ e $X_0 = \log \omega_0$ portanto

$$G_{\text{dB}} \approx -20X + 20X_0$$

o que não é mais do que a equação de uma recta de inclinação -20 dB e de ordenada na origem igual a $20X_0$. A função G_{dB} e as respectivas assíntotas estão representadas na figura E.20.

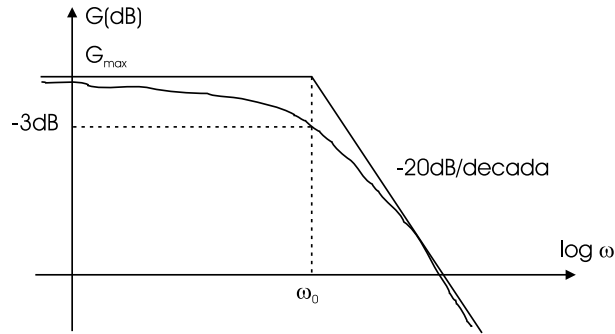


Figura E.20: diagrama de amplitude.

Define-se a banda passante B como sendo a gama de frequências para as quais o ganho G está compreendido entre o seu valor máximo G_{max} e $G_{\text{max}} - 3$ dB. No caso do filtro RC representado acima, o valor G_{max} é igual a 0 dB que é atingido para $\omega = 0$. Por outro lado como -3 dB = $-20 \log X$ implica $X = 1/\sqrt{2}$, podemos calcular o valor de ω para o qual

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}},$$

que tem como solução $\omega = \omega_0$. O resultado final é que a banda passante B = ω_0 .

A diferença de fase entre V_e e V_s é o argumento do número complexo A em função da frequência. O argumento de A pode-se obter calculando o argumento do numerador e do denominador ($\angle x$ significa “argumento de x ”)

$$\Phi(\omega) = \angle A = \angle(1) - \angle(1 + RC\omega)$$

sabendo que o argumento dum número real é zero podemos escrever

$$\Phi(\omega) = -\arctan RC\omega$$

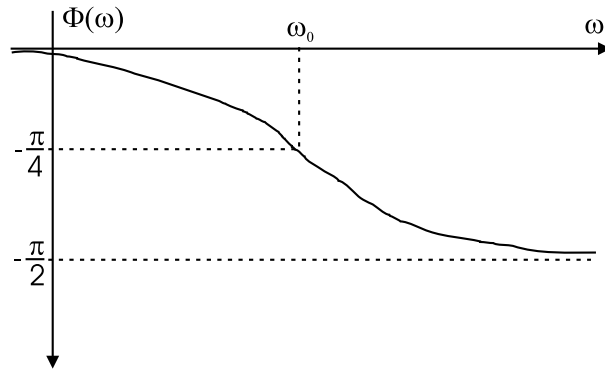


Figura E.21: diagrama de fase.

pondo $\tau = RC = 1/\omega_0$ que é a constante de tempo do circuito.

Obtemos

$$\Phi(\omega) = -\arctan \frac{\omega}{\omega_0}$$

A variação de $\Phi(\omega)$ pode-se calcular de forma aproximada observando que quando $\omega \rightarrow 0$ $\Phi \rightarrow 0$, e que quando $\omega \rightarrow \infty$ então $\Phi \rightarrow -\pi/2$. Obtem-se um valor particular para $\omega = \omega_0$ para o qual $\Phi(\omega_0) = -\pi/4$. Podemos fazer um traçado aproximado que terá uma forma semelhante ao da figura E.21. Alguns autores admitem um traçado de fase assíntotico através de segmentos de recta, no qual a fase é considerada nula para $\omega < \omega_0/10$ e igual a $-\pi/2$ para $\omega > 10\omega_0$. Para $\omega_0/10 < \omega < 10\omega_0$ a curva de fase é aproximada por um segmento de recta com uma inclinação de $-\pi/4$ por década.

3. Estudo de uma célula RC

Considere a montagem da figura E.22 com $v_e(t) = 3 \cos(6283t)$

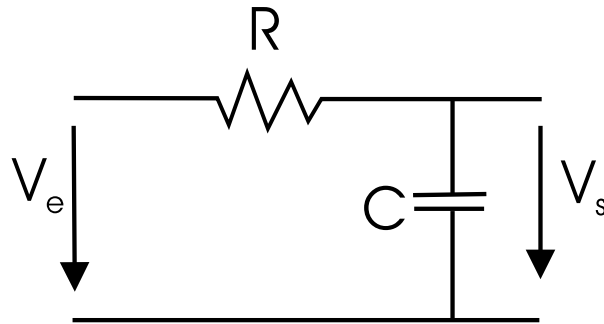


Figura E.22: célula RC.

a) desenhar a tensão de saída $v_s(t)$ com $R = 1k\Omega$ e $C = 160 \text{ nF}$.

- b) desenhar a corrente $i(t)$ no circuito para a mesma tensão de entrada $v_e(t)$ e nas mesmas condições que em a)
- c) calcule e represente a curva de Bode (amplitude e fase) do ganho em tensão $A = V_s/V_e$.

4. Estudo de uma célula CR

Considere a montagem da figura E.23.

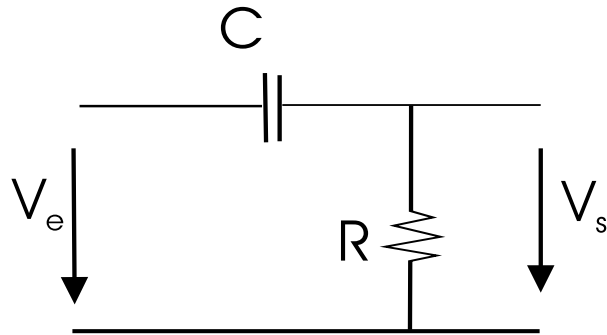


Figura E.23: circuito CR: $R = 1\text{ k}\Omega$ e $C = 160\text{ nF}$.

- a) desenhar a tensão de saída $v_s(t)$.
- b) desenhar a corrente $i(t)$ no circuito para a mesma tensão de entrada $v_e(t)$ e nas mesmas condições que em a).
- c) calcule e represente a curva de Bode (amplitude e fase) do ganho em tensão $A = V_s/V_e$.

E.8.2 Trabalho prático

1. Filtro RC ou passa baixo

Realizar a montagem da figura E.22 com $R=1\text{ k}\Omega$ e $C=22\text{ nF}$.

- a) aplicar sucessivamente em $v_e(t)$ um sinal sinusoidal de frequência $f = 100\text{ Hz}$, 1000 Hz e 10 kHz . Para estes três valores da frequência desenhar no mesmo gráfico, sinal de entrada e de saída. Comentar as amplitudes e diferenças de fase relativas entrada-saída.

- b) medir os valores do ganho em tensão $G = V_s/V_e$ amplitude e fase, em função da frequência para uma variação compreendida entre 100 Hz e 1 MHz (utilizando o método de medida de diferença de fase entre dois sinais mais apropriado, ver trabalho no. 2). Em simultâneo traçar o diagrama de Bode em papel semi-logarítmico, amplitude e fase.
- c) no gráfico de ganho traçado em b) determinar e assinalar a frequência de corte e as assíntotas quando $f \rightarrow 0$ e $f \rightarrow \infty$. Comparar o valor da frequência de corte experimental com o valor teórico calculado a partir dos elementos do circuito. Porque é que este filtro se chama passa baixo ? O que é que caracteriza um filtro de 1ª ordem ?
- d) no gráfico de fase traçado em b) determinar e assinalar a frequência de corte e as assíntotas quando $f \rightarrow 0$ e $f \rightarrow \infty$. Comparar o valor da frequência de corte experimental com o valor teórico calculado a partir dos elementos do circuito. Quais as características de fase de um filtro de 1ª ordem ? Conclusão.

1. Filtro CR ou passa alto

Realizar a montagem da figura E.23 com $R=1\text{ k}\Omega$ e $C=22\text{ nF}$. A tensão de saída $v_s(t)$ é medida aos terminais da resistência.

- a) aplicar sucessivamente em $v_e(t)$ um sinal sinusoidal de frequência $f = 100\text{ Hz}$, 1000 Hz e 10 kHz . Para estes três valores da frequência desenhar no mesmo gráfico, sinal de entrada e de saída. Comentar as amplitudes e diferenças de fase relativas entrada-saída.
- b) medir os valores do ganho em tensão $G = V_s/V_e$ amplitude e fase, em função da frequência para uma variação compreendida entre 100 Hz e 1 MHz (utilizando o método de medida de diferença de fase entre dois sinais mais apropriado, ver trabalho no. 2). Em simultâneo traçar o diagrama de Bode em papel semi-logarítmico, amplitude e fase.
- c) no gráfico de ganho traçado em b) determinar e assinalar a frequência de corte e as assíntotas quando $f \rightarrow 0$ e $f \rightarrow \infty$. Comparar o valor da frequência de corte experimental com o valor teórico calculado a partir dos elementos do circuito. Porque é que este filtro se chama passa alto ? Trata-se de um filtro de 1ª ordem ? Porquê ?
- d) no gráfico de fase traçado em b) determinar e assinalar a frequência de corte e as assíntotas quando $f \rightarrow 0$ e $f \rightarrow \infty$. Comparar o valor da frequência de corte experimental com o valor teórico calculado a partir dos elementos do circuito. Conclusão.

E.9 Filtro RLC em regime sinusoidal

E.9.1 Preparação

Considere a montagem da figura E.24. Sabendo que o sinal aplicado em $v_e(t)$ é um sinal sinusoidal de amplitude máxima 5 volts, responda às seguintes perguntas:

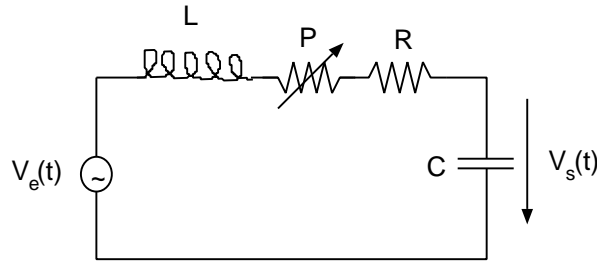


Figura E.24: Circuito RLC série: $R=100\ \Omega$, P potenciômetro linear de $2.2\ \text{k}\Omega$, $L=0.1\ \text{H}$, $C = 220\ \text{nF}$.

- calcule a forma literal do rácio $A(\omega) = \bar{V}_s/\bar{V}_e$ considerando o circuito em regime permanente sinusoidal.
- deduza a forma literal do módulo e o argumento de $A(\omega)$
- demonstre que o módulo de $A(\omega)$ passa por um máximo (chamado normalmente sobretensão) para uma frequência

$$\omega_M = \pm\omega_0\sqrt{1 - \frac{(P+R)^2}{L^2\omega_0^2}}$$

com $\omega_0^2 = 1/LC$. Deduza o valor limite do potenciômetro P_{lim} a partir do qual deixa de haver sobretensão.

- faça o diagrama de Bode de $A(\omega)$ (amplitude e fase) para os valores numéricos da figura com $P = P_{lim}$.

E.9.2 Trabalho Prático

Realize a montagem da figura E.24. Calcule o valor de ω_0 .

- o potenciômetro P deverá ser colocado no seu valor máximo aumentando assim a resistência no circuito para um valor bem superior ao valor limite. Mantendo

constante a amplitude do sinal de entrada verificar a amplitude do sinal de saída a várias frequências, nomeadamente em torno a ω_0 . Comente o que observou.

- b) trace o diagrama de Bode de $V_s/V_e(\omega)$ (amplitude e fase) em papel semi-logarítmico.
- c) colocando agora o potenciômetro P a um valor em torno a P_{lim} calculado na preparação, volte a fazer o diagrama de Bode de $V_s/V_e(\omega)$ (amplitude e fase) na mesma folha que no caso anterior.
- d) finalmente coloque $P = 0$ e volte a fazer o diagrama de Bode de $V_s/V_e(\omega)$ (amplitude e fase) na mesma folha. Determine a frequência da sobretensão e o seu valor em dB's. Compare com os valores teóricos. Conclusão.
- e) comente a variação da curva de fase em função de P obtida nas alíneas b), c) e d).

E.10 Quadripolos

E.10.1 Preparação

Quadripolo em T

Considere a montagem da figura E.25. Calcular:

- os parâmetros impedância $\{Z_{ij}\}$
- o conjunto de parâmetros híbridos $\{h_{ij}\}$
- o ganho em tensão A_v sem carga.
- colocando uma resistência de carga R_L à saída deduza o ganho em corrente $A_i = i_2/i_1$.

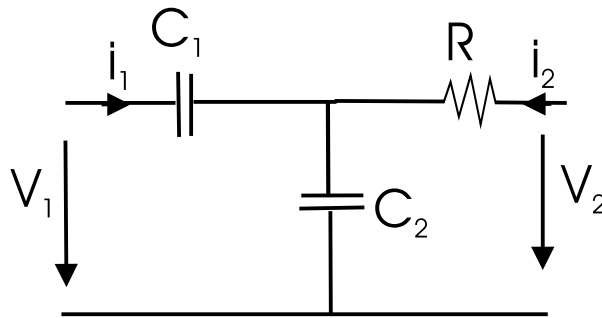


Figura E.25: quadripolo passivo simétrico.

E.10.2 Trabalho prático

1. Parâmetros impedância

Realizar a montagem da figura E.25 com $C_1 = C_2 = 220 \text{ nF}$ e $R = 1 \text{ k}\Omega$.

- efectuar a medida do conjunto de parâmetros impedância a uma frequência de 1 kHz. Fazer o desenho da montagem de medida para cada caso e explicar o método empregue. Detalhar as dificuldades encontradas. Precisão das medidas. Comparar com os valores teóricos calculados na preparação.
- propôr um método de medida para a curva de fase da impedância de entrada $Z_e = v_1/i_1$ com $R_L = 100\Omega$. Explicar como executar esse método e medir Z_e para o circuito da figura E.25.

2. Paramêtros característicos

- a) medir o ganho em tensão $A_v = \frac{v_2}{v_1}$ a $f = 1$ kHz.
- b) com uma resistência de carga de $100\ \Omega$, medir o módulo do ganho em corrente $A_i = \frac{i_2}{i_1}$. Qual deveria ser a evolução da fase de A_i em função da frequência ? Confirmar medindo um ou dois pontos particulares.

F Bibliografia

Introduction to Electric Circuits, Richard C. Dorf, Sec. Ed., John Wiley & Sons. Inc. (1993).

Microelectronics, J. Millman and A. Grabel, Second Ed, McGraw-Hill (1987).

Electric Circuit Analysis, Robert A. Bartkowiak, John Wiley & Sons, 1985.

G Método de avaliação

- Momentos de avaliação: M1,M2,M3 (M1 e M2 são mini testes escritos enquanto M3 é uma prova oral).
- Trabalhos práticos (P): média das notas dos relatórios realizados durante as aulas práticas.

A nota de controlo contínuo (CC) será a média aritmética de M1, M2, M3 e P, i.e.,

$$CC = \frac{M1 + M2 + M3 + P}{4}$$

Só serão admitidos por frequência os alunos que tenham obtido nota superior a 6 valores em qualquer uma das avaliações. Os alunos com assiduidade e com nota superior a 6 valores nas aulas práticas durante o ano lectivo anterior, estão dispensados das aulas práticas utilizando assim a nota (P) obtida nesse ano. A assiduidade a todos os trabalhos práticos é condição para admissão a exame.

H Correções das Folhas de Trabalhos Práticos

| | |
|----|---|
| 1 | Instrumentos e técnicas de medida I |
| 2 | Instrumentos e técnicas de medida II |
| 3 | Instrumentos e técnicas de medida III |
| 4 | Teoremas gerais I |
| 5 | Teoremas gerais II |
| 6 | Circuitos RC/CR - em regime transitório |
| 7 | Circuito RLC |
| 8 | Filtros RC/CR - em regime sinusoidal |
| 9 | Filtro RLC em regime sinusoidal |
| 10 | Quadripolos |

H.1 Instrumentos e técnicas de medida I

H.1.1 Preparação

Exemplo 1: caso ideal

a) o desenho deverá mostrar o amperímetro em série no circuito e $I = 5/1000 = 5$ mA.

b) o voltímetro V ideal é colocado indiferentemente amonte ou avale do amperímetro e deverá marcar $E = 5$ V.

Exemplo 2: caso de aparelhos e/ou fonte de medida não ideais.

a) V mede 5 V e A mede $I = 5/100 = 50$ mA.

b) neste caso a resistência total do circuito vai ser $R_T = 105\Omega$ e por isso A vai medir $I_T = 5/150 \approx 33$ mA e o voltímetro V marcará uma tensão $5 - 0.033 \cdot 50 = 3.35$ V.

c) neste caso a resistência total do circuito será $R_T = 105\Omega$ e por isso a nova corrente que circula na malha será $I_T = 5/105 \approx 47$ mA, mas neste caso o voltímetro V marcará sempre os 5 V porque está colocado amonte do amperímetro.

H.1.2 Trabalho prático

1. Característica tensão-corrente numa resistência

a) os pontos estarão devidamente alinhados numa recta. Fazendo uma tabela de valores e dividindo cada vez V por I temos uma série de valores de resistência que nos pode dar um valor médio. A inclinação da recta fazendo $R_{exp} = \Delta V / \Delta I$ permite-nos achar o valor experimental da resistência. O valor nominal é o valor lido através do código de cores e o valor real medido é aquele achado utilizando o multímetro. A lei de Ohm é verificada.

b) exigir um ajuste do tipo mínimos quadrados entre os pontos experimentais. Isto é bastante fácil pois os pontos encontram-se praticamente alinhados. Explicar a redução da incerteza obtida através da utilização do valor da resistência calculado a partir da recta de regressão em vez de um ponto.

c) em princípio, devido ao facto que temos um único aparelho de medida usado alternadamente em A e em V, deveríamos obter o mesmo resultado que na alínea a). Na prática, com dois aparelhos de medida, os valores medidos poderiam ser diferentes dependendo da qualidade relativa de A e V.

2. Característica tensão-corrente num diodo

a) tendo o cuidado de respeitar a polaridade do diodo podemos observar que a curva é fortemente não linear. É preciso ter especial cuidado para valores fracos da tensão ($< 0.6 \text{ V}$) para os quais a corrente é também extremamente fraca, quase nula, pois o diodo está bloqueado.

b) a curva obtida deveria ser sensivelmente uma recta, o que demonstra que a curva $I = f(V)$ é do tipo exponencial.

H.2 Instrumentos e técnicas de medida II

H.2.1 Preparação

Exercício 1: divisor de tensão

Sabendo que o gerador de tensão debita uma tensão $e(t) = 3 \sin(6280t)$.

a) o voltímetro mede valores eficazes e por isso $V_{eff} = 3/\sqrt{2} \approx 2.12$ V.

b) 3 V. o rácio é $\sqrt{2}$.

c) $T = 2\pi/6280 \approx 1$ ms.

d) medimos $V_0 = (1000 \times 2.12)/2000 = 1.06$ V, dados que o divisor de tensão divide por um factor 2. O osciloscópio no mesmo ponto permite-nos medir uma tensão pico-pico igual a $2 * 3/2 = 3$ V.

Exercício 2: muito simplesmente $\bar{v} = V_0$ dado que o cos tem média nula. No caso do valor eficaz temos que fazer um pouco de calculos.

$$v_{eff}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T [v_1(t) + V_0]^2 dt,$$

onde $v_1(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$. Assim o desenvolvimento do quadrado dá-nos três termos dos quais o primeiro é simplesmente o quadrado do valor eficaz de $v_1(t)$, i.e., $V_m^2/2$, o segundo tem valor médio zero e o terceiro é uma constante igual a V_0^2 . O resultado final é então:

$$v_{eff} = \sqrt{\frac{V_m^2}{2} + V_0^2}.$$

H.2.2 Trabalho Prático

2. Medida de amplitudes

O valor pico-pico é nesse caso 1.4 V.

3. Medida de frequências

Não esquecer de calibrar a base de tempo antes da medida. Erros de leitura.

4. Divisor de tensão alterno

Realize a montagem da figura E.9.

a) verifica-se que o sinal à saída do gerador tem cerca de 2.21 V eficazes com o

multímetro. Com o osciloscópio verifica-se os 3 V de tensão pico. Regular cerca de 1000 Hz na frequência.

b) a tensão aos terminais do gerador de sinais deverá ser os tais 2.12 V e aos terminais da resistência, deveremos ter $V_o = 1.06$ V Os valores de pico são respectivamente 3 V e 1.5 V. O multímetro digital terá possivelmente maior precisão.

c) a tensão de *offset* é bloqueada pelo condensador á entrada do osciloscópio e por isso só em visível em posição DC. O calculo diz-nos que o valor eficaz da soma é

$$V_{eff}^2 = V_{DC}^2 + V_{eff}(sinus)$$

o que no nosso caso dá $V_{eff} = \sqrt{4 + 4.5} \approx 2.91$ V. Penso que o multímetro digital nos poderá dar o valor correcto porque funciona por integração. Em V_o , o valor eficaz medido será cerca de 1.46 V, o valor pico será $(2 + 3)/2 = 5/2 = 4.5$ V e o valor pico será obviamente o dobro, i.e., 9 V.

d) no caso da onda quadrada o valor eficaz medido pelo multímetro será da ordem dos 3 V e com o osciloscópio também.

H.3 Instrumentos e técnicas de medida III

H.3.1 Preparação

Medida de diferenças de fase com o método da elipse

Consideremos dois sinais sinusoidais aplicados nos canais X e Y de um osciloscópio (eixos ortogonais OX e OY da figura E.11),

$$\begin{cases} x(t) &= A \cos \omega t \\ y(t) &= B \cos(\omega t - \phi) \end{cases}.$$

A composição destas duas equações obtém-se eliminando o tempo t entre elas, i.e., o ponto luminoso no ecrã vai ser desviado horizontal e verticalmente em simultâneo, formando assim uma figura parameterizada pela variável tempo.

a) obviamente se calcularmos $x'^2 + y'^2$, obtemos

$$x'^2 + y'^2 = \cos^2 \omega t + x'^2 \cos^2 \phi + \sin^2 \omega t \sin^2 \phi + 2x' \cos \phi \sin \omega t \sin \phi,$$

somando e subtraindo $x'^2 \cos^2 \phi$ do lado direito da equação obtemos

$$x'^2 + y'^2 = \cos^2 \omega t + 2x'^2 \cos^2 \phi - x'^2 \cos^2 \phi + \sin^2 \omega t \sin^2 \phi + 2x' \cos \phi \sin \omega t \sin \phi,$$

visto que o segundo mais o último termo dão $2x'y' \cos \phi$, podemos escrever

$$x'^2 + y'^2 - 2x'y' \cos \phi = \cos^2 \omega t - x'^2 \cos^2 \phi + \sin^2 \omega t \sin^2 \phi,$$

onde substituindo $x' = \cos \omega t$ no segundo membro e pondo $\cos^2 \omega t$ em factor temos

$$x'^2 + y'^2 - 2x'y' \cos \phi = \cos^2 \omega t (1 - \cos^2 \phi) + \sin^2 \omega t \sin^2 \phi,$$

e ainda

$$x'^2 + y'^2 - 2x'y' \cos \phi = \cos^2 \omega t \sin^2 \phi + \sin^2 \omega t \sin^2 \phi,$$

e finalmente a relação esperada

$$x'^2 + y'^2 - 2x'y' \cos \phi - \sin^2 \phi = 0.$$

b) fazendo agora a mudança de variável

$$x' = x'' \cos \frac{\pi}{4} - y'' \sin \frac{\pi}{4} = \frac{x'' - y''}{\sqrt{2}}$$

$$y' = x'' \sin \frac{\pi}{4} + y'' \cos \frac{\pi}{4} = \frac{x'' + y''}{\sqrt{2}},$$

na equação final do ponto a) obtem-se

$$\frac{(x'' - y'')^2}{2} + \frac{(x'' - y'')^2}{2} - (x'' - y'')(x'' + y'') \cos \phi - \sin^2 \phi = 0$$

ou ainda

$$x''^2 + y''^2 - (x''^2 - y''^2) \cos \phi - \sin^2 \phi = 0$$

desenvolvendo e reagrupando os termos em x''^2 e y''^2 temos ainda que

$$x''^2(1 - \cos \phi) + y''^2(1 + \cos \phi) - \sin^2 \phi = 0$$

onde sabendo que

$$\sin^2 \frac{\phi}{2} = \frac{1 - \cos \phi}{2} \quad \text{e} \quad \cos^2 \frac{\phi}{2} = \frac{1 + \cos \phi}{2}$$

podemos escrever

$$x''^2 2 \sin^2 \frac{\phi}{2} + y''^2 2 \cos^2 \frac{\phi}{2} - \sin^2 \phi = 0$$

e finalmente dividindo por $2 \sin^2(\phi/2) 2 \cos^2(\phi/2)$ e simplificando

$$\frac{x''^2}{2 \cos^2 \frac{\phi}{2}} + \frac{y''^2}{2 \sin^2 \frac{\phi}{2}} - \frac{\sin^2 \phi}{2 \sin^2(\phi/2) 2 \cos^2(\phi/2)} = 0$$

onde podemos reconhecer que o terceiro termo é efectivamente igual a 1 e daí a equação pretendida.

c) facilmente deduzimos que

$$2a^2 = 2 \cos^2 \frac{\phi}{2} \quad \text{e} \quad 2b^2 = 2 \sin^2 \frac{\phi}{2}$$

e finalmente

$$\tan \frac{\phi}{2} = \frac{b}{a}$$

H.3.2 Trabalho prático

1. Medida de frequência comparada: figuras de Lissajoux

Para facilitar esta fase do trabalho juntam-se quatro alunos por cada mesa. O problema da estabilização da curva no ecrã resolve-se tocando ligeiramente os botões de frequência num dos geradores.

2. Medida de diferenças de fase

Realizar um circuito RC, com $R = 1 \text{ k}\Omega$ e $C = 220 \text{ nF}$, portanto $\tau = 220 \cdot 10^{-6} \text{ s}$, i.e., $\tau = 0.22 \text{ ms} \rightarrow f_c \approx 730 \text{ Hz}$. Colocando um sinal à entrada de pulsação $\omega_0 = 12566 \text{ rd/s}$ temos uma frequência $f_0 = 2000 \text{ Hz}$. O valor de desfasagem teórico é

$$\phi = -\arctan RC\omega_0 = -70^\circ$$

- a) a medida directa não esquecendo de colocar todo um meio período no ecrã descalibrando, se necessário, a base de tempo e aumentando as amplitudes de forma a obter cortes francos no eixo do tempo. Fazer a proporção para π .
- b) devemos obter sensivelmente o mesmo ϕ com um pouco mais de dificuldades de leitura. Utilizar os o facto que $\sin \phi = OB'/OB$.
- c) neste caso vê-se um circuito RC típico, i.e., quando a frequência aumenta acima da frequência de corte, neste caso cerca de 700 Hz, a amplitude da saída diminui em relação à entrada e a diferença de fase aumenta.

3. Medidas de sinais transitórios

Dividimos o valor do condensador por um factor 10, i.e., a nova constante de tempo é agora $\tau = 22\mu\text{s}$. Com uma onda quadrada de frequência 500 Hz temos um meio período de 1 ms ou seja cerca de 40 vezes maior que a constante de tempo e por isso o sinal de entrada encontra-se à saída sem grandes problemas (estamos abaixo da frequência de corte).

À medida que a frequência aumenta, o meio período diminui e torna-se progressivamente da ordem de ou inferior a constante de tempo. Ao limite obtemos uma onda triangular à saída.

H.4 Teoremas Gerais I

H.4.1 Preparação

4. Aplicação

a) utilizando o teorema de sobreposição, a corrente devida a E_1 escreve-se

$$i_{4,1} = \frac{R_2 // R_3 I}{R_4 + R_2 // R_3}$$

enquanto I

$$I = \frac{E_1}{R_1 + R_2 // R_3 // R_4}$$

A corrente devida a E_2 é

$$i_{4,2} = \frac{R_1 // R_2 I}{R_4 + R_1 // R_2}$$

enquanto I

$$I = \frac{E_2}{R_3 + R_1 // R_2 // R_4}$$

b) usando o teorema de Thevenin talvez o mais simples seja calcular a tensão em aberto utilizando sobreposição, i.e.,

$$V_{th,1} = \frac{R_2 // R_3 E_1}{R_2 // R_3 + R_1}$$

e

$$V_{th,2} = \frac{R_1 // R_2 E_2}{R_1 // R_2 + R_3}$$

e finalmente

$$\begin{aligned} V_{th} &= V_{th,1} + V_{th,2} \\ &= \frac{R_2 R_3 E_1}{R_2 R_3 + R_1(R_2 + R_3)} + \frac{R_1 R_2 E_2}{R_1 R_2 + R_3(R_1 + R_2)} \\ &= \frac{R_2 R_3 E_1 + R_1 R_2 E_2}{R_1 R_2 + R_3 R_1 + R_3 R_2} \end{aligned} \tag{H-4.1}$$

Por seu lado a resistência de Thevenin equivalente escreve-se,

$$R_{th} = R_1 // R_2 // R_3$$

e finalmente a corrente em R_4 ,

$$i_4 = \frac{V_{th}}{R_{th} + R_4}$$

c) aplicação numérica:

$$\begin{aligned} R_1 &= 120\Omega & E_1 &= 9 \text{ v} \\ R_2 &= 180\Omega & E_2 &= 4.5 \text{ v} \\ R_3 &= 220\Omega \\ R_4 &= 120\Omega \end{aligned}$$

Salvo erro de cálculo os valores são os seguintes:

- a) devido a E_1 , $I = 51 \text{ mA}$, e $i_{4,1} = 23 \text{ mA}$; devido a E_2 , $I = 17 \text{ mA}$ e $i_{4,2} = 6.3 \text{ mA}$, portanto a corrente total em R_4 é $i_4 = i_{4,1} + i_{4,2} = 6.3 + 23 = 29.3 \text{ mA}$.
- b) $V_{th,1} = 4 \text{ V}$ e $V_{th,2} = 1.1 \text{ V}$ e por isso $V_{th} = 5.1 \text{ V}$. Assim $R_{th} = 54\Omega$. Finalmente $i_4 = 5.1/(120 + 54) = 29.2 \text{ mA}$, o que verifica o resultado obtido na alínea a).

H.4.2 Trabalho Prático

1. Teorema de sobreposição

Os valores devem ser bastante próximos dos calculados. O resultado deverá ser ao mA.

2. Teorema de Thevenin e Norton

- a) tensão em vazio (sem R_4) e R_{th} sem as fontes.
- b) corrente de Norton com o amperímetro em vez de R_4 , deverá ser $I_N = V_{th}/R_{th}$.
- c) próximos.
- d) realizar efectivamente os dipolos de Thevenin e Norton e medir i_4 . Os valores deverão ser bastante próximos.
- e) basta calcular o novo i_4 a partir de Thevenin (ou Norton) e comparar com o medido em 1.

H.5 Teoremas Gerais II

H.5.1 Preparação

- i) $V_{th} = V_A - V_B = R_2 E / (R_1 + R_2) - R_3 E / (R_3 + R_4)$, $R_{th} = R_3 // R_4 + R_1 // R_2$, a corrente de Norton entre A e B, calcula-se facilmente sabendo que $I_N = i_1 - i_2$ onde i_1 é a corrente em R_1 e i_2 é a corrente em R_2 . Como $i_1 = R_4 I / (R_1 + R_4)$ e $i_2 = R_3 I / (R_2 + R_3)$ onde $I = E / (R_1 // R_4 + R_2 // R_3)$ temos que

$$I_N = \frac{R_4(R_2 + R_3)E - R_3(R_1 + R_4)E}{R_1 R_4(R_2 + R_3) + R_2 R_3(R_1 + R_4)}$$

- ii) a potência dissipada na carga escreve-se em função dos elementos de Thevenin $P = VI = [R_c V_{th} / (R_c + R_{th})][V_{th} / (R_c + R_{th})]$ ou seja $P = R_c V_{th}^2 / (R_c + R_{th})^2$.
- iii) a condição de adaptação é obtida para $R_c = R_{th}$
- iv) nesse caso $P_{\max} = V_{th}^2 / 4R_{th}$.
- v) $V_{th} = 2.47 \text{ V}$, $R_{th} = 149\Omega$, $I_N = 16.6 \text{ mA}$,
 $R_c = 149\Omega$, $P_{\max} = 10.2 \text{ mW}$.

H.5.2 Trabalho Prático

Realizar a montagem da figura E.15.

- a) fazer uma tabela $V|I|R_c|P$; para $R_c = 0$ obtemos I_N e para $R_c = \infty$ obtemos V_{th} . R_{th} é (-) a inclinação da recta de carga.
- b) para o dipólo (a) basta colocar R_1 e R_2 em paralelo e o mesmo para o dipólo (b). Ensinar como regular as fontes em corrente. Obtem-se os mesmos gráficos.
- c) a partir da tabela anterior traçar $P = f(R_c)$. Deduzir R_c que dá a adaptação máxima e comparar com o valor teórico.

H.6 Circuitos RC/CR em regime transitório

H.6.1 Preparação

1. Circuito integrador passivo RC

- a) $V_s(t) = V_0[1 - e^{-t/RC}]$
- b) $V_s(t) = (V_0/RC)t$, quando $V_s = V_0$ temos que $t = RC$.
- c) para valores de $t \ll \tau = RC$.

2. Circuito derivador passivo CR

- a) $V_s(t) = V_0 e^{-t/RC}$
- b) $V_s(t) = -(V_0/RC)t + V_0$, a intersecção com a recta $V_s = 0$ dá-se para $t = RC$.
- c) visto que a entrada é uma constante, a sua derivada é zero e nesse caso o sinal de saída se comporta-se como a derivada do sinal de entrada para valores de $t \gg \tau = RC$.

H.6.2 Trabalho prático

1. Circuitos RC

- a) $T = 0.4$ ms implica $T/2 = 0.2$ ms e para os diferentes valores de $\tau = RC$ com $R = 1$ k Ω com $C = 22, 100$ e 220 nF temos $\tau_1 = 0.022, 0.1$ e 0.22 ms, respectivamente.
- b) comporta-se como o integral do sinal de entrada quando $T/2 \ll \tau$.
- c) deve-se ver um arco de parábola

2. Circuitos CR

- a) alguns são difíceis de medir.
- b) comporta-se como a derivada do sinal de entrada para $T/2 \gg \tau$.
- c) encontra-se uma constante.

H.7 Circuito RLC

H.7.1 Preparação

a) $V_s(s) = \frac{(1/LC)V_e(s)}{s^2 + (R/L)s + 1/(LC)}$

- b) pondo $\omega_0^2 = 1/LC$ e $2\alpha = R/L$ temos que a resistência crítica R_c é o valor de R tal que $\alpha = \omega_0$, i.e., $R_c = 2\sqrt{L/C}$ e cujo valor numérico é $R_c = 1350\Omega$. Temos ainda que $\omega_0 = 6741$ rd/s e $f_0 = 1073$ Hz.

c)

| | | | |
|-----------|---------------------|------------------|--|
| $R = 0$ | $\alpha = 0$ | onda sinusoidal | $\omega_0 = 1/LC = 6741$ rd/s |
| $R > R_c$ | $\alpha > \omega_0$ | sobre amortecido | exponencial |
| $R = R_c$ | $\alpha = \omega_0$ | crítico | tipo exponencial |
| $R < R_c$ | $\alpha < \omega_0$ | seno amortecido | $\omega_d = \sqrt{6741^2 - \alpha^2}$ rd/s |

H.7.2 Trabalho Prático

1. Regime sobre amortecido

- a) o sinal de saída é a soma de duas exponenciais. Notar o longo tempo de resposta e a tangente nula na origem.
- b) se a resistência aumenta o tempo de subida aumenta e vice-versa.

2. Regime crítico

- a) considerar que a resistência interna da bobine é de cerca de 65Ω , portanto deveríamos ter P igual a cerca 300Ω .
- b) para $R = R_c$ temos que $\alpha = \omega_0$ e o tempo de subida obtem-se através da resolução da equação aproximada $v_s(t_r) = 0.9E = (E/L)t \exp(-\alpha t)$. A solução tem que ser obtida numericamente.

3. Regime sub amortecido

- a) deverá ser uma senoide amortecida com ultrapassagem do valor final. O tempo de subida obtem-se a partir dos máximos da curva de resposta. Esses máximos por sua vez obtem-se a partir da equalização a zero da derivada o que dá:

$$t_p = \frac{\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}$$

por sua vez os máximos (relativamente ao valor final = E) são

$$a_p = 1 + \exp\left(\frac{-\alpha\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}\right)$$

a pulsação é $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$

- b) à medida que R diminui, α diminui e então a ultrapassagem do valor final aumenta, o tempo de subida diminui e a pulsação ω_d aumenta.

4. Regime não amortecido

Neste caso chega-se ao caso de resistência mínima do circuito, mas diferente de zero. É o caso limite do anterior.

H.8 Filtros RC/CR em regime sinusoidal

H.8.1 Preparação

3. Estudo de uma celula RC

- a) visto que $R = 1k\Omega$, $C = 160 \text{ nF}$ e $\omega = 6283 \text{ rd/s}$, temos que $RC\omega = 1$ e por isso em complexo

$$\bar{V}_s = \frac{1-j}{2}\bar{V}_e$$

o que permite deduzir

$$v_s(t) = 3 \cos(6283t - 0.785)$$

onde o ângulo $\phi = -0.785 \text{ rd}$ corresponde a -45° .

- b) temos que

$$i(t) = C \frac{dv_s(t)}{dt} = -3C\omega \sin(6283t - 0.785)$$

o que dá $i(t) = -3 \sin(6283t - 0.785) \text{ mA}$.

- c) curvas típica.

4. Estudo de uma celula CR

- a) com os mesmos valores numéricos que no ponto anterior temos

$$\bar{V}_s = \frac{1+j}{2}\bar{V}_e$$

o que permite deduzir

$$v_s(t) = 3 \cos(\omega t + 0.785)$$

onde o ângulo $\phi = 0.785 \text{ rd}$ corresponde a 45° .

- b) temos que

$$i(t) = C \frac{dv_s(t)}{dt} = -3C\omega \sin(6283t + 0.785)$$

o que dá $i(t) = -3 \sin(6283t + 0.785) \text{ mA}$.

- c) curvas típica.

H.8.2 Trabalho prático

1. Filtro RC ou passa baixo

- a) $f_c = 1/2\pi RC = 7237$ Hz. No primeiro e segundo casos, os sinais de entrada e de saída são praticamente iguais em amplitude e fase (talvez uma pequena defasagem a 1 kHz). A 10 kHz, estamos para além da frequência de corte e por isso a atenuação é superior a 3 dB e a defasagem superior a -45 graus.
- b) curva típica passa baixo.
- c) porque deixa passar as frequências mais baixas e corta as mais altas. Assimp-totas de -20 dB/década e uma defasagem total de 90 graus.
- d) curva de fase típica de RC.

2. Filtro CR ou passa alto

- a) $f_c = 1/2\pi RC = 7237$ Hz. No primeiro e segundo casos, os sinais de entrada e de saída são praticamente iguais em amplitude e fase (talvez uma pequena defasagem a 1 kHz). A 10 kHz, estamos na banda passante e por isso a atenuação é inferior a 3 dB e a defasagem inferior a 45 graus.
- b) curva típica passa alto.
- c) porque deixa passar as frequências mais altas e corta as mais baixas. Assimp-totas de 20 dB/década e uma defasagem total de 90 graus (+90 para 0 graus).
- d) curva de fase típica de CR.

H.9 Filtro RLC em regime sinusoidal

H.9.1 Preparação

a)

$$A(\omega) = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + j\omega C(P + R)}$$

b)

$$|A(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 C^2 (P + R)^2}}$$

$$\angle A(\omega) = -\arctg \frac{\omega C(P + R)}{1 - LC\omega^2}$$

c) derivando $|A(\omega)|$ temos que

$$\frac{d|A(\omega)|}{d\omega} = \frac{-1/2[2(1 - LC\omega^2)(-2LC\omega) + 2\omega C^2(P + R)^2]}{[(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 C^2(P + R)^2]^{-3/2}}$$

Igualando a zero temos que

$$1 - LC\omega^2 = C/L(P + R)^2$$

ou ainda que a frequência do máximo da curva de amplitude é

$$\omega_M = \pm \omega_0 \sqrt{1 - \frac{(P + R)^2}{L^2 \omega^2}}.$$

O valor limite do potenciômetro P deduz-se do radicando da expressão acima assumindo que quando este se torna negativo deixa de haver sobretensão.

$$P_{lim} = \sqrt{\frac{L}{C}} - R$$

o que nos permite calcular $P_{lim} = 574\Omega$.

d) com $P = P_{lim}$ temos o caso ao limite da sobretensão. Na prática a curva admite uma assíntota para 0 dB quando $\omega \rightarrow 0$ e uma assíntota de -20 dB por década quando $\omega \rightarrow \infty$.

H.9.2 Trabalho prático

- a) caso sem sobretensão.
- b) ver diagrama da preparação
- c) caso limite
- d) caso com sobretensão. Utilizar a expressão da preparação uque dá ω_M
- e) a transição da curva de fase em torno a ω_0 é tanto mais rápida quando maior for a sobretensão, i.e., mais fraca for a resitência no circuito.

H.10 Quadripolos

H.10.1 Preparação

Quadripolo em T

a)

$$z_{11} = \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2} = \frac{1}{j\omega C}$$

com $C = C_1 C_2 / (C_1 + C_2)$.

$$z_{12} = z_{21} = \frac{1}{j\omega C_2}$$

$$z_{22} = R + \frac{1}{j\omega C_2}$$

b)

$$h_{11} = \frac{1}{j\omega C_1} + R // \frac{1}{j\omega C_2}$$

$$h_{12} = \frac{1}{1 + j\omega R C_2}$$

$$h_{21} = -\frac{1}{1 + j\omega R C_2}$$

$$h_{22} = \left[R + \frac{1}{j\omega C_2} \right]^{-1}$$

c) em vazio $A_v = v_2/v_1 = C_1/(C_1 + C_2)$.

d) o ganho em corrente $A_i = i_2/i_1 = -[1 + j\omega(R + R_L)C_2]^{-1}$.

H.10.2 Trabalho prático

1. Paramêtros impedância

a) para z_{11} temos que $C = C_1/2 = 110 \text{ nF}$ e então a 1 kHz , $z_{11} = -j1447\Omega = 1447 \exp(-j\pi/2)$ e o método de medida utiliza o multímetro no circuito de entrada com a saída em vazio permitirá obter o módulo $|z_{11}| = 1447$. A fase é mais difícil, e necessita a utilização de uma resistência auxiliar R' em série na entrada, temos que

$$I_1 = \frac{V' - V_1}{R'}$$

onde, V' é a tensão medida antes da resistência R' . A fase de I_1 vai ser igual à diferença de fase entre V' e V_1 que será necessário medir no osciloscópio e deverá dar $-\pi/2$. Na prática poderá colocar-se a resistência R' na linha de massa à entrada de forma a ter uma massa comum aos vários aparelhos.

Para z_{12} temos uma dificuldade que é de medir uma tensão v_1 com uma corrente $i_1 = 0$. Isso poderia ser efectuado de forma aproximada colocando uma resistência muito elevada no circuito de entrada, fazendo assim $i_1 \approx 0$ e medindo v_1 com o multímetro. Na prática torna-se mais fácil alimentar pela saída e efectuar a medida de i_2 faz-se com uma resistência auxiliar em série como explicado para z_{11} . v_1 mede-se directamente com o multímetro à entrada. Na prática $z_{12} = -j723\Omega$.

As medidas de z_{21} e z_{22} são idênticas às de z_{12} e de z_{11} salvo que no último caso o gerador atacará o circuito a partir da saída. Na montagem os valores calculados a partir da teoria são de $z_{21} = -j723\Omega$ e para $z_{22} = 1000 - j723\Omega$. Em termos de módulos temos $|z_{21}| = 723\Omega$ e para $|z_{22}| = 1233\Omega$.

Medidas mais precisas de z_{12} e z_{21} podem ser obtidas tendo acesso ao interior do quadripolo, considerando que visto que no primeiro caso $i_1 = 0$, medindo directamente a tensão aos terminais de C_2 .

b) ver acima.

2. Parâmetros característicos

- a) na prática temos que $A_v = 1/2$ independentemente da frequência.
- b) com uma resistência de carga de 100Ω temos teoricamente uma frequência de corte de $f_c = 723\text{ Hz}$. O ganho deveria aumentar indefinidamente a partir dessa frequência. Os módulos das correntes à entrada e saída são medidos através do multímetro à entrada e da tensão de saída aos terminais de R_L , respectivamente. Obtem-se $A_i = 0.66$.